969 指數函數及ビ一次函數ニツキテ

春木　博（神戸高等商船）

§1. 普通函數論ニ於テ指數函數 e^z ハ巾級數 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ ニ

ニヨッテ定義サレル。

又，原点ノ近傍ニ於テ正則ナル函数 $f(z)$ ガ微分方程式 $\dfrac{df(z)}{dz}=f(z)$ ヲ満足シ、初期條件 $f(0)=1$ ヲ有スルナラバ $f(z)$ ハ e^z ニカギル。更ニ原点ノ近傍ニ於テ常数ナラザル正則函数 $f(z)$ ガ函数方程式 $f(z_1+z_2)=f(z_1)f(z_2)$ ヲ満足シ、初期條件 $f(0)=1$ ヲ有スルナラバ $f(z)$ ハ e^z ニカギル。

次ニ　幾何學的ナ方法ニヨリ指数函数 e^z ヲ特徴付ケテ見ヨウ。先ヅ定義ヨリ始メル。

（定義）　領域 D デ正則ナル函数（定義ガケナラバ、正則ナラズトモ差シ支ヘナイガ、コヽデハ應用上、正則ナリトスル）ヲ $f(z)$ トスルトキ $(z=x+iy)$．D ノ各点 z ニ對應シテ、三次元空間ノ点 $(x, y, |f(z)|^2)$ ノスベテノ集合ヲ D ニ於テノ $f(z)$ ニヨル Betragfläche ト云フ。（G. Pòlya und G. Szegö, aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis I. 110P.）

シカラバ定理ハ次ノ如キ形ニ述ベラレル。

（定理）　原点ノ近傍 U ニ於テ一價正則ナル函数 $f(z)$ ガ恒等的ニ e^z ニ等シキタメノ必要且ツ充分條件ハ $f(0)=f'(0)=f''(0)=1$ ニシテ、U ニ於ケル $f(z)$ ニヨル Betragfläche ノ各点ガ抛物点トナルコトデアル。

（証明）　先ヅ Betragfläche 上ノ任意ノ点 $(x, y, |f(z)|^2)$ ニ於ケルガウスノ曲率 K ガ

$$K = \frac{4(|f'(z)|^4 - |f(z)|^2|f''(z)|^2}{(1+4|f(z)|^2|f'(z)|^2)^2}$$

デアラハサレルコトヲ証明シヨウ。

Betragfläche ハ三次元空間 (ξ, η, ζ) ニ於テ x, y ヲ媒介変数トスレバ

$$(A) \quad \begin{cases} \xi = x \\ \eta = y \\ \zeta = u^2(x, y) + v^2(x, y) \end{cases}$$

ニテ表サレル。但シ $z = x + iy$, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ナリトスル。

シカラバ微分幾何學ニ於ケル曲面ノ第一種ノ基礎量ヲ E, F, G トスレバ

$$E = \xi_x^2 + \eta_x^2 + \zeta_x^2$$

$$F = \xi_x \xi_y + \eta_x \eta_y + \zeta_x \zeta_y$$

$$G = \xi_y^2 + \eta_y^2 + \zeta_y^2$$

E, F, G ヲ (A) ナル関係ヲ使ツテ計算スレバ

$$(B) \quad \begin{cases} E = 1 + \left(\dfrac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^2 \\ F = \dfrac{\partial \zeta}{\partial x} \dfrac{\partial \zeta}{\partial y} \\ G = 1 + \left(\dfrac{\partial \zeta}{\partial y}\right)^2 \end{cases}$$

次ニ，第二種ノ基礎量ヲ D. D′, D″ トスレバ

$$D' = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}} \begin{vmatrix} \xi_{xx} & \xi_x & \xi_y \\ \eta_{xx} & \eta_x & \eta_y \\ \zeta_{xx} & \zeta_x & \zeta_y \end{vmatrix}$$

$$D' = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}} \begin{vmatrix} \xi_{xy} & \xi_x & \xi_y \\ \eta_{xy} & \eta_x & \eta_y \\ \zeta_{xy} & \zeta_x & \zeta_y \end{vmatrix}$$

$$D'' = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}} \begin{vmatrix} \xi_{yy} & \xi_x & \xi_y \\ \eta_{yy} & \eta_x & \eta_y \\ \zeta_{yy} & \zeta_x & \zeta_y \end{vmatrix}$$

D, D', D'' ヲ (A) ナル関係ヲ使ッテ計算スレバ

$$(C) \quad \begin{cases} D = \dfrac{1}{\sqrt{EG-F^2}} \dfrac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \\[2ex] D' = \dfrac{1}{\sqrt{EG-F^2}} \dfrac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \\[2ex] D'' = \dfrac{1}{\sqrt{EG-F^2}} \dfrac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \end{cases}$$

シカシテ点 (ξ, η, ζ) ニ於ケル主曲率半径ヲ R_1, R_2 トシ、がうすノ曲率ヲ K トスレバ $K = \dfrac{1}{R_1 R_2}$ デアル。

コヽニ, R_1, R_2 ハ次ノ R ニ関スル二次方程式ノ二根デアル。

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{R}E - D & \frac{1}{R}F - D' \\ \frac{1}{R}F - D' & \frac{1}{R}G - D'' \end{vmatrix} = 0$$

故ニ $$K = \frac{1}{R_1 R_2} = \frac{DD'' - D'^2}{EG - F^2} \quad \cdots\cdots\cdots (1)$$

(1) ニヨリ K ヲ計算スルニ

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = 2\left[u_x^2 + v_x^2 + u u_{xx} + v v_{xy}\right] \quad \cdots\cdots (2)$$

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} = 2\left[u_x u_y + v_x v_y + u u_{xy} + v v_{xy}\right]$$

$f(z)$ ハ正則函数ナル故 Cauchy-Riemann ノ関係式ニヨリ

$$u_x = v_y$$
$$u_y = -v_x$$

故ニ $$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} = 2\left[-u v_{xx} + v u_{xx}\right] \quad \cdots\cdots\cdots (3)$$

同様ニシテ，Cauchy-Riemann ノ関係式ヲ用ヰテ

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} = 2\left[u_x^2 + v_x^2 - u u_{xx} - v v_{xx}\right] \quad \cdots\cdots (4)$$

(2), (3), (4) 及ビ (C) ニヨリ

$$\begin{aligned} DD'' - D'^2 &= 4\left\{(u_x^2 + v_x^2)^2 - (u^2+v^2)(u_{xx}^2 + v_{xx}^2)\right\} \\ &= 4\left\{|f'(z)|^4 - |f(z)|^2 |f''(z)|^2\right\} \end{aligned}$$

$\cdots\cdots (5)$

同様ニシテ $(EG-F^2)^2=(1+4|f(z)|^2|f'(z)|^2)^2$

(實ハコノ部分ノ計算ノミハ問題ノ本質ニハ必要ナイ) -- (6)

(5), (6) ヲ (1) ヘ代入スレバ

$$K=\frac{4\{|f'(z)|^4-|f(z)|^2|f''(z)|^2\}}{(1+4|f(z)|^2|f'(z)|^2)^2}$$

サテ以上ヲ準備トシテ先ヅ必要條件ノ方ヲ証明シヨウ。

$f(z)=e^z$ ナラバ，勿論

$$f(0)=f'(0)=f''(0)=1$$

又 $f(z)=f'(z)=f''(z)$ ナル故

$$K=0$$

故ニ ∇ ニ於ケル $f(z)$ ニヨル Betragfläche ノスベテノ点ハ抛物点デアル。

次ニ充分ナルコトヲ証明シヨウ。

$K=0$ ナラバ

$$|f'(z)|^2=|f(z)||f''(z)|$$

$f(0)=f''(0)=1$ ナル故、原点ノ適當ナ近傍デハ

$$|f(z)||f''(z)|\neq 0$$

故ニ，原点ノ適當ナ近傍デハ

$$\left|\frac{f'(z)^2}{f(z)f''(z)}\right|=1$$

故ニ，正則函数ノ性質ニヨリ原点ノ適當ナ近傍デハ θ ヲ實常數トスルトキ

$$\frac{f'^2(z)}{f(z)f''(z)} = e^{i\theta}$$

$f(0) = f'(0) = f''(0) = 1$ ナル故

$$e^{i\theta} = 1$$

即チ $\qquad \dfrac{f'^2(z)}{f(z)f''(z)} =$

コノ二階常微分方程式ヲ $f(0) = f'(0) = 1$ ナル初期條件ノ下ニトケバ

$$f(z) = e^z$$

§2. 函數論ニ於テ一次函數

$$\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta} \quad (\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0)$$

ハ重大ナル役割ヲ演ズルガ、ソノ一ツノ理由トシテ「正則函數 $f(z)$ ガ一次函數トナルタメノ必要且ツ充分ナル條件ハ z 平面上ノ一ツノ円ノ内部ヲ w 平面上ノ一ツノ円ノ内部ニ一對一ニ且ツ等角ニ對應セシムルコトデアル」ト云フ定理ニアルト云ヘヨウ。

今卵形線ノ初等的定理ヲ使用シテ一次函數ヲ特徴付ケテ見ヨウ。

ソノ定理トハ

卵形線ノ周囲 L ト面積 F トノ間ニハ $L^2 \geqq 4\pi F$ ナル不等式ガ成リ立チ、等号ガ成立スルノハ円ノ時ニ限ル。

デアル。

シカラバ定理ハ次ノ如ク述ベラレル。

(定理) $|z|<R$ デ正則ナル函数 $f(z)$ ガ恒等的ニ、一次函数ニ等シキタメノ必要且ツ充分ナル條件ハ $|z|<R$ ニテ $R\left\{z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right\} \neq -1$ ニシテ且ツ任意ノ r ニ對シ

$$\left(\int_{|z|=r}|f'(z)|dz\right)^2 = 4\pi\iint_{|z|\leqq r}|f'(z)|^2 dz$$

ガ成リ立ツコトデアル。

(証明) 必要ナルコトハ明カデアル。

充分ナルコトヲ証明スル。$R\left\{z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right\} \neq -1$ ナル故 $|z|=r<R$ ノ $f(z)$ ニヨル寫像曲線ハ卵形線デアル。即チ $f(z)$ ニヨル寫像ハ凸型寫像デアルカラ $|z|<R$ ニテ単葉デアル，シカモ寫像曲線ノ周囲、面積ハ夫々

$$\int_{|z|=r}|f'(z)|dz,\quad \iint_{|z|\leqq r}|f'(z)|^2 dz$$

デ與ヘラレルカラ、上記ノ Lemma ニヨリ寫像曲線ハ円トナル。

故ニ $f(z)$ ハ一次函数デアル。

——(完)——