974. 可換ナRadikalヲ持ツLie環（III）

安倍　亮（東大）

無限小自己同型

表題ノ談話（I）ニ於テハ先ヅ可換ナRadikalヲ持ツLie環ノ構造ヲ決定シ，次ニソノ自己同型ヲ決定シタ。（II）ニ於テハ其等ニ必要ナ手段トシテ準単純Lie環ノ表現ト自己同型トノ間ノ関係ヲ論ジタ。

扨テ（I）ニ於テ此様ナLie環ニツイテ先ヅ自己同型ヲ考ヘタノハ，一ツニハLeviノ分解 $\mathfrak{L} = \mathfrak{r} + \mathfrak{s}$（$\mathfrak{r}$: Radikal, $\mathfrak{s}$: halb-einfach）ガ自己同型ヲ除イテ一意的ナリヤ否ヤノ考察ノ延長デアッタガ，更ニ次ノ様

ナ意味モアッタノデアル。$\mathfrak{R}$ ノ係數体ガ實數体ヤ複素數体ノバアヒニハ, Lie ノ理論ニヨッテ $\mathfrak{R}$ ニ對應スル im großen ノ Lie 群 $\mathfrak{G}$ ガ直チニ考ヘラレルガ, 係數体ガ一般ノバアヒニハ $\mathfrak{G}$ ノ様ナモノハ考ヘラレナイ。併シ $\mathfrak{R}$ ガ halbeinfach ナトキニハ $\mathfrak{R}$ ノ自己同型置換ノ群 $\mathfrak{A}$ ガ $\mathfrak{G}$ ノ代用ニナル。實際ハ $\mathfrak{A}$ ハムシロ, $\mathfrak{R}$ ノ無限小自己同型 (infinitesimal automorphism 或ハ簡單ニ Derivation)

$$D:\ D(x\circ y) = Dx\circ y + x\circ Dy,$$

$$x, y \in \mathfrak{R},\quad \alpha, \beta \in P.$$

$$D(\alpha x + \beta y) = \alpha Dx + \beta Dy$$

ノ作ル Lie 環 $\mathfrak{d}$ ニ對應スル「Lie」群トモ云フベキモノデアリ, 事実 P ガ perfekt bewertete Körper ノトキハ Lie 理論ノ意味デ $\mathfrak{A}$ ガ $\mathfrak{d}$ ニ對應スル。所ガ $\mathfrak{R}$ ガ halbeinfach ナバアヒニハ $\mathfrak{d}$ ガ丁度 $\mathfrak{R}$ ト isomorph ニナル。(∵ $\mathfrak{R}$ ノ Derivation ハ innere Derivation $D_a x = a\circ x$ ノミデアリ, 且ツスベテノ x ニ對シテ $a\circ x = 0$ ニナル元 a ハ $\mathfrak{R}$ ノ Zentrum ノ元, 即チ $a=0$ ニ限ルカラ $D_a \longleftrightarrow a$ ナル對應デ $\mathfrak{d}\cong\mathfrak{R}$) ト云フ, Lie 環全体トシテ云ヘバ偶然ナ事情ノタメニ, $\mathfrak{A}$ ガ $\mathfrak{R}$ ソノモノニ對應スル群ノ様ニモ考ヘラレルノデアル。

扨テ $\mathfrak{R}$ ガ可換ナ Radikal ヲ有スル場合ニハ $\mathfrak{d}\cong\mathfrak{R}$ トハナラナイガ, ($\mathfrak{R}'=\mathfrak{R}$ ナルモノニ限ッテ考

ヘルト）$\mathfrak{G}$ハ$\mathfrak{K}$ニ同型ナLie環ヲ含ムノデ，$\mathfrak{G}$ニ對應スル自己同型群$\mathfrak{A}$ヲ作レバ，$\mathfrak{K}$ニ對應スベキ群ヨリハ「大キイ」群ガ出来ル。實際（I）デ決定シタ自己同型群$\mathfrak{A}=(A)$ニ於テ，(A^{00})（$\cong\mathfrak{v}$ト同次元ノVektor群）ナルNormalteilerハ明カニ$\mathfrak{K}$ノRadikal $\mathfrak{v}$ニ對應スル部分デアリ，$(A)/(A^{0})$（$\cong(\bar{A})=\mathfrak{r}$ノ自己同型中$\mathfrak{G}$ヲ變ヘナイモノヽ作ル群）ハ$\mathfrak{r}$ニ對應スル部分デアル。$(A^{0})/(A^{00})$ダケハ$\mathfrak{K}$ニ対應スル部分ヲモタナイ。既ニ述ベタ樣ニ，$\mathfrak{A}$ニモットヨク對應スルノハ$\mathfrak{K}$ヨリモ$\mathfrak{K}$ノDerivationenノLie環$\mathfrak{G}$デアル。ソコデ本談話デハ$\mathfrak{G}$ヲ求メテ見ルコトニスル。當然豫想サレル樣ニ$\mathfrak{G}$ノ決定ハ，$\mathfrak{A}$ノ決定ト殆ンドparallelニ行キ，而モ概シテズット簡單デアル。

唯一ツ，自己同型AガRadikal $\mathfrak{v}$ヲ變ヘナイ（$A\mathfrak{v}=\mathfrak{v}$）事ガ全ク明カデアルニ對シテ，任意ノDerivation Dニ對シテ$D\mathfrak{v}\subset\mathfrak{v}$ナルコトノ証明ガ案外困難デアル。ソレヲ先ヅ第5節デ片附ケル。純代数的ニ証明出来ナイノデ止ムヲ得ズ，transzendentナ廻リ道ヲシテ証明スル。ソレガスメバ後ハ樂デアル。

DerivationモAutomorphismusモLie環ニ限ラズ任意ノlineare Algebra (über P) ニツイテ考ヘラレル。ソノ場合$\mathfrak{A}$ト$\mathfrak{G}$トノ間ニ構造上非常ニ密接ナ類似ガアルコトハ明白ナ事実デアルガ，具体的ニ$\mathfrak{A}$ト$\mathfrak{G}$トヲ媒介スルノハ指数函数ノヤウナ解析的手段

デアッテ，基礎体ガ perfekt デナケレバウマク行カナイ。即チ $\mathfrak{G}$ ト $\mathfrak{L}$ トノ明白ナ平行性ニ対シテ，一般ノ基礎体ノ場合ニハ理論的ナ根據ガ欠ケテ居ル訳デアル。モット一般ニ，幾ツカノ不変式又ハ不変的關係ニヨッテ定義サレル一次変換ノ群 $\mathfrak{G}$ ト一次変換ノ Lie 環 $\mathfrak{L}$ トノ間ニモ（例ヘバ $x_1^2 + \cdots\cdots + x_n^2$ ナル不変式ヲトレバ，$\mathfrak{G}$ ハ直交変換群，$\mathfrak{L}$ ハ歪對稱行列 Lie 環）構造ノ平行性ガアッテ、而モ一般ニハソノ媒介物ガ欠ケテ居ル。Lie ノ理論ヨリモット一般的ナ代数的ナ（從ッテ基礎体ニ全ク關係ノナイ）理論ガ望マシイノデハナイダラウカ。

5. Lie 環ノ charakteristische Ideale.

〔定義〕（Lie-）algebra $\mathfrak{R}/P$ ノ Teilalgebra $\mathfrak{v}$ ガ，$\mathfrak{R}$ ノ任意ノ Autom. A デ不変（$A\mathfrak{v} = \mathfrak{v}$）ナトキ、$\mathfrak{v}$ ハ $\mathfrak{R}$ ノ <u>charakteristische Teilalgebra</u> デアルト云フ。若シ $\mathfrak{R}$ ノ任意ノ Derivation D ニ對シテ不変（$D\mathfrak{v} \subset \mathfrak{v}$）ナラバ，$\mathfrak{v}$ ハ $\mathfrak{R}$ ノ <u>lokal-charakteristische Teilalgebra</u> デアルト云フコトニスル。

Lie 環ノ l.-char. Teilalgebra ハ常ニ Ideal デアル。∵ 任意ノ $a \in \mathfrak{R}$ ニ対シテ $a \circ \mathfrak{v} = Da\mathfrak{v} \subset \mathfrak{v}$ ダカラ。（Zassenhaus ハ後者ノミヲ考ヘテ，單ニ char. Ideal ト名付ケテ居ル。）char. Teilalgebra ガ常ニ Ideal オドウカハ直チニハ分

ラナイ。

〔例1〕 $\mathfrak{R}$ ヲ einfach ナ Lie 環 $\mathfrak{r}_1$ ト $\mathfrak{r}_2$ $(\mathfrak{r}_1 \cong \mathfrak{r}_2)$ ノ直和トスル：

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{r}_1 + \mathfrak{r}_2$$

$\mathfrak{r}_1$ ト $\mathfrak{r}_2$ ヲ交換スル A ガアルカラ，$\mathfrak{r}_1$ ハ char. デハナイ．然シ $\mathfrak{R}$ ノ D ハ必ズ inner デアルカラ $D\mathfrak{r}_1 \subset \mathfrak{r}_1$，即チ $\mathfrak{r}_1$ ハ l.-char. Ideal デアル。

〔例2〕 $\mathfrak{R}$ ノ char. Teilalgebra $\mathfrak{N}$ ノ char. Teilalgebra $\mathfrak{N}'$ ハ $\mathfrak{R}$ ノ char. Teilalgebra デアル。$\mathfrak{R}$ ノ l.-char. Ideal ノ l.-char. Ideal ハ $\mathfrak{R}$ ノ l.-char. Ideal デアル等。之レラハ定義カラ明カ。

$\mathfrak{R}$ ノ Radikal, Zentrum（及一般ニ aufsteigende Zentralreihe ノ各項），Ableitung（及一般ニ高次ノ Ableitung 並ビニ absteigende Zentralreihe ノ各項），等ハスベテ定義カラ殆ンド明カナ様ニ char. Ideal デアル。又以上ノ中 Radikal 以外ノモノハ同時ニ l.-char. Ideal デアルコトガ夫々ノ場合ニ容易ニ証明サレル。（例ヘバ Zentrum $\mathfrak{z}$ ニ對シ，$D\mathfrak{z} \subset \mathfrak{z}$ ナルコトハ，$x \in \mathfrak{R}$, $z \in \mathfrak{z} \to Dz \circ x = D(z \circ x) - z \circ Dx = D0 - 0 = 0$ ヨリ Ableitung $\mathfrak{R}' = \mathfrak{R} \circ \mathfrak{R}$ ニ對シテハ $D\mathfrak{R}' = D(\mathfrak{R} \circ \mathfrak{R}) \subset D\mathfrak{R} \circ \mathfrak{R} + \mathfrak{R} \circ D\mathfrak{R} \subset \mathfrak{R} \circ \mathfrak{R} = \mathfrak{R}'$）

殆ンド明カナコトデアルガ：

定理[5・1]　Pガ複素数体(一般ニperfekt bewertete Körper)ナラLie環$\mathfrak{R}/P$ノchar. Teilalgebra ハ同時ニl.-char. 従ツテIdealデアル。

〔証明〕　Dヲ$\mathfrak{R}$ノ任意ノDerivationトスレバ，εヲ十分小サクトルトキe^{tD} ($|t|<\varepsilon$) ハ$\mathfrak{R}$ノautom. ニナル。∴　$v\in\mathfrak{v}$ナラ$e^{tD}v\in\mathfrak{v}$，$\mathfrak{v}$ハ勿論閉ヂテ居ルカラ

$$Dv=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(e^{tD}v-v)\in\mathfrak{v}\qquad q.e.d.$$

一般ニハ餘リハッキリシタ事ハ云ヘナイガ：

定理[5.2]　Pハ標準0ノ体デ，$\mathfrak{v}$ハ$\mathfrak{R}/P$ノchar. Teilalgebraトスル。

$$\mathfrak{R}=u_1P+\cdots\cdots+u_rP,\quad \mathfrak{v}=v_1P+\cdots\cdots+v_sP$$

$$u_i\circ u_j=\sum u_k\gamma_{ij}^k,\quad v_i=\sum u_k\alpha_i^k$$

トシ，$P^*=\Gamma(\alpha_i^k,\gamma_{ij}^k)\subset P$ (Γ：有理体)，$\mathfrak{R}^*=u_1P^*+\cdots\cdots+u_rP^*$，$\mathfrak{v}^*=v_1P^*+\cdots\cdots+v_sP^*$ト置ク。Pノミデナク，$P^*$ノ任意ノ拡大体Kニ對シテ$\mathfrak{v}^*K$ガ$\mathfrak{R}^*_K$ノchar. Teilalgebraナラバ，$\mathfrak{v}$ハ$\mathfrak{R}$ノl.-char. Idealデモアル。

〔証明〕　P^*ハ高々有限個ノ独立ナ超越元ヲ含ムノミダカラ複素数体Kニeinbettenサレル。假定ニヨリ$\mathfrak{v}^*_K$ガ$\mathfrak{R}^*_K$ノchar. Teilalgebraダカラ，[5.1]ニヨリl.-char. Idealデモアル。$\mathfrak{R}^*$ノDerivation

D^* ハ $\mathfrak{R}^*_K$ ノ Der. ノ一部ダカラ $D^*\mathfrak{v}^* \subset \mathfrak{v}^*_K$, 勿論 $D^*\mathfrak{v}^* \subset \mathfrak{R}^*$ ダカラ $D^*\mathfrak{v}^* \subset \mathfrak{v}^*$, 即チ $\mathfrak{v}^*$ ハ $\mathfrak{R}^*$ ノ l.-char. Ideal デアル。然ルニ一般ニ $\mathfrak{R}$ ノ Der. D ハ、$\gamma_{ij}^k \in P^*$ ヲ係数ニ含ム斉次一次方程式系ノ解トシテ得ラレルモノデ, 結局 $\mathfrak{R}^*$ ノ Der. ノ P ヲ係数トスル一次結合デアル。$\therefore D\mathfrak{v}^* \subset \mathfrak{v}^*P = \mathfrak{v}$ $\therefore D\mathfrak{v} \subset \mathfrak{v}$ q.e.d.

扨 $\mathfrak{v}$ ガ $\mathfrak{R}$ ノ Radikal デアルトイフ性質ハ $\mathfrak{R}/\mathfrak{v}$ ノ Diskriminante $\neq 0$ ナルコトト $\mathfrak{v}$ ノ auflösbar ナルコトデ決ルカラ，何レニシテモ係数 α_i^k, γ_{ij}^k ダケデ分ル性質デアル。故ニ $\mathfrak{v}^*$ ハ $\mathfrak{R}^*$ ノ, $\mathfrak{v}^*_K$ ハ $\mathfrak{R}^*_K$ ノ Radikal 従ッテ char. Teilalgebra デアル。故ニ定理[5・2]ノ仮定ハ満足サレ;

定理[5・3] 標数0ノ体 P ノ上ノ Lie 環 $\mathfrak{R}$ ノ Radikal $\mathfrak{v}$ ハ $\mathfrak{R}$ ノ l.-char. ナ Ideal デアル。

定理[5・2]ハ、Zentrum, ableitung 等ガ l.-char. ナコトノ証明ニモ勿論使ヘルガ，前ノ代数的証明ノ方ガ標数 p デモ通用スル点デ優ッテヰル。[5・3]ハ標数 p ノ時成立ツカドウカ分ラナイ。

6. 可換ナ Radikal ヲ持ツ Lie 環ノ無限小自己同型.

$\mathfrak{R}$ ハ可換ナ Radikal ヲ持ツ Lie 環: $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(\mathfrak{f}; \mathfrak{v})$, コヽニ $\mathfrak{f}$ ハ halbeinfach, $\mathfrak{v}$ ハ $\mathfrak{f}$ ノ一ツノ表現デアル。基礎体 P ノ標数ハ0トスル。

第1節ニ述ベタヤウニ $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}' + \mathfrak{z}$ ($\mathfrak{R}'$: ableitung,

$\mathfrak{z}$: Zentrum) デアルガ, 前節ニ述ベタヤウニ $\mathfrak{R}$ ノ任意ノ Der. D ニ對シ $D\mathfrak{R}' < \mathfrak{R}'$, $D\mathfrak{z} < \mathfrak{z}$ デアリ, D ハ $\mathfrak{R}'$ 及 $\mathfrak{n}$ ノ Der. ヲ生ズル。逆ニ $\mathfrak{R}'$ ノ Der. D_1 ト $\mathfrak{z}$ ノ Der. D_2 トヲ勝手ニ組合セテ

$$x = y + z, \quad y \in \mathfrak{R}', \quad z \in \mathfrak{z} \text{ ニ對シ}$$

$$Dx = D_1 y + D_2 z$$

トオケバ任意ノ D ガ得ラレル。然ルニ D_2 ハ全ク任意ノ一次変換ダカラ問題ハナイ。∴ $\mathfrak{R}'$ ノ Der. ダケヲ考ヘレバヨイ。即チ第2節ト同様 $\mathfrak{R}'$ ノ代リニ $\mathfrak{R}$ ト書イテ了ッテ, $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(\mathfrak{s}; \mathfrak{d})$ ニ於テ $\mathfrak{d}$ ガ零表現ヲ含マナイ場合ダケヲ考ヘルコトニスル。

(I) ノ記号ヲ其儘使ッテ

$\mathfrak{R} = \mathfrak{s} + \mathfrak{n}$, $\mathfrak{s}$: halbeinfach ナ部分環, $\mathfrak{n}$: Radikal,

$$\mathfrak{s} = u_1 P + \cdots\cdots + u_r P, \quad \mathfrak{n} = v_1 P + \cdots\cdots + v_g P,$$

$$(6.1) \qquad u_i \circ u_j = u_k c^k_{ij}, \quad v_\alpha \circ v_\beta = 0,$$

$$u_i \circ v_\alpha = v_\beta d^\beta_{i\alpha}$$

$u_i \to [d^\beta_{i\alpha}]$ ガ $\mathfrak{n}$ ヲ表現加群トスル $\mathfrak{s}$ ノ (g 次ノ) 表現 $\mathfrak{d}$ デアル。

扨テ前節ニヨリ, 任意ノ Der. D ニ對シ $D\mathfrak{n} < \mathfrak{n}$ デアルカラ, D ハ $\mathfrak{R}/\mathfrak{n}$ ノ Der. ヲ惹起ス. ソレヲ $\bar{D}$ ト書ク。

i) $\bar{D} = 0$ ナルバアヒ。コノ様ナ D ヲ D^0 ト書クコトニスル。即チ

$$(6.2) \qquad D^0 u_i = v_\alpha t^\alpha_i \qquad D^0 v_\alpha = v_\beta s^\beta_\alpha$$

$$D^0 u_i \circ u_j + u_i \circ D^0 u_j = D^0(u_i \circ u_j) = D^0 v_k c_{ij}^k \quad = (6.2)$$

ト(6.1)ヲ代入シテ $-v_\beta d_{j\alpha}^\beta t_i^\alpha + v_\beta d_{i\alpha}^\beta t_j^\alpha = v_\beta t_k^\beta c_{ij}^k$,

即チ

$$(6.3) \quad d_{i\alpha}^\beta t_j^\alpha - d_{j\alpha}^\beta t_i^\alpha = t_k^\beta c_{ij}^k \quad \text{或ハ}$$

$$\vartheta(u_i) t_j - \vartheta(u_j) t_i = t_k c_{ij}^k,$$

$$t_i = \begin{pmatrix} t_i^1 \\ \vdots \\ t_i^g \end{pmatrix} \qquad \vartheta(u_i) = \begin{bmatrix} d_{i1}^1 & \cdots & d_{ig}^1 \\ & \cdots & \\ d_{i1}^g & \cdots & d_{ig}^g \end{bmatrix}$$

之ハ(I)，(2.2)トシテ得タ方程式ト全ク同ジデアル。（u_i ニ表現 ϑ デ對應スル行列ヲ以前ニハ D_i ト書イタガ，Der. ト紛ハシイカラ、コヽデハ $\vartheta(u_i)$ ト書イタ）シタガッテ第3節ニ述ベタ Whitehead ノ定理ニヨリ，任意ノ Vektor w ニ對シ

$$t_i = \vartheta(u_i) w \quad \text{即チ} \quad t_i^\alpha = d_{i\beta}^\alpha w^\beta$$

ガ（6.3）ノ一般解デアル。扨テ $v_0 = -v_\alpha w^\alpha$ トオケバ，$v_0 \in \mathfrak{r}$ デ

$$v_0 \circ u_i = u_i \circ v_\alpha w^\alpha = v_\beta d_{i\alpha}^\beta w^\alpha = v_\beta t_i^\beta = D^0 u_i,$$

$$v_0 \circ v_\alpha = 0$$

即チ innere Der. $v_0 \circ u_i = D_{v_0} u_i$ ト書ケバ

$$(6.4) \quad D_{v_0} u_i = D^0 u_i, \quad D_{v_0} v_\alpha = 0$$ [1] ……（脚註次頁）

$\therefore\ D^0 = D_{v_0} + D^S$ トオケバ, D^S モ Der. デ (6.2), (6.4) カラ

(6.5) $D^S u_i = 0,\quad D^S v_\alpha = v_\beta S^\beta_\alpha.$

u ヲ $\mathfrak{f}$ ノ任意ノ元トスレバ, $D^S u = 0$

$\therefore\ D^S(u \circ v_\alpha) = u \circ D^S v_\alpha$

即チ行列 $[S^\beta_\alpha] = S$ ト書ケバ

(6.6) $\vartheta(u)\, S = S\, \vartheta(u)$

S ハ表現 ϑ ノ任意ノ行列ト可換ナ行列 ((2.6) トチガッテ $|S| \neq 0$ ヲ要シナイ) デアル. 又コノ様ナ行列 S ヲ任意ニトッテ (6.5) ニヨリ D^S ヲ定義スレバ, ソレガ Der. ニナルコトモ以上カラ分ル. ϑ ハ完全可約ダカラ S ノ全体ハ halbeinfach ナ行列環ヲ作ル.[2)]

ii) $\bar{D} \neq 0$ ノ場合　$D = D_{v_0} + \hat{D}$, $\hat{D}\mathfrak{f} < \mathfrak{f}$ ノ形ニ分ケラレルコト, 即チ mod (D_{v_0}) ノ代表トシテ必ズ $\hat{D}\mathfrak{f} < \mathfrak{f}$ ナル $\hat{D}$ ガトレルコトガ, im großen ノバアヒト全ク同様ニ証明サレル. 即チ $u \in \mathfrak{f}$ ニ対シ $Du = u^*$ トスレバ u^* ハ $\mathfrak{f}$ ニハ必ズシモ属シナイガ, $\mathfrak{R} = \mathfrak{f} + \mathfrak{v}$ ニヨリ $u^* \equiv u^0\ (\mathfrak{v})$ ナル $u^0 \in \mathfrak{f}$ ガ唯一ツアル. $u, u', u'' \in \mathfrak{f}$

---

1) 之デ Whitehead ノ定理ノ意味ガ非常ニハッキリスル. 即チ換言スレバ「$\mathfrak{R}$ ノ Der. D^{00} デ $D^{00}\mathfrak{f} < \mathfrak{v}$, $D^{00}\mathfrak{v} = 0$ ナルモノハ, $v_0 \in \mathfrak{v}$ ニ對應スル innere Der. D_{v_0} デアル」.

2) 勿論 assoziative ナ環トシテ halbeinfach ナノデアッテ Lie 環トシテハサウデハナイ.

デ $u \circ u' = u''$ ナラバ $u^* \circ u' + u \circ u'^* = u''^*$

$\therefore\ u^0 \circ u' + u \circ u'^0 \equiv u''^0\ (\mathfrak{v})$

コノ合同式ノ両辺ハ共ニ $\mathfrak{s}$ ニ属スルカラ，之レヨリ $u^0 \circ u' + u \circ u'^0 = u''^0$ 同様ニ

$\alpha u + \alpha' u' = u''$ ナラ $\alpha u^0 + \alpha' u'^0 = u''^0$ 即チ $\hat{D} u = u^0$ トオケバ，$\hat{D}$ ハ $\mathfrak{s}$ ノ Der. ニナル。更ニ

(6.7) $\quad \hat{D} u = u^0,\ u \in \mathfrak{s};\ \hat{D} v = D v,\ v \in \mathfrak{v}$

トオケバ，$\hat{D}$ ハ $\mathfrak{L}$ 全体ノ Der. ニナッテオル。ソレハ $\hat{D}$ ガ $\mathfrak{s}$ 及ビ $\mathfrak{v}$ ノ Der. ニナッテオルコトハ既知ダカラ，$\hat{D}(u \circ v) = \hat{D} u \circ v + u \circ \hat{D} v$ ヲ云ヘバヨイガ $\hat{D} u \equiv D u\ (\mathfrak{v})$ ヲ考慮スレバ，$\hat{D}(u \circ v) = D(u \circ v) = D u \circ v + u \circ D v = \hat{D} u \circ v + u \circ \hat{D} v$ カラ分ル。従ッテ $D^{00} = D - \hat{D}$ モ Der. デ

$$D^{00} u \equiv 0\ (\mathfrak{v}), \quad D^{00} v = 0$$

トナル。故ニ i) ノ議論ニヨリ $v_0 \in \mathfrak{v}$ ヲ用ヒテ $D^{00} = D_{v_0}$ ノ形ニナル。即チ

(6.8) $\quad D = D_{v_0} + \hat{D},\quad v_0 \in \mathfrak{v},\quad \hat{D}\mathfrak{s} \subset \mathfrak{s}$

ナル分解ノ可能性ノ証明ガ済ンダ。扨テ $\mathfrak{s}$ ハ *halbeinfach* ダカラ

$$\hat{D} u = u_0 \circ u = D_{u_0} u$$

ナル $u_0 \in \mathfrak{s}$ ガ存在スル。$\hat{D}$ ガ $\mathfrak{v}$ ニ生ズル一次変換ヲ

$$\hat{D} v = L v, \quad v \in \mathfrak{v}$$

ト書ケバ $\hat{D}(u \circ v) = \hat{D} u \circ v + u \circ \hat{D} v$ ハ

$$L\,\vartheta(u)\,v = \vartheta(u_0 \circ u)\,v + \vartheta(u)\,L\,v$$

トナルガ，$\vartheta(u_0\circ u)=\vartheta(u_0)\vartheta(u)-\vartheta(u)\vartheta(u_0)$ ダカラ

$$(L-\vartheta(u_0))\,\vartheta(u)=\vartheta(u)(L-\vartheta(u_0))$$

即チ $L=\vartheta(u_0)+S$ トナリ S ハ表現ト可換ナ行列デアル。

$$D_{u_0}u=\hat{D}u \qquad D_{u_0}v=\vartheta(u_0)v$$

デアリ，又

$$D^S u=0 \qquad D^S v=Sv$$

モ i) ニヨリ Der. ダカラ結局 $\hat{D}=D_{u_0}+D^S$ デアル。

従ツテ i) ト iii) ヲ纏メレバ $\mathfrak{R}$ ノ任意ノ Der. D ハ $D=D_{u_0}+D_{v_0}+D^S$，$u_0\in\mathfrak{r}$，$v_0\in\mathfrak{v}$ ノ形ニナル。$u_0+v_0=x_0$ トオケバ

$$D=D_{x_0}+D^S,\quad x_0\in\mathfrak{R}$$

ノ形ニナル。コヽマデハ ϑ ガ零表現ヲ含ムバアヒニモ適用スル。若シ ϑ ガ零表現ヲ含マナイナラ，$\mathfrak{R}$ ノ Zentrum $=(0)$ トナリ，$x_0\longleftrightarrow D_{x_0}$ ノ對應ハ isomorph ニナル。（特ニ $D^{\circ\circ}\mathfrak{R}\subset\mathfrak{v}$，$D^{\circ\circ}\mathfrak{v}=0$ ナル $D^{\circ\circ}$ ニ對シテ $D^{\circ\circ}=D_{v_0}$，$v_0\in\mathfrak{v}$ ナル v_0 ガ一意的ニキマルガ，之ハ既ニ述ベタ様ニ $D^{\circ\circ}u_i=v_\alpha t_i^\alpha$ トスレバ，$\vartheta(u_i)t_j-\vartheta(u_j)t_i=t_k c_{ij}^k$ ノ解 $t_i=\vartheta(u_i)w$ ヲアラハス Vektor w ガ一意的ナコトニ他ナラナイ。即チ (I) ニ証明シタ定理 [3.2] ノ別証ガ與ヘラレタ事ニナル。）

以上ヲ總括スルト：

定理 [6.1]

「可換ナ Radikal ヲ持ツ Lie 環 $\mathfrak{R}=\mathfrak{R}(\mathfrak{r};\vartheta)$

ニ於テ $\mathfrak{V}$ ハ零表現ヲ含マナイトスル。$\mathfrak{R}$ ノ任意ノ Der. D ハ次ノ二ツノ部分ニ一意的ニ分解サレル。

$$D = D_{x_0} + D^S,$$

$$D_{x_0} x = x_0 \circ x, \quad x \in \mathfrak{R};$$

$$D^S u = 0, \ u \in \mathfrak{S}; \quad D^S v = S v, \ v \in \mathfrak{V};$$

コヽニ x_0 ハ $\mathfrak{R}$ ノ任意ノ元, S ハ表現 $\mathfrak{V}$ ト可換ナ任意ノ一次変換デアル。

D ノ全体ノ作ル Lie 環 (D) ノ中ニハ

$(D^0) = (D_{v_0}) + (D^S)$, 即チ $D^0 \mathfrak{R} \subset \mathfrak{V}$ ナル D^0 ノ作ル Ideal.

$(D^{00}) = (D_{v_0})$. 即チ $D^{00} \mathfrak{R} \subset \mathfrak{V}$, $D^{00} \mathfrak{V} = 0$ ナル D^{00} ノ作ル Ideal

ガアリ,

$$(D)/(D^0) \cong (D_{u_0}) \cong \mathfrak{S}$$

$(D^0)/(D^{00}) \cong (S)$ （$\mathfrak{V}$ ト可換ナ行列全体ノ Lie 環）

$$(D^{00}) = (D_{v_0}) \cong \mathfrak{V}$$

コノ他（任意ノ Lie 環デ成立ツ如ク）innere Der. ノ全体 $(D_{x_0}) = (D_{u_0}) + (D_{v_0})$ モ (D) ノ Ideal デアリ, $(D) = (D_{x_0}) + (D^S)$. (D^S) ハ Ideal デナイガ, Teilalgebra ヲナシ, 従ツテ (D) ハ (D_{x_0}) 上デ zerfallen スル。äußerer Derivationsring

$$(D)/(D_{x_0}) \cong (S)」$$

以上ノ結果ヲ自己同型群 (A) ト比較シテ見ヨウ。(I) ノ [定理 2] ニヨレバ, (A) ニハ

(A^0)：$A^0\mathfrak{R}=\mathfrak{r}$ナル$A^0$ノ全体

(A^{00})：$A^{00}\mathfrak{R}=\mathfrak{r}$, $A^{00}v=v$, $v\in\mathfrak{r}$ナルA^{00}ノ全体

ト云フ normalteiler ガアリ，ソレラノ間ノ Faktor ハ

$(A)/(A^0)\cong(\bar{A})$ （$\mathfrak{f}$ノ autom. 中ϑヲ変ヘナイモノ）

$(A^0)/(A^{00})\cong(S)'$ （ϑト可換デ逆ノアル行列）

$(A^{00})\cong\mathfrak{r}$ト同次元ノ Vektor 群

デアッタ。即チ(D^0)ト(A^0)，(D^{00})ト(A^{00})，$(D_{u_0})\cong\mathfrak{f}$ト$(\bar{A})$，$(S)$ト$(S)'$，$(D_{v_0})\cong\mathfrak{r}$ト$(A^{00})$ガ夫々對應シテ居ル。(D)ノ Ideal $(D_{x_0})\cong\mathfrak{R}$ニ對應スル(A)ノ normalteiler（之コソ$\mathfrak{R}$ニ對應スル Lie 環トシテ興味ガアルノデアルガ）ハ定理2ニハ述ベテナイ。基礎体Pガ perfekt デアレバ innere autom. ノ群(A^i)ヲトレバヨイ。詳シク云ヘバ次ノ通リデアル。$\mathfrak{f}$ニ對應スル単一連結ナ Lie 群ヲ$\mathfrak{g}$トスレバ，$\mathfrak{f}$ノ表現ϑハ$\mathfrak{g}$ノ表現ニ一意的ニ延長サレルガソレモϑト書ク。$\mathfrak{f}$ノ innerer autom. $\bar{A}$ハ$\bar{A}u=g^{-1}ug$ノ形，

$\vartheta(\bar{A}u)=\vartheta(g)^{-1}\vartheta(u)\vartheta(g)$ダカラ$L_{\bar{A}}=\vartheta(g)$トオケル。$\bar{A}$カラ$g$ハ一意的ニハキマラナイガ，$\mathfrak{g}$ノ Zentrum ハ有限個ノ元シカ含マナイノデ．gモ高々有限個，

∴ $L_{\bar{A}}$モ有限多價デアル。

$$A^i=\begin{bmatrix}\bar{A} & 0\\ T\bar{A} & L_{\bar{A}}\end{bmatrix}$$

モ，シタガッテ$\mathfrak{g}$ノ有限多價ナ表現ヲナス群デ，$(D_{x_0})=$

對應スルト考ヘラレル。一般ノ係數体ノバアヒニモ一ツノAニ對應スル$L_{\bar{A}}$トシテ$L_{\bar{A}}$Sノ全体ノ中カラ，都合ノヨイ有限個(?)ダケヲトルコトニシテ，上ノA's全体ガ群ヲナスヤウニ出来レバ，(D_{x_0})ニ對應スル群ガ得ラレル訳デアルガ，此様ナ$L_{\bar{A}}$ノ選ビ方ガ分ラナイ。