972. アルキメデス的 vector lattice の表現

吉田　耕作（阪大）

前ニ（談話912）ニ於テ「単位ヲ有スル vector lattice」ノ代数的表現ヲ與ヘ、之レヲ用ヒテ角谷-Krein ノ定理「bicompact ナ空間ノ上ノ実数値連続函数ノ全体ノ特徴付ケ」ノ別証明ヲ與ヘタ。次イデ中野氏（談話917）ハ Freudenthal 流ノ方法ヲ巧ミニ用ヒテ「単位ノナイ σ-complete ナ vector lattice」ノ表現ヲ考ヘラレタ。ソコデ筆者ノ方法ヲ調ベ直シテ見ルト「単位ノナイ場合」モ代数的表現ガ可能デ（然モ σ-complete ノ假定不要）「locally bicompact ナ空間ノ上ノ實数値連続函数ノ全体ノ特徴付ケ」ニ導カレル様ニ思ハレマス。

<u>Vector lattice</u> E. 實数ヲ係数トスル線状空間Eニ "non-negativeness" $f \geqq 0$ ガ定義サレ

i) $f \geqq 0,\ \alpha \geqq 0$ ナラ $\alpha f \geqq 0$

ii) $f \geqq 0,\ -f \geqq 0$ ナラ $f = 0$

iii) $f \geqq 0,\ g \geqq 0$ ナラ $f + g \geqq 0$

iv) $f \geqq g$. $(f - g \geqq 0)$ ナル semi-order ニヨリ E ハ lattice, 即チ $\sup(f, 0) = f \vee 0 = f^{+}$ ガ凡テノ $f \in E$ ニ對シ存在ス。

$\lim_{n \to \infty} \alpha_n = \alpha$ ナラ $\lim_{n \to \infty} \alpha_n f = \alpha f$

(order topology デ)

が満足サレテルトスル。例ノ如ク $f^- = \inf(f, 0) = \sup(-f, 0)$, $|f| = f^+ - f^-$ ト置ク。

<u>補助定理1.</u>　E ノ linear subspace N ニヨル linear-congruence $\equiv$ ガ lattice-congruence ニモナッテル: $f \equiv f'$, $g \equiv g'$ ナラ $f \overset{\vee}{\wedge} g \equiv f' \overset{\vee}{\wedge} g'$, 為ノ必充條件ハ N ガイデヤル: $x \in N$ 且ツ $|y| \leqq |x|$ ナラ $y \in N$, ナコトデアル。[1]

偖テ上ノ補助定理ヲ利用シテ任意ノ $a > 0$ ヲ標準ニシテ E ヲ表現シタイ。$a \wedge |b| = 0$ ナル如キ b ノ全体 N ナイデヤルニナルカラ E/N ハ又 i)—v) ヲ満足スル. E/N ヲ表現スルコトニスル。即チ E ニ於テ $a \wedge |b| = 0$ ナル $b = 0$ ト假定シテ E ヲ表現スル[2]

<u>補助定理2.</u>　$b > 0$ 且ツ $E \neq \{\lambda b\}$, $-\infty < \lambda < \infty$. ナラ b ヲ含マナイ maximal ideal N ガ存在スル. コヽニ N ガ maximal ト云フノハ $N \neq E$, 0 即チ N ハ non-trivial ナイデヤルニシテ且ツ N 以外ニハ N ヲ含ム non-trivial ナイデヤルノ存在シナイコトヲ意味スル。

<u>証明</u>　假定カラ b ヲ含マナイ non-trivial ナイデヤル N_0 ノ存在ヲ云ヘレバヨイ。之レガ云ヘレバ.

---

(1) G. Birkhoff: Lattice Theory, p.109

(2) a ハ Freudenthal ノ意味ノ unit ニハナッテル.

maximal ナモノノ存在ハ *transfinite induction*.

$E \neq \{\lambda b\}$ ダカラ $\bar{a} > 0$ ガ存在シテ全テノ α ニ對シテ $b - \alpha\bar{a} \neq 0$ トナル。

α ヲ適當ニトルト

(1) $(b - \alpha\bar{a})^+ \neq 0, \quad (b - \alpha\bar{a})^- \neq 0$

トナル。

以下其ノ証明。 $b - \alpha\bar{a} \neq 0$ カラ $(b - \alpha\bar{a})^+$, $(b - \alpha\bar{a})^-$ ノ何レカハ $\neq 0$. 今 $(b - \alpha\bar{a})^+ \neq 0$, $(b - \alpha\bar{a})^- = 0$ 即チ $b > \alpha\bar{a}$ トスル。 V) ガアルカラ全テノ β ニ対シテ $b \geqq \beta\bar{a}$ トハナラナイ。即チ或ル β (當然 $> \alpha$) ニ対シテ $(b - \beta\bar{a})^- \neq 0$. コノトキ $(b - \beta\bar{a})^+ \neq 0$ ナラ文句ナイカラ $(b - \beta\bar{a})^+ = 0$ 即チ $b < \beta\bar{a}$ トスル: $\beta\bar{a} > b > \alpha\bar{a}$. 斯ル β ノ inf ヲ β', α ノ sup ヲ α' ト置クト V) カラ $\beta'\bar{a} > b > \alpha'\bar{a}$, $\beta' > \alpha'$. 然シテ $\beta' > \alpha > \alpha'$ ナラ $(b - \alpha\bar{a})^+ \neq 0$, $(b - \alpha\bar{a})^- \neq 0$.

— 以上 —

備テ $(b - \alpha\bar{a})^+ \wedge \{-(b - \alpha\bar{a})^-\} = 0$ ダカラ non-trivial ナイデヤル $N_{0,1} = \mathop{E}_{x}\{|x| \leqq \eta(b - \alpha\bar{a})^+\}$, $N_{0,2} = \mathop{E}_{x}\{|x| \leqq \eta(b - \alpha\bar{a})^-\}$ ノ双方ガ b ヲ含ムコトハナイ。 b ヲ含マナイ方ヲ N_0 トスレバヨイ。

— 以上 —

<u>E ノ表現</u>　a ヲ含マナイ *maximal* イデヤル N 全体ヲ $\mathfrak{N}_a$ トスル. 補助定理 2 ニヨリ $N \in \mathfrak{N}_a$ ナラ

任意ノ b ニ對シ $b \equiv \lambda a \pmod{N}$. 即チ任意ノ b ニ對シ $\mathfrak{N}_a$ ノ上デ定義サレタ函數 $\lambda = b(N) = \left\{\frac{b}{a}, N\right\}$（中野氏記法）ガ定義サレル. linearlattice-homomorphism $b \rightarrow b(N)$ ハ $a(N) \equiv 1$（恒等的ニ）デアリ且ツ isomorphism デアル。

何者 $b \neq 0$ ナラ $|b| \wedge a \neq 0$.

從ツテ $\mathfrak{N}_a \ni N \ni |b| \wedge a$ ニ對シテ $b(N) \neq 0$

<u>Topology</u>. $\mathfrak{N}_a$ ニ weak topology ヲ入レル. $N_0 \in \mathfrak{N}_a$ ノ $\mathfrak{N}_a$ ニ於ケル近傍ヲ

$\underset{N}{\mathcal{E}}\{|f_i(N) - f_i(N_0)| < \varepsilon_i;\ f_i \in E;\ i = 1, 2, \cdots, n\}$

デ定義スルト $\mathfrak{N}_a$ ハ locally bicompact ニナル（Tychonoff ノ定理）. 然シテ各 $b(N)$ ハ $\mathfrak{N}_a$ デ continuous. $\{b(N)\}$, $b \in E$, ハ l. bicompact ナ $\mathfrak{N}_a$ デ continuous ナ函數ノ全体ノ中デ次ノ意味デ dense デアル。即チ $\mathfrak{N}_a$ ノ任意ノ bicompact ナ部分集合 $\mathfrak{M}$ ヲトルト $\mathfrak{M}$ デ連續ナ任意ノ函數 $C(N)$ ト $\varepsilon > 0$ ニ對シテ $\sup\limits_{N \in \mathfrak{M}} |b(N) - C(N)| \leq \varepsilon$ ナル如キ $b \in E$ ガ存在スル。

證明ハ $\mathfrak{M}$ ノ任意ノ二点 $N_1 \neq N_2$ ニ對シ $d(N_1) = 1$, $d(N_2) = 0$ ナル如キ $c \in E$ ハ明カニ存在スルカラ Krein ノ補助定理（談話912）カラ得ラレル。