953. 単葉函数ニ関スル一定理ニ就キテ

春木　博（神戸高商船）

$f(z)=z+a_2z^2+\cdots\cdots$ ガ $|z|<1$ デ正則単葉ナラバ $|a_2|\leqq 2$ ナルコトガ Bieberbach ニヨッテ証明サレタ。次ニ $f(z)$ ガ $|z|<1$ デ有理型単葉ナリトシタ場合ニ $|a_2|$ ヲソノ極 α ヲ用ヰテ評価シテ見ヨウ。（単葉ナル故極ハタダ一ツデアル）

（定理）　$f(z)=z+a_2z^2+\cdots\cdots$ ガ $|z|<1$ デ有理型単葉ナリトシ、ソノ極ヲ α トスレバ（$\alpha\neq 0$ ナルコトハ当然デアル）

$$|a_2|\leqq\frac{(1+|\alpha|)^2}{|\alpha|}+2$$

右辺ノ値ガ best possible ナルコトハ

$$f'(z)=\frac{(\sqrt{5}-2)z}{z+(\sqrt{5}-2)(1-z)^2}$$

ニヨリテ験証サレル。

（証明）　$-1<\alpha<0$ ナリトシテ一般性ヲ損ジナイ。$\alpha=-r$ トオケバ $(0<r<1)$

$$\frac{h(z)}{(1-h(z))^2}=\frac{4r}{(1+r)^2}\;\frac{z}{(1-z)^2}$$

ヲ充ス函数 $h(z)=z+\cdots\cdots$ ニヨッテ単位円 $|z|<1$ ヲ単位円 $|w|<1$ カラ $-1<w\leqq -r$ ヲ除イタ領域ニ等角ニ写像スル。故ニ $g(z)=f\{h(z)\}$ トオケバ $g(z)$ ハ $|z|<1$ ニテ正則且ツ単葉トナル。$g(z)$ ヲ展開スレバ

$$\left(m = \frac{4r}{(1+r)^2}\right)$$

$$g(z) = mz + (a_2 m - 2m + 2)mz^2 + \cdots\cdots$$

Bieberbach ノ評價ニヨリ

$$|a_2 m - 2m + 2| \leqq 2$$

コレヨリ

$$|a_2| \leqq \frac{(1+r)^2}{r} + 2$$

即チ

$$|a_2| \leqq \frac{(1+|\alpha|)^2}{|\alpha|} + 2$$