# 960. 再ビ「既約行列系」ニ就テ

安倍　亮（東京帝大）

私ノ此ノ前ノ談話「行列系ノ既約性ト絶對既約性」（本誌第217号）ノ誤リヲ中山サンガ注意シテ下サイマシタ。「定理1」ハ全然誤リデス。証明ガ間違ッテ居ルバカリデナク、

定理1ノ内容自身が偽リデアルコトモ中山サンが例ヲ挙ゲテ教ヘテ下サイマシタ。従ッテ定理1ヲ使ッタ定理5ノ証明モ変ヘナケレバナリマセンが，此ノ定理ノ方ハ内容ニハ誤リがナク，独立ナ証明が簡単ニ出来マス。先ヅ其ヲ述ベマス。(§1)

次ニ定理1ハ定理4ノ逆定理ノ心算ダッタノデスが，先ヅ定理4及ビソノ逆ヲ必要トシタ問題ヲ述ベテ（§2）（ソレハムシロ前談話ノ前書トスベキモノデシタが），ソノ問題ノ解決ニ役立ツ様ニ，定理1ニ代ル条件ヲ出シマス。(§3,4,5) 餘リ奇麗ナ形ニナラズ，他ノ定理ノ方法ト首尾一貫シナクナリマスが，使ハウト思ッテ居タ目的ニハ大体十分ナコトが分リマス。(§6)

色々教ヘテ下サッタ中山サンニ御礼申上ゲマス。

§1. 先ヅ定理5ノ証明.

$K/P$ が有限次ナルトキ $K$ ノ上ノ（必ズシモ assoziativ デナイ）einfache lineare algebra $\mathfrak{M}/K$ ハ $P$ ノ上ノ algebra トシテモ einfach デアル。但シ $\mathfrak{M}\mathfrak{M} \neq (0)$（従ッテ $\mathfrak{M}\mathfrak{M} = \mathfrak{M}$）トスル。

証. $\mathfrak{m}$ ヲ $\mathfrak{M}$ ノ $P$-Ideal $\neq (0)$（$P$-Modul ナル両側 Ideal）トスル。$\mathfrak{m}K$ ハ $\mathfrak{M}$ ノ $K$-Ideal $\neq (0)$

$$\therefore\ \mathfrak{m}K = \mathfrak{M} \qquad \mathfrak{m} \supset \mathfrak{M}\mathfrak{m} = \mathfrak{M}K\cdot\mathfrak{m} = \mathfrak{M}\cdot\mathfrak{m}K = \mathfrak{M}\mathfrak{M} = \mathfrak{M} \qquad \therefore\ \mathfrak{m} = \mathfrak{M} \qquad q.e.d.$$

注意 $\mathfrak{M}\mathfrak{M} = 0$ ナラ定理ハ成立タナイ。

§2. 次ニ行列系ニ関スル定理4及ビ其逆ヲ必要トシタ問題ニ就テ説明スル。

$P$ノ上ノRadikalヲ持ッタLie環ノ構造トシテドンナモノガアルカヲ知ルノニ，$P$ノ上ノ準單純Lie環ノ$P$ニ於ケル表現ヲ知ルコトガ必要ニナッテクル。（本誌214号，可換ナRadikalヲ持ツLie環（I）156頁以下参照）少クトモ標數0ノトキニハソレハ$P$ニ於ケル既約表現ノ知識ニ還元サレル。所ガ閉体ニ於ケル既約表現ハCartan以来完全ニ知ラレテ居ル。ソノ知識カラ$P$ニ於ケル既約表現ノ知識ヲ少クトモ原則的ニハ導キ出シタイト云フノガ吾々ノ問題デアル。

然ルニ定理4ニヨレバ，$P$ニ於ケル既約表現$\vartheta'$ハ，アル有限次拡大$K/P$ニ於ケル絶対既約表現$\vartheta$カラ正規表現ニヨル置換ヘデ得ラレル。シタガッテ，既ニ知ラレテヰル閉体ニ於ケル既約表現$\vartheta^*$ヲtransformシテ適當ナ有限次$K/P$ニ於ケル絶對既約表現$\vartheta$ヲ得，ソコデ置換ヲスルコトニ依ッテ，$P$ニ於ケル既約表現ハ必ズ求メラレル筈デアル。

但シ勝手ナ有限次$K/P$ニオケル$\vartheta$ニ直シテモ（勿論直セタトシテ），ソレカラ$P$ニ於ケル既約表現ガ得ラレルカドウカハ分ラナイ。ソコデ定理4ノ逆ニ當ルモノガドウシテモ必要ニナッテ來ル。

例ヘバ$\vartheta$ガ$K, P$ノ中間体ニ於ケル表現ニモ直セル場合ニハ，$K$ニオケル表現トシテ$K/P$ノ正規表現デ置換ヘタノデハ$P$ニ於ケル既約表現ガ出來ナイコトハ前談話ノ第一節ニ述ベタ。即チ$K$ハソノ意味ノMinimalitätヲモタナケ

レバナラナイ。ソレガ逆ニ十分ダト主張シタノガ前談話ノ定理1デアッタ。

**§3.** 所ガ實ハソレダケデハ十分デナイコトヲ中山サンガ例ヲ擧ゲテ注意シテ下サッタ。ソノ一例ヲ次ニ引用サセテ戴ク。

$P$ ノ上ノ Index $j$ ノ normale Divisionsalgebra $\mathfrak{A}$ ヲトリ，ソノ minimal ナ Zerfällungskörper $K$ デ $n=(K:P)>j$ ナルモノヲトル。$\mathfrak{A}$ ノ $K$ ニ於ケル絶對既約表現ハ $K, P$ ノ中間体ニオケル表現ト同値ニハナラナイ [$\because$ モシ $K \neq \Omega \supset P$ ナル $\Omega$ ニオケル表現ト同値ダッタトスレバ，$\Omega$ ニオケル $\mathfrak{A}$ ノ絶對既約表現ガアルコトニナリ，從ッテ $\Omega$ ガ $\mathfrak{A}$ ノ Zerfällungskörper トナリ，$K$ ノ minimal ナコトニ反スル] 即チ定理1ノ假定ハ滿足サレテ居ル。コノ表現ハ $j$ 次ダカラ，$K/P$ ノ正規表現デ置換ヘレバ $P$ ニオケル $nj$ 次ノ表現ニナル。所ガ $\mathfrak{A}$ ノ $P$ ニオケル既約表現ハ正規表現デアッテ $j^2$ 次デアル。$nj>j^2$ ダカラ始メノ表現ハ既約デハアリ得ナイ。即チ定理1ノ終結ハ成立シナイ。

$\mathfrak{A}$ ノ Index $j$ ニ等シイ次數ノ Zerfällungskörper $K/P$ ヲトレバ表現次數ノ關係式 $nj=j^2$ ダケカラ既約表現ガ得ラレルコトガ分ル。而モ此ノ場合 $n=j$ ナル $K$ ヲドウトッテモ，ソレカラ得ラレル $P$ ニ於ケル既約表現ハ皆同値デアル。

**§4.** 上ノ例カラ直チニ想像サレルヤウニ，$K$ ノ次數ノ

條件ガ定理4ノ逆トシテ定理1ニ代ルベキモノヲ與ヘルコトヲ次ニ示サウト思フ。

但シ $\mathfrak{A}$ ニ當ルモノハ *associative algebra* ノ表現以外ノ場合（*associative* ノトキハ表現論ハ此処デ考ヘテ居ル問題ニ関スル限リ殆ンド *trivial*）ニハ，表現ノ *matrix* ノ基礎体ヲ係數トスル *enveloping associative algebra* カラ作ラレル。或ハ新談話ノ流儀ニ依レバソノ *commutator algebra*，即チ $\mathfrak{r}$－K－表現加群ノ $\mathfrak{r}$－P－加群トシテノ自己同型環Δヲ考ヘル所デアルガ、ソレハ $\mathfrak{r}$－K－加群ガ先ニ與ヘラレタトキニハ考ヘニクイ（環一Δヲ考ヘル位ナラ，ソレガ *Schiefkörper* カドウカト云フコトダケデPニオケル表現ガ既約カドウカト云フコトハ分ッテ了フ）ダカラ、イサヽカ方法ガ統一ヲ欠クケレドモ，*enveloping algebra* ヲ考ヘルコトニスル。

**§5.** $\mathfrak{r}$ ヲKニ於ケル絶對既約ナル $n$ 次行列系トシ，PヲKノ部分体トスル。（次ノ $\boxed{1}$，$\boxed{2}$ デハ K/P ハ必ズシモ有限次デナクテモヨイ）。$\mathfrak{r}$ ノ *enveloping associative* P-*algebra* ヲ $\mathfrak{A}$ トスル。即チ $\sum_i \rho_i S_{i,1} S_{i,2} \cdots\cdots S_{i,k_i}$（$\rho_i \in P$，$S_{i,j}$ ハ $\mathfrak{r}$ ノ行列）ノ全体ヲ $\mathfrak{A}$ トスル。$\mathfrak{A}K = K_n$ 猶 $\mathfrak{r}$ ハPニ関シ一次独立ナ行列ヲ有限個シカ含マズ，[＊)] 從ッテ（$\mathfrak{A}$：P）＝有限トスル。（勿論 K/P ガ

---

＊) $\mathfrak{r}$ ガ零行列シカ含マナイ場合，表現デ云ヘバ零表現ノバアヒハ除外スル。

有限次ナラ自然ニサウナル。又K/Pガ無限次デモ，例ヘバ$\gamma$ガPニ於ケル algebra 又ハ Lie algebra ノ表現デアルヤウナ場合ニモ勿論，Pニ關シ独立ナ行列ハ有限個シカナイ)

$\boxed{1}$ $\mathfrak{a}$ハ einfach ナ P-algebra デアル。

證. $\mathfrak{a}$ヲ$\mathfrak{a}$ノ両側 Ideal $\neq (0)$トセバ，$\mathfrak{a}K$ ( $\mathfrak{a}$ヲ Matrix ノ集合トシテ，ソレニKノ元ヲカケル) ハ $\mathfrak{a}K = K_n$ ノ Ideal $\therefore$ $\mathfrak{a}K = K_n$ $\therefore$ $\mathfrak{a}$ハ巾零デアリ得ナイ。從ッテ $\mathfrak{a}$ ハ準單純環。次ニ $\mathfrak{a} \neq (0)$ $\mathfrak{b} \neq (0)$ $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = (0)$ト假定スレバ，$(0) = \mathfrak{a}K \cdot \mathfrak{b}K = K_n \cdot K_n = K_n$ トナッテ矛盾。$\therefore$ $\mathfrak{a}$ハ單純環。 q. e. d.

$\boxed{2}$ $\mathfrak{a}$ノ Zentrum ヲZトセバ $P \subset Z \subset K$，且ツ $\mathfrak{a}_{K/Z} \cong K_n$ $\therefore$ $(\mathfrak{a} : Z) = n^2$

證. $\mathfrak{a}$ノ Zentrum Z ノ Matrix ハ $\mathfrak{a}K = K_n$ ノスベテノ Matrix ト可換ダカラ $\varkappa E_n$ ($\varkappa \in K$) ノ形。$\varkappa E_n = \varkappa$ ト書クコトニスレバ $P \subset Z \subset K$。又 $\mathfrak{a}K = K_n$ ハ $\mathfrak{a}_{K/Z}$ ( $\mathfrak{a}$ヲ抽象的ニZノ上ノ algebra ト考ヘテ，係數ヲKニ拡大シタモノ) ノ homomorph ナ Bild デ，而モ $\mathfrak{a}_{K/Z}$ ハ einfach ダカラ $\mathfrak{a}_{K/Z} \cong K_n$ $(\mathfrak{a} : Z) = n^2$

q. e. d.

$\mathfrak{a} \cong \Delta_m$ $\Delta$: Divisionsalgebra. $\Delta$ノ Index ヲ$j$トスレバ $n = mj$. 又 $(Z : P) = g$トスル。以上ノ記号ヲ使ッテ：

$\boxed{3}$ K/P ハ有限次トスル。Kニ於ケル絶對既約行列系

$\gamma$ ニ於テ K ノ元ヲ $K/P$ ノ正規表現デ置換ヘタモノヲ $\gamma'$ トスル。$\gamma'$ ガ既約ナル必要十分條件ハ $(K:Z)=j=[\mathfrak{a}/Z$ ノ Index$]$ ナルコトデアル。或ハ K ガ $\mathfrak{a}\cong\Delta_m$ ナル $\Delta$ ニ maximaler Teilkörper トシテ含マレルト云ッテモヨイ。

證. $\gamma$ ハ $n$ 次ダカラ, $\gamma'$ ハ $n(K:P)=n(K:Z)z$ 次デアル。$\gamma'$ ハ $\mathfrak{a}$ ノ P ニオケル表現ニ拡張サレル。夫ガ既約ナ條件ヲ求メレバヨイ。所ガ $\mathfrak{a}$ ノ P ニオケル既約表現ハ, $\mathfrak{a}$ ノ minimales Linksideal $\mathfrak{l}$ デ vermitteln サレ, $(\mathfrak{l}:P)=(\mathfrak{a}:P)/m=nj^2z=nj z$ ダカラ $njz$ 次デアル。$\therefore$ $\gamma'$ ガ既約ナ條件ハ, 之レト次數ガ等シイコト, 即チ $n(K:Z)z=njz$, $(K:Z)=j$ ナルコトデアル。且ツ $\boxed{2}$ ニヨリ K ハ $\mathfrak{a}/Z$ ノ従ッテ $\Delta/Z$ ノ Zerfällungskörper ダカラ, K ガ $\Delta$ ノ最大可換部分体トシテ含マレルコトデアルトモ云ヘル。

q. e. d.

§6. §2 ノ問題ハ §5 ノ結果ヲ使ッテ原則的ニハ解決スル。

A ヲ P ノ上ノ閉体トシテ, A ニ於ケル既約行列系 $\gamma^*$ ガ與ヘラレタトスル。$\boxed{1}$, $\boxed{2}$ ノ K ヲ A ト考ヘテ $\gamma^*$ ノ enveloping algebra $\mathfrak{a}^*$ ヲ作レバ, $\mathfrak{a}^*$ ハ単純環デ $\boxed{2}$ ノ性質ヲモツ。$\mathfrak{a}^*\cong\Delta^*_m$ ナル Divisionsalgebra $\Delta^*$ ノ一ツノ最大可換部分体 K ヲトレバ, $\mathfrak{a}^*$ ハ K デ絶対既約ナ表現ヲモツカラ, $\gamma^*$ ハ適當ニ transform シテ K

ニ於ケル（絶對既約ナ）行列系 $\mathfrak{r}$ ニデキル。$\mathfrak{r}$ ノ enveloping P-algebra $\mathfrak{A}$ ハ勿論 $\mathfrak{A}^*$ ト同型デ，從ツテ $\mathfrak{A} \cong \Delta^*_m$．K ハ $\Delta^*$ ノ最大可換部分体ダカラ $\boxed{3}$ ノ條件ガ滿サレ，從ツテ $\mathfrak{r}$ ノ matrix ノ元ヲ K/P ノ正規表現デオキカヘテ出來ル P ニ於ケル行列系 $\mathfrak{r}'$ ハ既約デアル。又カラヤッテ，P ニオケル既約行列系ガ必ズ A ニオケル或ル既約行列系カラ得ラレルコトモ保証サレテ居ル。

從來ノ行掛リヲ離レテ，K ニ關係ナク云ヒ表ハセバ，$\mathfrak{r}^*(\rightarrow \mathfrak{r}) \rightarrow \mathfrak{r}'$ ト移ルノハ結局，$\mathfrak{r}^*: S \rightarrow a(S) \in \mathfrak{A}^*$ カラ $\mathfrak{r}': S \longrightarrow D(a(S))$ ニ移ルコトデアル。但シ $a \longrightarrow D(a)$ ハ $\mathfrak{A}^*$ ノ P ニ於ケル既約表現デアル。精シク云ヘバ $a(S)$ ヲ先ヅ $\Delta^*_m$ ノ matrix トシテ書キ，$\Delta^*$ ノ元ヲ $\Delta^*/P$ ノ正規表現デ置換ヘテ出來タモノガ $D(a(S))$ デアル。從ツテ $\mathfrak{r}'$ ハ中間ニトッタ K ニハ關係ナク $\mathfrak{r}^*$ カラ決ルモノデアル。即チ

$\boxed{4}$ P ニ於ケル既約行列系 $\mathfrak{r}'$ ハ前談話ノ定理 4 ニヨリアル K/P ニオケル絶対既約ナ $\mathfrak{r}$ カラ置換ニヨッテ得ラレルノデアルガ，$\mathfrak{r}$ ヲ閉体ニオケル表現トシテ $\mathfrak{r}^*$ トスレバ，$\mathfrak{r}^*$ ニ上ノ意味デ對應スル $\mathfrak{r}'$ ハ唯一ツデアル。

例ヘバ，P ノ上ノ（準單純）Lie 環，P ノ上ノ algebra，有限群ナドノ A ニオケル既約表現 $\vartheta^*$ カラ，上ノ關係ニアル P ニ於ケル既約表現 $\vartheta'$ ガ唯一ツ得ラレル。（閉体ニ於ケル一ツノ單純環又ハ單純 Lie 環カラ P ニオケル單純環又ハ單純 Lie 環ガ多數得ラレルノニ相當スル樣ナコトハナ

イ。「可換ナ *Radikal* ヲ持ツ *Lie* 環」(I) p.158 ノ上ノ方デ環ノ分類ヨリ、表現ノ分類ノ方ガ難シイダラウト書イタノハ考ヘ違ヒデアッタ)

容易ニ分ルヤウニ($\mathfrak{A}^*$ ノ *Zentrum* ガ P ノ *separabel* ナ拡大ノトキニハ)$\vartheta^*$ ハ $\vartheta'_A$ ノ成分トシテ $j$ 重ニ含マレル。而モ $\vartheta^*$ ノ z ケノ共軛表現 $\vartheta^* = \vartheta^{(1)}, \vartheta^{(2)}, \cdots\cdots, \vartheta^{(2)}$ ガ夫々 $j$ ケヅツ $\vartheta'_A$ ニ含マレル。$\vartheta^{(2)}, \cdots\cdots, \vartheta^{(2)}$ カラモ上ノ手続ニ依ッテ同ジ $\vartheta'$ ガ生ズル。即チ一般ニ A ニ於ケル表現ヨリモ P ニ於ケル表現ノ方ガ却ッテ少クナル。

尤モ問題ガ解決シタト云ッテモ飽クマデ原則ダケデアッテ、実際ニ P ニ於ケル表現ヲ求メヨウトシテモ、*enveloping algebra* $\mathfrak{A}^*$ ヲ $\Delta^*_m$ ノ形ニ *explicit* ニアラハスノガ困難ナノデ、個々ノ場合ニハ却々ウマク行カナイ。

§17. 前談話 p.264 ノ二行目ニ、*Jacobson* ノ定理6ノ証明ガ「妙ダ」ト書キマシタガ取消シマス。中山サンノ注意シテ下サッタ通リ、アレハアレデ正シイノデシタ。

—— 以 上 ——