

954. 二次式=開スル函數方程式=就イテ

森 本 博(神戸商船)

$f(x) = ax^2 + bx + c$, $g(x) = ax^2$ ハ、次ノ函數
方程式

$$(F) \quad f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) + 2g(y)$$

ヲ満足セシトル。

今逆 = (F) ヲ充ス可測函數 $f(x)$, $g(x)$ ヲ求メテ
見ヨシ。

$$(F) \ni g(y) = \frac{1}{2} \{ f(x+y) + f(x-y) - 2f(x) \}$$

$$\begin{aligned}
\text{故} &= g(x+y) + g(x-y) - 2g(x) - 2g(y) \\
&= \frac{1}{2} \{ f(2x+y) + f(-y) - 2f(x) \\
&\quad + f(2x-y) + f(y) - 2f(x) \\
&\quad - 2f(2x) - 2f(0) + 4f(x) \\
&\quad - 2f(x+y) - 2f(x-y) + 4f(x) \}
\end{aligned}$$

シカレ =

$$\begin{aligned}
f(2x+y) + f(2x-y) &= 2f(2x) + 2g(y) \\
f(x+y) + f(x-y) &= 2f(x) + 2g(y)
\end{aligned}$$

ナル故

$$\begin{aligned}
&g(x+y) + g(x-y) - 2g(x) - 2g(y) \\
&= \frac{1}{2} \{ f(y) + f(-y) - 2f(0) - 2g(y) \}
\end{aligned}$$

(F) = 於テ $x=0$ トオケル

$$f(y) + f(-y) - 2f(0) - 2g(y) = 0$$

$$\text{故} = g(x+y) + g(x-y) = 2g(x) + 2g(y)$$

$g(x)$ ハ可測ナル故、 a 7 任意ノ實數トスル

$$g(x) = ax^2$$

$$(F) = \text{ヨリ } f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) + 2ay^2$$

之ヨリ可測解 $f(x)$ 7 求ムル

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a, b, c \text{ ハ任意ノ實數})$$