971 單葉函數ニツキテ

春木　博（神戸高等商船）

（定理1）　$f(z)=z+a_2z^2+\cdots\cdots$ ガ $|z|<1$ デ正則デ且ツ $a|z|\leqq|f(z)|\leqq b$（當然 $0<a\leqq b$ ナリトスル）ナラバ $f(z)$ ハ $|z|<\mathrm{Max}\left(\frac{a}{b},\ b-\sqrt{b^2-1}\right)$ ニテ星型單葉デアル。

（證明）　$\varphi(z)=\frac{f(z)}{z}$ トオケバ Schwarz ノ Lemma ニヨリ

$$|\varphi(z)|\leqq b$$

有界函數ノ性質ニヨリ

$$|\varphi'(z)|\leqq\frac{b^2-|\varphi(z)|^2}{b(1-|z|^2)}$$

$a|z|\leqq|f(z)|$ ナル故　$|\varphi(z)|\geqq a$

故ニ
$$\left|z\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}\right|\leqq\frac{(b^2-a^2)|z|}{ab(1-|z|^2)}$$

$|z|<\frac{a}{b}$ ナラバ上式ノ右辺ハ1ヨリ小ナル故

$|z|<\frac{a}{b}$ ナル z ニ對シ　$\left|z\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}\right|<1$

即チ
$$\left|z\frac{f'(z)}{f(z)}-1\right|<1$$

故ニ $|z|<\frac{a}{b}$ ナル z ニ對シ $R\left\{z\frac{f'(z)}{f(z)}\right\}>0$

故ニ $f(z)$ ハ $|z|<\frac{a}{b}$ ニ於テ星型單葉トナル。Dieudonné

ノ定理トアハセテ上ノ定理ヲ得ル。

(例) $f(z)=z+\frac{1}{8}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n-2}}=\frac{z(8-3z)}{4(2-z)}$

$$|f(z)|\leqq 1+\frac{1}{8}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^{n-2}}=\frac{5}{4}\ \text{ナル故}\ b=\frac{5}{4}$$

一方 $|f(z)|\geqq|z|-\frac{1}{8}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{|z|^n}{2^{n-2}}\geqq\frac{3}{4}|z|$ ナル故 $a=\frac{3}{4}$

故ニ $\quad\frac{a}{b}=\frac{3}{5},\ b-\sqrt{b^2-1}=\frac{1}{2}$

即チ $f(z)$ ハ $|z|<\frac{3}{5}$ デタシカニ星型単葉ナルコトガ判ル。

(定理2) $f(z)=a_0+a_1z+\cdots\cdots+a_nz^n+\cdots\cdots$

ハ $|z|\leqq\rho(>1)$ デ正則デ

$\underset{|z|=\rho}{Max}\left|f(z)-\sum_{k=0}^{n}a_kz^k\right|=M,\ K=\underset{2\leqq k\leqq n}{Max}|a_k|$ トスルトキ

モシモ $|a_1|>\frac{(n-1)(n+2)}{2}K+\frac{\rho}{(\rho-1)^2}M$ ナラシムル n ガ

存在スレバ $f(z)$ ハ $|z|\leqq 1$ デ単葉デアル。

(証明) a,b ヲ $|a|\leqq 1,\ |b|\leqq 1,\ a\neq b$ ナル任意ノ複素数トスレバ Cauchy ノ積分表示ニヨリ

$p(z)=\sum_{k=0}^{n}a_kz^k$ トオクトキ

$$f(b)-p(b)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\rho}\frac{f(z)-p(z)}{z-b}dz$$

$$f(a)-p(a)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\rho}\frac{f(z)-p(z)}{z-a}\,dz$$

辺々相減ズルコトニヨリ

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{p(b)-p(a)}{b-a}+\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\rho}\frac{f(z)-p(z)}{(z-a)(z-b)}\,dz$$

故ニ
$$\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|\geqq\left|\frac{p(b)-p(a)}{b-a}\right|-\frac{1}{2\pi}\left|\int_{|z|=\rho}\frac{f(z)-p(z)}{(z-a)(z-b)}\,dz\right|$$

然ルニ
$$\frac{p(b)-p(a)}{b-a}=a_1+a_2(b+a)+a_3(b^2+ba+a^2)$$
$$+\cdots\cdots+a_n(b^{n-1}+b^{n-1}a+\cdots\cdots+a^{n-1})$$

ナル故 $|a|\leqq 1$, $|b|\leqq 1$ ニ注意シテ

$$\left|\frac{p(b)-p(a)}{b-a}\right|\geqq|a_1|-|a_2||b+a|-|a_3||b^2+ba+a^2|$$
$$-\cdots\cdots-|a_n||b^{n-1}+\cdots\cdots+a^{n-1}|$$
$$\geqq|a_1|-K(2+3+\cdots\cdots+n)$$
$$=|a_1|-\frac{(n-1)(n+2)}{2}K$$

又
$$\frac{1}{2\pi}\left|\int_{z=\rho}\frac{f(z)-p(z)}{(z-a)(z-b)}\,dz\right|\leqq\frac{\rho}{(\rho-1)^2}M$$

ナル故

$$\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|\geqq|a_1|-\frac{(n-1)(n+2)}{2}K-\frac{\rho}{(\rho-1)^2}M>0$$

a, b ハ任意デアッタカラ $f(z)$ ハ $|z|\leqq 1$ デ単葉デアル。

（定理3）實係數ヲ有スル多項式 $f(z)=z+a_2z^2+\cdots$

$\cdots\cdots + a_n Z^n$ ハ $|z|<\rho$ デ単葉デアル。茲ニ ρ ハ $n-1$ 次ノ代数方程式

$$n x^{n-1} + (n-1)x^{n-2} + \cdots\cdots + 3x^2 + 2x - \frac{1}{K} = 0$$

ノ正根ナリトスル。$\left[K = \underset{2 \leqq k \leqq n}{Max} |a_k| \right]$

(証明)　$f'(z) = 1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + \cdots\cdots + n a_n z^{n-1}$

$z = r\cos\theta$ トスレバ

$$R\{f'(z)\} = 1 + 2a_2 r\cos\theta + 3a_3 r^2 \cos 2\theta + \cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots + n a_n r^{n-1} \cos(n-1)\theta$$

故ニ　$|R\{f'(z)\}| \geqq 1 - K(2r + 3r^2 + \cdots\cdots + n r^{n-1})$

右辺ヲ0トオイタ代数方程式ハタダ一ツノ正根 ρ ヲ有スル故 $r<\rho$ ナラバ

$$|R\{f'(z)\}| > 0$$

故ニ能代氏ノ定理ニヨリ凸状領域 $|z|<\rho$ ニテ $f(z)$ ハ単葉トナル。

(定理4)　$f(z) = z + a_2 z^2 + \cdots\cdots$ ガ $|z|<1$ デ単葉ニシテ $|f(z)|<M$ ナラバ　$|2 + a_2 M| \leqq 2M$

(証明)　$g(z) = \dfrac{f(z)}{\{f(z)-M\}^2}$ ハ容易ナル計算ニヨリ $|z|<1$ デ正則単葉ナルコトガ判ル。$g(z)$ ヲ展開スレバ

$$g(z) = \frac{1}{M^2} z + \frac{2 + a_2 M}{M^3} z^2 + \cdots\cdots$$

Bieberbach ノ評価ニヨリ

$$\left| \frac{2 + a_2 M}{M} \right| \leqq 2$$

即チ　　$|2+a_2M| \leqq 2M$

(完)　$g(z)=\dfrac{1}{f(z)-M}$ トシテ．上述ノ論法ヲ用フレバ

$$|1+a_2M| \leqq 2M$$

ヲ得ル。又 $|a_2M| \leqq 2M$ ナル故、a_2M ハ三ツノ等円

$|z+2| \leqq 2M$, $|z+1| \leqq 2M$, $|z| \leqq 2M$ ノ共通開領域 D ノ

中ニアル。従ツテ a_2 ハ D ヲ、原点ヲ相似ノ中心トシテ $\dfrac{1}{M}$

ナル相似比ヲモツ開領域 D^* ノ中ニアルコトガ判ル。

―― (完) ――