975. 群トソノ lattice ニツイテ III[1)]

岩澤 健吉（東大）

1. 前ノ續キトシマシテ今度ハ主トシテ有限デアルトハ限ラナイ Element ヲ含ム M-group ノ構造ニツイテ述ベテ見タイト思ヒマス。

II ニ述ベマシタ様ニ 有限ノ M-group ノ構造ハハッキリ定メルコトガ出來ルノデアリマスガ、以下ノ考察ニ於テハ唯二、三ノ簡單ナ事實ダケヲ用ヒマス。

2. 念ノタメニモウ一度、定義記号ナドノ主ナモノヲ擧ゲテオキマス。

群 $\mathfrak{G}$ ノ部分群ヲ $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \cdots\cdots$ トシ $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ カラ生成サレタ $\mathfrak{G}$ ノ部分群ヲ $\mathfrak{a} \smile \mathfrak{b}$，$\mathfrak{a}$ ト $\mathfrak{b}$ トノ共通部分群ヲ $\mathfrak{a} \frown \mathfrak{b}$ デ表ハシマス。$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \cdots\cdots$ ノ全体ハ明カニ lattice $L(\mathfrak{G})$ ヲツクリ、コレヲ $\mathfrak{G}$ ニ屬スル lattice ト呼ブコ

トニシマス。$\mathfrak{G}$ガ M-group デアルトイフノハ $L(\mathfrak{g})$ ガ modular lattice デアルコトヲ意味シマス。

即チ $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{c}$, $\mathfrak{b}$ ヲ $\mathfrak{g}$ ノ部分群トスルトキ

$$\mathfrak{a} \cup (\mathfrak{b} \cap \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} \cup \mathfrak{b}) \cap \mathfrak{c} \qquad (1)$$

又 (1) ニヨリ $\mathfrak{a} \cup \mathfrak{b} \supseteq \mathfrak{x} \supseteq \mathfrak{b}$ ナル $\mathfrak{x}$ ト $\mathfrak{a} \supseteq \mathfrak{y} \supseteq \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ ナル $\mathfrak{y}$ トハ一對一ニ對應シ lattice isomorphism

$$\mathfrak{a} \cup \mathfrak{b}/\mathfrak{b} \simeq \mathfrak{a}/\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} \qquad (2)$$

ヲ與ヘマス。

サテ先ヅ

定理1. $\mathfrak{g}$ ヲ任意ノ M-group トスレバ $\mathfrak{g}$ ノ element デ有限ノ order ヲ有スルモノヽ全体ハ $\mathfrak{g}$ ノ characteristic subgroup $\mathfrak{e}$ ヲツクル。

證明　以下ニ於テモ屢ヽ出テ來マスカラ有限ノ order ヲ有スル element ヲ略シテ E-element, 無限ノ order ヲ有スル element ヲ U-element ト呼ブコトニシマス。A, B ヲ E-element トスルトキ AB モ亦 E-element デアルコトヲ云ヘバヨイワケデス。$\mathfrak{a} = \{A\}$, $\mathfrak{b} = \{B\}$ トシテ (2) ヲ適用スレバ $\{A, B\}$ ハ長サ有限ノ群, 即チ

$\{A, B\} \supset \mathfrak{a}_1 \supset \mathfrak{a}_2 \supset \cdots\cdots \supset 1$ ナル chain ハ常ニ有限デ終ルコトガ分リマス。C ヲ $\{A, B\}$ ニ含マレル U-element トスレバ $\{C\} \supset \{C^2\} \supset \{C^4\} \supset \cdots\cdots$ ハ無限ノ chain ヲ作リマスカラ、コレハ前ニ述ベタコトニ反シ

マス。ヨッテ $\{A, B\}$ ノ element ハ凡テ E-element

特ニ AB ハ E-element デアリマス。

Ⅲニ於テハ $\mathfrak{G} = \mathfrak{C}$ ナル場合ヲ考察シマシタ。ヨッテ以下ニ於テハ $\mathfrak{G} \neq \mathfrak{C}$，即チ $\mathfrak{G}$ ガ少クトモ一ツ U-element ヲ含ム場合ヲ調ベヨウト思ヒマス。

補助定理 1. $\mathfrak{G}$ ヲ M-group, A, B ヲ $\mathfrak{G}$ ノ element

トシ $\{A\} \frown \{B\} = 1$, 且ツ A ハ U-element トスル.

然ラバ B ヲ含ム $\{A, B\}$ ノ部分群ハ

$$\{A, B\}, \{A^2, B\}, \{A^3, B\}, \cdots\cdots, \{B\}$$

ニヨッテ與ヘラレル。

証明　$\mathfrak{a} = \{A\}$　$\mathfrak{b} = \{B\}$ トシテ (2) ヲ適用スレバ

$\mathfrak{a} \frown \mathfrak{b} = 1$ ナル故　$\{A, B\}/\{B\} \simeq \{A\}$

$\{A\}$ ノ部分群ハ明カニ $\{A\}, \{A^2\}, \{A^3\}, \cdots\cdots$ デスカラ、コレカラ定理ヲ得マス。

コノ補助定理ニヨリ $\mathfrak{G}$ ノ U-element ト E-element トノ関係ヲ與ヘル次ノ定理ガ得ラレマス。

定理 2. A ヲ U-element, B ヲ E-element トシ,

ソノ order ヲ m トスレバ $ABA^{-1} = B^r$, $(m, r) = 1$.

即チ A ハ $\{B\}$ ノ normaliser $N(\{B\})$ ニ含マレル。

証明. $\mathfrak{a} = \{A\}$, $\mathfrak{b} = \{B\}$ トスレバ $\mathfrak{a} \frown \mathfrak{b} = 1$ デアルカラ, 補助定理 1 ニヨリ, $\mathfrak{b}$ ヲ含ム $\mathfrak{a} \smile \mathfrak{b}$ ノ部分群ハ

$$\{A, B\}, \{A^2, B\}, \{A^3, B\}, \cdots\cdots, \{B\}$$

ニ限リマス。従ッテ $\{B, ABA^{-1}\}$ ハコレラノウチノドレカト一致スルワケデスガ B モ ABA^{-1} モ E-element デスカラ定理1ニヨリ $\{B, ABA^{-1}\}$ ハ E-element ノミヲ含ム.

ヨッテ $\{B, ABA^{-1}\} = \{B\}$, $ABA^{-1} = B^{r}$ トナリマス.

証終

コノ定理ヲ用ヒテ次ノ重要ナ結果ガ得ラレマス。

定理3. M-group $\mathfrak{G}$ ニ於テ $\mathfrak{G} \neq \mathfrak{C}$ ナラバ $\mathfrak{C}$ ハ abel群デアル。

証明　Z ヲ一ツノ U-element, A, B ヲ $\mathfrak{C}$ ノ任意ノ element トシマス。　定理2ニヨリ $ZAZ^{-1} = A^{\alpha}$.

BZ モ亦 U-element デスカラ（BZ ガ E-element ナラバ定理1ニヨリ $B^{-1}(BZ) = Z$ モ E-element トナル）

同様ニ $(BZ)A(BZ)^{-1} = A^{\beta}$, ヨッテ $BA^{\alpha}B^{-1} = A^{\beta}$,

即チ B ハ A ノ normaliser $N(\{A\})$ ニ含マレル。

A, B ハ $\mathfrak{C}$ ノ任意ノ element デアッタノデスカラ、コレカラ $\mathfrak{C}$ ハ abel群デナケレバ Hamiltonean group デナケレバナラヌコトガ分リマス。後者ノ場合ニハ $\mathfrak{C}$ ハ Quaternion group $\mathfrak{Q}$ ヲ含ミマス。

定理2ニヨリ $Z\mathfrak{Q}Z^{-1} = \mathfrak{Q}$, $\mathfrak{Q}$ ハ有限群デスカラ Z ハ適当ナ巾 $Z^{\gamma} = Z_0$ ヲトレバ Z_0 ト $\mathfrak{Q}$ ノ各 element トハ commutative トナリマス。サテ $\mathfrak{Q}_1 = \{\mathfrak{Q}, Z_0\}/\{Z_0^{4}\}$ トスレバ $\mathfrak{Q}_1$ ハ 2-group デ

勿論M-groupデナケレバナリマセンガⅡ=ヨレバ2-groupデQuaternion groupヲ含ムモノハ$\mathfrak{Q}$ト(2, 2, ..., 2)型abel群トノ直積デナケレバナリマセンカラ、コレハ矛盾デス。ヨッテ$\mathfrak{G}$ハabel群デナケレバナリマセン。　証終

($\mathfrak{G}_1$がM-groupデナイコト，従ッテ矛盾ヲ生ズルコトハ勿論直接計算シテモ容易ニ分リマス)

3. 次ニ$\mathfrak{G}/\mathfrak{g}$ノ構造，一般ニ1以外ノelementガ凡テ$\mho$-elementデアル如キM-groupノ構造ヲ調ベルワケデスガ、大分面倒デスカラ、補助定理ニヨリ段々片付ケテ行クコトニシマス。

補助定理2. $\mathfrak{G}$ヲM-group，Aヲ$\mathfrak{G}$ノ$\mho$-element, Bヲ任意ノelementトスルトキ、適當ナ整數α. βニ對シ

$$B A^{\alpha} B^{-1} = A^{\beta} \qquad (3)$$

ナラバ　$\alpha=\beta$，　即チ　$BA^{\alpha}=A^{\alpha}B$　トナル。

證明　先ヅ$\{A\}\frown\{B\}$キ1トシテ$A^{\mu}=B^{\nu}$トシマス

(3)ノ両辺ヲμ乗スレバ　$B^{-1}A^{\alpha\mu}B^{-1}=A^{\alpha\mu}=A^{\beta\mu}$

ヨッテ $\alpha\mu=\beta\mu$, $\alpha=\beta$

次ニ$\{A\}\frown\{B\}=1$トシマス。一般ニγヲ任意ノ整數トスルトキ　$\mathfrak{a}=\{A^{\gamma}\}$, $\mathfrak{b}=\{B\}$, $\mathfrak{c}=\{A\}$トシテ(1)ニヨッテ計算スレバ

$$\{A\}\frown\{A^{\gamma}, B\} = \mathfrak{c}\frown(\mathfrak{a}\smile\mathfrak{b}) = \mathfrak{a}\smile(\mathfrak{b}\frown\mathfrak{c}) = \mathfrak{a} = \{A^{\gamma}\}$$

(3)カラA^{β}ハ$\{A^{\alpha}, B\}$ニ含マレマスカラ，上ノ計

算ニヨリ $A^\beta \in \{A^\alpha\}$．一方 $A^\alpha = B^{-1}A^\beta B$ カラ
$A^\alpha \in \{A^\beta, B\}$，ヨッテ $A^\alpha \in \{A^\beta\}$，コレカラ
$\alpha = \pm\beta$，$A^\alpha = A_1$ トオケバ

$$BA_1B^{-1} = A_1^{\pm 1}.$$

ヨッテ $BA_1B^{-1} = A_1^{-1}$ ト假定シテ矛盾ヲ生ズルコトヲ示シマス。$B^2A_1B^{-2} = A_1$ カラ B^2 ハ $\{A_1, B\}$ ノ Center ニ屬シ，又 $\{A_1^4\}$ ハ明カニ $\{A_1, B\}$ ノ normal subgroup デアリマスカラ
$\overline{\mathfrak{G}} = \{A_1, B\}/\{A_1^4, B^2\}$ トオケバ $\overline{\mathfrak{G}}$ ハ

$$\bar{A}_1^4 = 1,\quad \bar{B}^2 = 1,\quad \bar{B}\bar{A}_1\bar{B}^{-1} = \bar{A}_1^{-1}$$

ニヨリ與ヘラレマスガ、コレガ M-group デナイコトハ容易ニ分リマスカラコレハ矛盾デアリマス。

証終

コノ補助定理ヲ用ヒテ先ヅ次ノコトヲ証明シマス。

定理4. $\mathfrak{G}$ ヲ M-group トシ $\mathfrak{G}$ ノ element ハ 1 ヲ除ケバ凡テ $\mho$-element ナリトスル。コノトキ A, B ヲ $\mathfrak{G}$ ノ任意ノ element，$\{A\} \frown \{B\} \neq 1$ トスレバ $\{A, B\}$ ハ cyclic group デアル。

証明．$AB = BA$ デアルコトヲ云ヘバ $\{A, B\}$ ハ torsion ノナイ abel 群デ $\{A\} \frown \{B\} \neq 1$ デスカラ容易ニソレガ cyclic デアルコトガ分リマス。ヨッテ $A \neq BAB^{-1}$ ト仮定シテ不合理ヲ導クコトニシマス。$\{A\} \frown \{B\} = \{Z\}$，$Z = A^\mu$ トスレバ Z ハ $\{A, B\}$ ノ center ニ屬スル故 $(BAB^{-1})^\mu = A^\mu$.

即チ $\{BAB^{-1}\}\frown\{A\}\neq 1$ デアリマスカラ

$\{A\}\frown\{BAB^{-1}\}=C$, $A^{\alpha}=BA^{\beta}B^{-1}=C$ トオケ

バ前補助定理ニヨリ $\alpha=\beta$ ナルコトガ分リマス.

ヨッテ

$A_1=A$, $A_2=BAB^{-1}$, $A_1^{\alpha}=A_2^{\alpha}=C=\{A_1\}\frown\{A_2\}$,

$\bar{\mathfrak{g}}=\{A_1, A_2\}/\{C\}$

トスレバ $\bar{\mathfrak{g}}$ ハ E-element $\bar{A}_1$, $\bar{A}_2$ ニヨリ生成サレ

マスカラ定理1ニヨリ $\bar{\mathfrak{g}}$ ノ element ノ order ハ

凡テ有限デ特ニ $(\bar{A}_1\bar{A}_2^{-1})^{\nu}=1$ ナル ν ガ存在シマス。

$(A_1A_2^{-1})^{\nu}=C^{\gamma}$ トオケバ, 假定ニヨリ $A_1A_2^{-1}$ ノ order

ハ無限デスカラ ($A_1=A_2$ ナルトキハ定理ハ明ラカ)

$C^{\gamma}\neq 1$, $\gamma\neq 0$.

コンデ $\mathfrak{a}=\{A_1C^{\gamma}\}$, $\mathfrak{b}=\{A_2C^{\gamma}\}$, $\mathfrak{c}=\{A_1\}$

トスレバ容易ニ

$$\mathfrak{a}\leqq\mathfrak{c},\quad \mathfrak{a}\frown\mathfrak{b}=\mathfrak{c}\frown\mathfrak{b}=\{(A_1C^{\gamma})^{\alpha}\}$$
$$=\{C^{1+\alpha\gamma}\}$$

又 $\mathfrak{a}\smile\mathfrak{b}$ ハ $(A_1C^{\gamma})(A_2C^{\gamma})^{-1}=A_1A_2^{-1}=C^{\gamma}$ ヲ含

ム故

$$\mathfrak{a}\smile\mathfrak{b}=\{A_1C^{\gamma}, A_2C^{\gamma}, C^{\gamma}\}=\{A_1, A_2\}=\mathfrak{c}\smile\mathfrak{b}.$$

ヨッテ (2) カラ $\mathfrak{a}=\mathfrak{c}$, $\{A_1^{1+\alpha\gamma}\}=\{A_1\}$, $\gamma\neq 0$

ナル故, コレハ不合理デアリマス。　　　　証終

次ニ A, B ヲ U-element トシ $\{A\}\frown\{B\}=1$ ナル場合ヲ考察スルワケデスガ、ソノ前ニ矢張リ補助定理ヲ挙ゲテオキマス。

補助定理3. $\mathfrak{G}=\{A, B\}$ ヲ M-group トシ

$A^2=B^2=1$ トスレバ $\mathfrak{G}$ ハ有限群デアル。

証明. 定理1ニヨリ、トモカク $\mathfrak{G}$ ノ各 element ノ order ハ有限デアリマス。ヨッテ $C=A^{-1}B$, $C^r=1$ トスレバ $\mathfrak{G}=\{A, C\}$ デ $ACAC=1$ 即チ $ACA^{-1}=C^{-1}$。

$\mathfrak{G}$ ハ高々 order $2r$ ノ有限群デアルコトガ分リマス。

証終

補助定理4. $\mathfrak{G}=\{A, B\}$ ヲ M-group, A, B ハ U-element デ $\{A\}\frown\{B\}=1$ トスル。コノトキ $\mathfrak{G}$ ガ Index 有限ノ abelian normal subgroup $\mathfrak{N}$ ヲ含メバ $\mathfrak{G}$ ハソレ自身 abel 群デアル。

証明. 假定ニヨリ $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ ハ有限群デアルカラ A^α, $B^\beta\in\mathfrak{N}$ ナル α, β ガ存在シマス。$\mathfrak{N}$ ハ abel 群ナル故 $A^\alpha B^\beta=B^\beta A^\alpha$. $\{B^\beta AB^{-\beta}\}\frown\{A\}\neq 1$

(2) ニヨリ

$$\{B^\beta AB^{-\beta}, A\}/\{A\}\simeq\{B^\beta AB^{-\beta}\}/\{BAB^{-\beta}\}\frown\{A\}$$

$\{B^\beta AB^{-\beta}\}\frown\{A\}\neq 1$ デアルカラ $\{B^\beta AB^{-\beta}\}$ ト $\{B^\beta AB^{-\beta}\}\frown\{A\}$ トノ間ニハ有限個シカ部分群ガナイ. ヨッテ左辺ノ $\{B^\beta AB^{-\beta}, A\}$ ト $\{A\}$ トノ間ニモ有限個シカ部分群ガナイ。補助定理1ニヨレバ $\{A\}$ ト $\{A, B\}$ トノ間ニアル部分群ハ $\{A, B\}$, $\{A, B^2\}$,

……，$\{A\}$ ダケデアル。$\{B^{\beta}AB^{-\beta}, A\} \neq \{A\}$ トスレバ $\{B^{\beta}AB^{-\beta}, A\} = \{A, B^{\gamma}\}$. 然ルニ $\{A, B^{\gamma}\}$ ト $\{A\}$ トノ間ニハ $\{A, B^{\gamma}\}, \{A, B^{2\gamma}\}$,……ナル無限個ノ部分群ガ存在スルカラ $\{B^{\beta}AB^{-\beta}, A\} = \{A\}$ デナケレバナラヌ。ヨッテ $B^{\beta}AB^{-\beta} = A^{\varepsilon}$, 補助定理2ニヨリ $B^{\beta}AB^{-\beta} = A$. $\{ABA^{-1}\} \frown \{B\} \neq 1$ デアルカラ今ト同ジ考察ヲ繰返セバ $AB = BA$.

以上ノ補助定理ヲ用ヒテ次ノ結果ガ得ラレマス。

定理5. $\mathfrak{G}$ ヲ任意ノ M-*group*, A, B ヲ $\mathfrak{G}$ ノ U-*element* トシ $\{A\} \frown \{B\} = 1$ トスレバ

$$AB = BA.$$

証明. $\mathfrak{G} = \{A, B\}$ トシテヨイワケデス。証明ハ帰謬法ニヨリ $\mathfrak{G}$ ガ *abel* 群デナイト假定シテ矛盾ヲ導クコトニシマス。

先ヅ $\mathfrak{G}$ ハ 1以外ニ E-*element* ヲ含マヌコトヲ証明シマス。

$Z \neq 1$ ヲ E-*element* トスレバ $\{Z\} \frown \{B\} = 1$ ナル故 (2) ニヨリ $\{Z, B\}$ ト $\{B\}$ トノ間ノ部分群ハ $\{Z\}$ ノ部分群ト 1:1 ニ對應シマス。然ルニ補助定理1ニヨレバ $\{Z, B\} = \{A^{\alpha}, B\}$ デ $\{A^{\alpha}, B\}$ ト $\{B\}$ トノ間ニハ $\{A^{\alpha}, B\}, \{A^{2\alpha}, B\}, \{A^{3\alpha}, B\}$,……,$\{B\}$ ナル無限ニ多クノ部分群ガ存在シマスカラコレハ矛盾デアリマス。

サテ $\mathfrak{G}_1 = \{B, ABA^{-1}\}$, $\mathfrak{G}_2 = \{B^2, AB^2A^{-1}\}$ トシマ

ス。

$\{A\} \frown \{B^2\} = 1$ カラ、矢張リ補助定理1カラ

$\mathfrak{g}_2 = \{A^{\beta}, B^2\}$ トカケマス。$AB^2A^{-1} \in \mathfrak{g}_2$ デスカラ

$\mathfrak{g}_2$ ハ $\{A, B^2\}$ ノ *normal subgroup* トナリマス。一方 $\mathfrak{g} = \{AB, B\}$ $\{AB\} \frown \{B\} = 1$ ナル故

（$\{AB\} \frown \{B\} \neq 1$ トスレバ初メニ述ベタ注意及ビ定理4カラ $(AB)B = B(AB)$, $AB = BA$ トナリ $\mathfrak{g}$ ハ *abel* 群トナッテ假定ニ反シマス.）

同様ノ考察ヲ $\mathfrak{g} = \{AB, B\}$, $\mathfrak{g}_2 = \{B^2, (AB)B^2(AB)^{-1}\}$ ニ對シテ行ヘバ $\mathfrak{g}_2$ ハ又 $\{AB, B^2\}$ ノ *normal subgroup* トナリ結局 $\mathfrak{g}$ ノ *normal subgroup* デアルコトガ分リマス。

同ジ様ニシテ（モット簡單ニ）$\mathfrak{g}_1$ ガ $\mathfrak{g}$ デ *normal* デアルコトモ分リマス。サテ $\mathfrak{g}_1/\mathfrak{g}_2$ ハ *order* 2 ナル *element* $\overline{B}$, $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{A}^{-1}$ ニヨリ生成サレタ M-*group* デスカラ補助定理3ニヨリ有限群デアリマス。ヨッテ今 $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_2$ ガ無限群デアルトスレバ $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_1$ モ亦無限群デナケレバナリマセン。

然ルニ $\mathfrak{g}_1$ ハ B ヲ含ム故、補助定理1ニヨリ

$\mathfrak{g}_1 = \{A^{\gamma}, B\}$ 又ハ $\mathfrak{g}_1 = \{B\}$ デアリマスガ、前者ノ場合ニハ $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_1$ ハ有限群ニナリマスカラ $\mathfrak{g}_1 = \{B\}$.

$\{B\}$ ハ $\mathfrak{g}$ ノ *normal subgroup* デスカラ

$ABA^{-1} = B^{\varepsilon}$, 補助定理2ニヨリ $AB = BA$. コレハ假定ニ反シマス。ヨッテ $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_2$ ハ有限群 $\mathfrak{g} \neq \{A, B^2\} \supset \mathfrak{g}_2$

ナル故 $\mathfrak{G} \neq \mathfrak{G}_2$. 有限ナ M-group ハ meta-abel 群デアリマスカラ（Ⅱ参照）コレカラ $\mathfrak{G} \neq \mathfrak{G}'$ ナルコトガ分リマス。

$\{A\} \frown \{B\} = 1$, 且ツ $\mathfrak{G}' \neq 1$ デアリマスカラ $\{A\} \ni \mathfrak{G}'$ 又ハ $\{B\} \ni \mathfrak{G}'$. 今 $\{A\} \ni \mathfrak{G}'$ ト假定シマス。

$\{A\} \neq \{A\} \smile \mathfrak{G}'$ ナル故, 補助定理 1 ニヨリ $\{A\} \smile \mathfrak{G}' = \{A, B^u\}$, $u \neq 0$. $\{A\} \smile \mathfrak{G}' / \mathfrak{G}'$ ハ A カラ生成サレタ cyclic group デスカラ適當ニ v ヲトレバ $B^u \equiv A^v (\mathfrak{G}')$ 即チ $B_1 = B^u A^{-v} \in \mathfrak{G}'$. $\{A\} \smile \mathfrak{G}' = \{A, B_1\}$. サテ $\{A\} \frown \{B_1\} \neq 1$ トスレバ定理 4 ニヨリ $\{A\} \smile \mathfrak{G}'$ ハ abel 群 $\mathfrak{G} / \{A\} \smile \mathfrak{G}'$ ハ有限群デスカラ、補助定理 4 ニヨリ $\mathfrak{G}$ モ亦 abel 群トナリ假定ニ反シマス。ヨッテ $\{A\} \frown \{B_1\} = 1$.

$\mathfrak{G}'$ ハ $\{A, B_1\}$ ノ部分群デ B_1 ヲ含ムカラ補助定理 1 ニヨリ $\mathfrak{G}' = \{A^r, B_1\}$ 又ハ $\mathfrak{G}' = \{B_1\}$, 先ヅ $\mathfrak{G}' = \{B_1\}$ トセヨ。補助定理 2 ニヨリ B_1 ハ $\mathfrak{G}$ ノ center ニ屬シ $\{A\} \smile \mathfrak{G}' = \{A, B_1\}$ ハ abel 群デアリマス。$v \neq 0$ トスレバ $\mathfrak{G} / \mathfrak{G}' \smile \{A\}$ ハ有限次ノ element カラ $\bar{A}, \bar{B}$ カラ生成サレルカラ有限群, ヨッテ補助定理 4 ニヨリ $\mathfrak{G}$ ハ abel 群トナリマス。$v = 0$ トスレバ $B_1 = B^u$ デアルカラ $\{B\}$ ハ $\mathfrak{G}$ ノ normal subgroup; $ABA^{-1} = B^s$, 補助定理 2 ニヨリ $s = 1$, $AB = BA$, 即チ $\mathfrak{G}$ ハ abel 群。

何レニシテモ矛盾トナリマス。$\mathfrak{G}' = \{A^r, B_1\}$ トスレ

バ $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}'$ ハ有限群デス。結局今マデノ所デ $\mathfrak{G}$ ガ abel 群デナイトスレバ $\mathfrak{G} \neq \mathfrak{G}'$, $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}'$ ハ有限群デアルコトガ分リマシタ。

コヽデ $\mathfrak{G}'$ ハ abel 群デハアリマセン。(補助定理4) 且ツ $\mathfrak{G}' = \{A^\gamma, B_1\}$ デスカラ $\mathfrak{G}$ ノ代リニ $\mathfrak{G}'$ ヲトッテ考ヘレバ $\mathfrak{G}' \neq \mathfrak{G}''$, $\mathfrak{G}'/\mathfrak{G}''$ ハ有限群。$\mathfrak{G}''$ ニ対シテモ $\mathfrak{G}'' \neq \mathfrak{G}'''$, $\mathfrak{G}''/\mathfrak{G}'''$ ハ有限群トナリマス。ヨッテ $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}'''$ ハ有限群デスガ、有限ノ M-group ハ metaabel 群デアルカラ、コレハ矛盾デス。即チ定理ハ証明サレタ。　証終

定理4, 5 ガ直チニ

定理 6. $\mathfrak{G}$ ヲ M-group トシ 1 以外ノ $\mathfrak{G}$ ノ element ノ order ハスベテ無限デアルトスレバ $\mathfrak{G}$ ハ abel 群デアル。

4. 初メニ戻リ $\mathfrak{G}$ ヲ任意ノ M-group, $\mathfrak{E}$ ヲ $\mathfrak{G}$ ノ E-element ノ全体カラ出来タ normal subgroup トシマス。定理6 ニヨリ $\mathfrak{G}/\mathfrak{E}$ ハ torsion ノナイ abel 群デアリマス。今ソノ rank ヲ r トシマス。($r = \infty$ デモヨイ) 先ヅ $r \geqq 2$ トシマス。然ルトキハ $\mathfrak{G}$ ハ $\{A\} \frown \{B\} = 1$ ナルニツノ U-element A, B ヲ含ミマス。

サテ $\mathfrak{G}$ ノ任意ノ U-element C ヲトレバ $\{A\} \frown \{C\} = 1$ 又ハ $\{B\} \frown \{C\} = 1$ ($\{A\} \frown \{C\} \neq 1$, $\{B\} \frown \{C\} \neq 1$ ナラバ $\{A\} \frown \{B\} \neq 1$ トナリ假定ニ反スル)。ヨッテ

例ヘバ $\{A\}\frown\{C\}=1$ トシマス。定理5カラ $AC=CA$.
コノトキ又 $\{B\}\frown\{C\}=1$ ナラバ $BC=CB$.
$\{B\}\frown\{C\}\neq 1$ トシテ $B^{\beta}=C^{\gamma}$ トスレバ $\{AC\}\frown\{B\}=1$
($\{AC\}\frown\{B\}\neq 1$, $(AC)^{\delta}=B^{\varepsilon}$ トスレバ
$A^{\delta\gamma}C^{\delta\gamma}=B^{\varepsilon\gamma}$, $A^{\delta\gamma}=B^{\varepsilon\gamma-\beta\delta}$ コレハ $\{A\}\frown\{B\}=1$ ニ反スル). ヨッテ矢張リ定理5カラ $(AC)B=B(AC)$.
$AB=BA$, ナル故コレカラ $BC=CB$。即チ任意ノ $\mathfrak{U}$-*element* C ニ對シ常ニ $AC=CA$, $BC=CB$ ナリマス。更ニモウ一ツ任意ニ $\mathfrak{U}$-*element* D ヲトル:
$AD=DA$, $BD=DA$. $\{C\}\frown\{D\}=1$ ナラバ勿論 $CD=DC$. $\{C\}\frown\{D\}\neq 1$ ノトキハ $\{A\}\frown\{C\}=1$ ナルコトカラ前ト同様ニシテ $\{AD\}\frown\{C\}=1$. ヨッテ $(AD)C=C(AD)$, $CD=DC$.

即チ $\mathfrak{G}$ ノ任意ノ二ツノ $\mathfrak{U}$-*element* ハ互ニ交換可能トナリマス。次ニ E ヲ $\mathfrak{E}$ ノ任意ノ *element*, C ヲ任意ノ $\mathfrak{U}$-*element* トスレバ AE ハ $\mathfrak{U}$-*element* デスカラ $(AE)C=C(AE)$. ヨッテ $AE=EA$。即チ E-*element* ト $\mathfrak{U}$-*element* トモ交換可能。$\mathfrak{E}$ ハ *abel* 群デスカラ結局 $\mathfrak{G}$ 自身 *abel* 群デアルコトが分リマス。即チ

定理7. $\mathfrak{G}$ ヲ任意ノ M-*group*, $\mathfrak{E}$ ヲ $\mathfrak{G}$ ノ有限次ノ *element* 全体カラ出来ル *normal subgroup* トスルトキ *abel* 群 $\mathfrak{G}/\mathfrak{E}$ ノ *rank* が $\geqq 2$ デアルナラバ $\mathfrak{G}$ ハ *abel* 群デアル.

5. 以下 *abel* 群デナイ様ナ $\mathfrak{G}$ ヲ考察スルコトニシ

マス。初メニ $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ ガ free cyclic group デアル場合ヲ考ヘ ソノ generator ヲ Z トシマス：

$\mathfrak{G}/\mathfrak{H}=\{\overline{Z}\}$. $\mathfrak{H}$ ハ abel 群デスカラソレヲ primary ナ component ノ直積トシテ、ソノ一ツヲ $\mathfrak{P}$ トシマス。$\mathfrak{P}$ ノ各 element ノ order ハ素數 p ノ巾デアリマス。$\mathfrak{P}$ ニ於テ $X^{p^k}=1$ ヲ満足スル element X ノ全体ノツクル部分群ヲ $\mathfrak{P}_k$ ($k=0,1,2,\text{-----}$) ト書クコトニシマス。order p ナル任意ノ element A ヲトレバ定理2ニヨリ

$$ZAZ^{-1}=A^{r}.$$

コヽデ $r\neq 1$ mod. p ト假定スレバ Z ノ巾 Z_1 ヲ適當ニトルコトニヨリ、

$$Z_1AZ_1^{-1}=A^{r_1},\quad r_1\neq 1,\quad r_1^{q}\equiv 1 \mod. p$$

トスルコトが出来マス。但シコヽニ q ハ $p\neq q$ ナル素數。ソコデ $\{Z_1,A\}/\{Z_1^{pq}\}$ ヲ考ヘレバ、コレハ order p^2q ナル群デアリマスが計算ニヨリ容易ニ M-group デナイコトが分リマス。（II 参照）ヨッテ $r\equiv 1$ mod. p デナケレバナリマセン。即チ

$$ZAZ^{-1}=A.$$

サテ $\mathfrak{P}_k$ ノ各 element ニ対シ適當ナ整數 r_k ガ mod p^k デ一意的ニ定マッテ

$$ZAZ^{-1}=A^{r_k}$$

トナッタト假定シマス。($k=0,1$ ノトキハ明ラカ）ソコデ今 order p^{k+1} ナル element B ヲ一ツトリマス。

定理2ニヨリ

$$\mathfrak{Z} B \mathfrak{Z}^{-1} = B^{r} \qquad (1)$$

$B^p \in \mathfrak{Z}_k$, $\mathfrak{Z} B^p \mathfrak{Z}^{-1} = (B^p)^r = (B^p)^{r_k}$ カラ

$$r \equiv r_k \quad mod.\ p^k \qquad (2)$$

ヨッテ $\{B, \mathfrak{Z}_k\}$ ノ各 element U ニ対シテハ

$$\mathfrak{Z} U \mathfrak{Z}^{-1} = U^r \qquad (3)$$

トカケルコトガ分リマス。 C ヲ order p^{k+1} ナル任意ノ element トシマス。 $\{B\} \frown \{C\} \neq 1$ ナラバ

$C \in \{B, \mathfrak{Z}_k\}$ ナル故 (3) カラ

$$\mathfrak{Z} C \mathfrak{Z}^{-1} = C^r$$

$\{B\} \frown \{C\} = 1$ トシテ

$$\mathfrak{Z} C \mathfrak{Z}^{-1} = C^{r'},\quad \mathfrak{Z}(BC)\mathfrak{Z}^{-1} = (BC)^{r''}$$

コレカラ

$$B^{r''} C^{r''} = B^r C^{r'}$$

故ニ $\quad r'' \equiv r' \equiv r \quad mod.\ p^{k+1}$

即チ $\quad \mathfrak{Z} C \mathfrak{Z}^{-1} = C^r$.

ヨッテ $\mathfrak{Z}_{k+1}$ ノ任意ノ element V ニ對シ

$$\mathfrak{Z} V \mathfrak{Z}^{-1} = V^r \qquad (4)$$

ガ成立シマス。 $r = r_{k+1}$ トオケバ r_{k+1} ハ (4) ニヨリ mod. p^{k+1} デ一意的ニ定マルコトハ明カデス。且ツ (2) カラ

$$r_k \equiv r_{k+1} \quad mod.\ p^k \qquad (5)$$

今 $\quad \mathfrak{Z}_0 = 1 \subset \mathfrak{Z}_1 \subset \mathfrak{Z}_2 \subset \cdots\cdots$

ナル列ガアル所カラ先ヅット一致シタトシテ $\mathfrak{Z}_{k-1} \neq \mathfrak{Z}_k$,

$\mathfrak{J}_k = \mathfrak{J}_{k+1} = \cdots\cdots$ ナルトキハ $\alpha = \alpha(p) = r_k$ トオキマス。又上ノ chain ガ一致セズニ無限ニツヾクトキハ上記考察ニヨリ、各 k ($k = 1, 2, \cdots\cdots$) ニ對シ r_k ガ mod. p^k デ一意的ニ定マリ、且ツ $r_k \equiv r_{k+1}$ mod p^k ナル故 $r_1, r_2, \cdots\cdots, r_k, \cdots\cdots$ ハ p-adic ノ意味デ収斂シマスカラ

$$\alpha = \alpha(p) = \lim r_k$$

トオキマス。

然ラバ、イヅレノ場合ニモ $\mathfrak{J}$ ノ任意ノ element X ニ對シ

$$Z X Z^{-1} = X^{\alpha}$$

ト書クコトガ出来マス。（α ガ p-adic number デアル時ノ上ノ式ノ意味ハ明カト思ヒマス）

但シ $r_1 = 1$ デスカラ (5) カラ

$$\alpha \equiv 1 \quad \text{mod. } p.$$

$p = 2$ ノトキニハ特ニ $\bar{A}^4 = \bar{Z}^2 = 1,\ \bar{Z}\bar{A}\bar{Z}^{-1} = \bar{A}^{-1}$ ナル群ガ M-group デナイト云フコトカラ前ト同様ニシテ $\alpha \equiv 1$ mod. 4 ヲ得ル。

マトメテ云ヘバ $\mathfrak{G}$ ノ各 component $\mathfrak{J}$ ニ對シ $\alpha(p) \equiv 1$ mod. p ($p = 2$ ナラバ $\alpha(2) \equiv 1$ mod. 4) ナル一定ノ p-adic number $\alpha(p)$ ヲトレバ，任意ノ $X \in \mathfrak{J}$ ニ對シテ

$$Z X Z^{-1} = X^{\alpha(p)} \tag{6}$$

トスルコトガ出来ルコトニナリマス。コヽニ α ハ $\mathfrak{J}$ ノ

element ノ order ノ maximum ヲ p^n ($n = \infty$ モ入レテ) トスレバ mod. p^n デ一意的ニ定マリマス。$\mathfrak{G}/\mathfrak{C}$ ノ Erzeugende ハ Z 又ハ Z^{-1} ノ class ニ限ル故 $\alpha(p)$ ハ Z ニヨッテ定マルバカリデナク、逆数モ入レテ云ヘバ $\mathfrak{G}$ ニヨッテ mod. p^n デ一意的ニ定マルコトニナリマス。

次ニ $\mathfrak{C}$ ヲ torsion バカリノ任意ノ abel 群トシ各 primary component ニ對シ $\alpha(p) \equiv 1 \mod. p$ ($p = 2$ ナラバ $\alpha(2) \equiv 1 \mod. 4$) ナル $\alpha(p)$ ヲトリ (3) ニヨリ、コレヲ free cyclic group デ拡張シテ $\mathfrak{G}$ ヲツクレバ常ニ M-group ガ得ラレルコトヲ証明シマス。ソノタメニ先ヅ A, B ヲ $\mathfrak{G}$ ノ任意ノ element トスルトキ適當ニ整数 x, y ヲトレバ

$$AB = B^x A^y \qquad (7)$$

トナルコトヲ証明シマス。A 又ハ B ガ $\mathfrak{C}$ ニ属スルトキハ (4) ガ殆ンド明カデアリマスカラ $A = A_1 Z^\alpha$, $B = B_1 Z^\beta$, $A_1, B_1 \in \mathfrak{C}$, $\alpha, \beta \neq 0$ トシマス。
$\mathfrak{H} = \{Z, A_1, B_1\}$ トスレバ $\mathfrak{H}$ ハ有限 abel 群 $\mathfrak{C}_1 = \{A_1, B_1\}$ ヲ Z デ cyclic ニ拡張シタモノデアリマス。

$\mathfrak{C}_1$ ノ p_i-Sylowgroup ヲ $\mathfrak{P}_i$ ($i = 1, \cdots\cdots, r$) トスレバ $\mathfrak{P}_i$ ノ各 element A_i ニ對シ (3) カラ

$$Z A_i Z^{-1} = A_i^{r_i} \qquad r_i \equiv 1 \mod. p.$$

($p = 2$ ノ時ハ $r \equiv 1 \mod. 4$)

トナリマス。ヨッテ$\mathfrak{Z}$ハ$\mathfrak{P}_i$ニアル$p_i^{n_i}$次ノAutomorphismヲ與ヘマスカラ$\mathfrak{Z}_0 = \mathfrak{Z}^{p_1^{n_1} \cdots\cdots p_r^{n_r}}$トスレバ$\mathfrak{G}_1$ノ$\mathfrak{h}$ニ於ケルCentraliserハ丁度$\{\mathfrak{G}_1, \mathfrak{Z}_0\}$トナリマス。

$\{A\} \frown \{\mathfrak{Z}\} = \{\mathfrak{Z}^s\}$, $\{B\} \frown \{\mathfrak{Z}\} = \{\mathfrak{Z}^t\}$トスレバ$\mathfrak{Z}^{st}$ハAおよびBト交換可能，従ッテ$A_1$, B_1ト交換可能．ヨッテ$\mathfrak{Z}^{st} \in \{\mathfrak{G}_1, \mathfrak{Z}_0\}$, $\mathfrak{Z}^{st} \in \{\mathfrak{Z}_0\}$．従ッテ$st = p_1^{m_1} \cdots\cdots p_r^{m_r} k$ $(k, p_i) = 1$, $m_i \geqq n_i$ $(i = 1, \cdots\cdots, r)$トスルコトが出来マス。

今$\overline{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h}/\{\mathfrak{Z}^{st}\}$トオキマス。$\overline{\mathfrak{h}}$ノ$p_1$-Sylowgroupハ$\{\overline{\mathfrak{P}}_1, \overline{\mathfrak{Z}}^{p_2^{m_2} \cdots\cdots p_r^{m_r} k}\}$デアリマスが容易ニ分ルヤウニ

$$\overline{\mathfrak{h}} = \{\overline{\mathfrak{P}}_1, \overline{\mathfrak{Z}}^{p_2^{m_2} \cdots\cdots p_r^{m_r} k}\} \times \{\overline{\mathfrak{P}}_2 \times \cdots\cdots \times \overline{\mathfrak{P}}_r, \overline{\mathfrak{Z}}^{p_1^{m_1}}\}$$

デアリマスカラp_1-Sylowgroupデ$\overline{\mathfrak{h}}$デnormalデアリマス。

同様ニシテ各Sylowgroupが凡テnormal subgroupデアルコトが知ラレマス。即チ$\overline{\mathfrak{h}}$ハnilpotentデ且ツ各Sylowgroupハアルabel群ヲcyclic groupデ拡張シタ形ニナッテ居マス。例ヘバp_1-Sylowgroupハ$\{\overline{\mathfrak{P}}_1, \overline{\mathfrak{Z}}^{p_2^{m_2} \cdots\cdots p_r^{m_r} k}\}$デ$\overline{\mathfrak{P}}_1$ノ各element $\bar{A}$ニ對シ

$$\overline{\mathfrak{Z}}^{p_2^{m_2} \cdots\cdots p_r^{m_r} k} \bar{A}\, \overline{\mathfrak{Z}}^{-p_2^{m_2} \cdots\cdots p_r^{m_r} k} = \bar{A}^S$$

$$S \equiv 1 \mod. p. \quad (p = 2 \text{ナラバ} S \equiv 1 \mod. 4)$$

ヨッテ $\bar{\mathfrak{h}}$ ニ對シテハ適當ニ整數 x_1, y_1 ヲトレバ

$$\bar{A}\bar{B} = \bar{A}^{x_1}\bar{B}^{y_1}$$

ガ成立スル（II 參照）

即チ $\quad AB \equiv B^{x_1}A^{y_1} \quad \mathrm{mod.}\ Z^{st},$

$$AB = B^{x_1}A^{y_1}Z^{hst}$$

然ルニ $Z^{st} = A^{u}$ デアルカラ

$$AB = B^{x_1}A^{y_1+hu} = B^{x}A^{y} \quad x = x_1,\ y = y_1 + hu。$$

コレカラ $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ ヲ $\mathfrak{G}$ ノ任意ノ部分群トスレバ

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{b}\mathfrak{a} \qquad (5)$$

ガ成立シマス。（$\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ ハ $A \in \mathfrak{a}$, $B \in \mathfrak{b}$ ナル A, B ニ対シテ AB ナル全体デス。$\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{b}\mathfrak{a}$ ナラバ $\mathfrak{a} \smile \mathfrak{b} = \mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{b}\mathfrak{a}$）任意ノ部分群 $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ ニ對シテ (5) ガ成立スルトキ $\mathfrak{G}$ ヲ *quasi-Hamiltonean group* ト呼ブコトニシマシタ。（II 參照）*quasi-Hamiltonean group* ガ M-*group* デアルコトハヨク知ラレテキマスカラ[2] コレデ証明サレマシタ。

ヨッテ

定理 8. $\mathfrak{G}$ ヲ M-*group*, $\mathfrak{S}$ ヲ $\mathfrak{G}$ ノ有限次ノ *element* ノ全体カラ出来ル $\mathfrak{G}$ ノ *normal subgroup* トスルトキ $\mathfrak{G}/\mathfrak{S}$ ガ *free cyclic group* デアレバ $\mathfrak{G}$ ハ次ノ如キ構造ヲ有ス。

$\mathfrak{G}/\mathfrak{S} = \{\bar{Z}\}$ トシ $\mathfrak{S}$ ノ *p-component* ヲ $\mathfrak{P}$ トスレバ $\mathfrak{P}$ ノ任意ノ *element* A ニ對シ

$$\mathfrak{Z} A \mathfrak{Z}^{-1} = A^{\alpha(p)} \qquad (*)$$

コヽニ $\alpha(p)$ ハ

$$\alpha(p) \equiv 1 \quad \mathrm{mod.}\ p$$

($p=2$ ノトキハ特ニ $\alpha \equiv 1$ mod. 4)

ナル p-adic number デ $\mathfrak{g}$ ノ element ノ order ノ最大ヲ p^n ($n=\infty$ モ入レテ) トスレバ mod. p^n デ逆数モ入レテ云ヘバ一意的ニ定マルモノデアル。

逆ニ torsion バカリノ任意ノ abel 群 $\mathfrak{G}$ ヲ (*) ニヨリ free cyclic group デ拡張シテコレヲ $\mathfrak{G}$ トスレバ $\mathfrak{G}$ ハ quasi-Hamiltonean group トナル。従ッテ勿論 M-group デアル。

次ニ一般ノ場合ヲ考察シマス。abel 群 $\mathfrak{G}/\mathfrak{g}$ ノ rank ガ $\geqq 2$ デアレバ，定理 7 ニヨリ $\mathfrak{G}$ ハ abel 群デスカラ rank $(\mathfrak{G}/\mathfrak{g}) = 1$ トシマス。即チ $\mathfrak{G}/\mathfrak{g}$ ハ有理数ノ加法群ノアル部分群ト isomorph ニナリマス。ヨッテ適當ニ

$$\mathfrak{g} < \mathfrak{G}_1 < \mathfrak{G}_2 < \cdots\cdots < \mathfrak{G} \qquad (8)$$

ナル $\mathfrak{G}$ ノ normalreihe ヲトリ $\mathfrak{G}_1/\mathfrak{g}$ ハ free cyclic group, $\mathfrak{G}_{i+1}/\mathfrak{G}_i$ ($i=1,2,\cdots\cdots$) ハ素数次ノ cyclic group トスルコトが出来マス。$[\mathfrak{G}_{i+1} : \mathfrak{G}_i] = p_i$. (8) ナル列が有限個シカ部分群ヲ含マナケレバ $\mathfrak{G}/\mathfrak{g}$ 自身 free cyclic トナリ，ソレハ定理 8 ニヨリ與ヘラレマス。一般ニハ (8) ハ可附番個ノ部分群列ヲツク

ルワケデス。

サテ任意ノ $\mathfrak{G}_i$ $(i=1, 2, \cdots\cdots)$ ヲトレバ ソレハ定理 8ニ與ヘラレタ構造ヲ有シマス。

$$\mathfrak{G}_i/\mathfrak{C} = \{Z_i\}, \quad Z_i A Z_i^{-1} = A^{\alpha_i(p)}, \quad A \in \mathfrak{P} \tag{9}$$

$[\mathfrak{G}_{i+1} : \mathfrak{G}_i] = p_i$ デ $Z_{i+1}^{p_i}$ ハ $\mathfrak{G}_i/\mathfrak{C}$ ヲ生成シマスカラ コヽニ特ニ

$$Z_{i+1}^{p_i} = Z_i E_i \qquad E_i \in \mathfrak{C} \tag{10}$$

トナル樣ニ Z_{i+1} ヲトルコトガ出來マス。

(9) カラ

$$\alpha_{i+1}(p)^{p_i} \equiv \alpha_i(p) \qquad \mathrm{mod.}\ p^n \tag{11}$$

$$Z_{i+1} Z_i Z_{i+1}^{-1} = Z_i E_i^{1-\alpha_{i+1}} \tag{12}$$

(9)―(11)ニヨリ $\mathfrak{C}$ カラ $\mathfrak{G}$ ニ次第ニ擴張サレテ行ク樣子ガワカリマス。逆ニ $\mathfrak{G} = \{\mathfrak{C}, Z_1, Z_2, \cdots\cdots\}$ ヲ次ノ樣ニツクル; 各素數 p ニ對シ $\alpha_i(p) \equiv 1 \ \mathrm{mod.}\ p$. ($p=2$ ナラバ特ニ $\alpha \equiv 1 \ \mathrm{mod.}\ 4$) ナル $\alpha_i(p)$ $(i=1, 2, \cdots\cdots)$ デ (11) ヲ滿足スルモノヲトリ, 又 $\mathfrak{C}$ カラ任意ニ E_i ヲトレバ (9), (10), (12) ニヨリ, 次々ニ $\mathfrak{C}, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2 \cdots\cdots$ ナル擴張ヲ得ルコトガ出來ル。(*Schreier* ノ *Erweiterungssatz*!)[3]

ソノ $\mathfrak{G}_i$ ノ全体ヲ $\mathfrak{G}$ トスル。然ラバ $\mathfrak{G}$ ハ M-group デアル。

何故ナラバ $\mathfrak{G}$ ノ任意ノ element A, B ヲトレバ A, B ハ共ニアル $\mathfrak{G}_i$ ニ含マレテヰルガ $\mathfrak{G}_i$ ハ定理 8ニ與ヘ

フレタ構造ヲ有スル故

$$AB = B^x A^y$$

ヲ満足スル整数 x, y が存在スル。ヨッテ $\mathfrak{G}$ ハ quasi-Hamiltonean，従ッテ勿論 M-group デアリマス。

定理 9. $\mathfrak{G}$ ヲ M-group，$\mathfrak{C}$ ヲ $\mathfrak{G}$ ノ有限次ノ element 全体カラ成ル normal subgroup トスルトキ $\mathfrak{G}/\mathfrak{C}$ ノ rank が 1 ナラバ $\mathfrak{G}$ ハ次ノ如キ構造ヲ有ス。

$$\mathfrak{G} = \{\mathfrak{C}, Z_1, Z_2, \cdots\cdots\}$$

$\mathfrak{C}$ ノ p-component ヲ $\mathfrak{P}$，A ヲ $\mathfrak{P}$ ノ任意ノ element トスルトキ

$$Z_i A Z_i^{-1} = A^{\alpha_i(p)}$$

コヽニ $\alpha_i(p)$ ハ mod. p^n (p^n ハ $\mathfrak{P}$ ノ element ノ最高ノ order) デ一意的ニ定マル p-adic number デ

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_i(p) \equiv 1 \quad \mathrm{mod.}\ p \\ \qquad\qquad (p=2 \text{ ナラバ } \alpha \equiv 1 \ \mathrm{mod.}\ 4) \\ \alpha_{i+1}(p)^{p_i} \equiv \alpha_i(p) \quad \mathrm{mod.}\ p^n \end{array}\right\} (**)$$

$$Z_{i+1}^{p_i} = Z_i E_i$$

$$Z_{i+1} Z_i Z_{i+1}^{-1} = Z_i E_i^{1-\alpha_{i+1}} \quad (Z_{i+1} E_i Z_{i+1}^{-1} = E_i^{\alpha_{i+1}})$$

p_i ハアル素数（p ニ無関係ニ i ダケニヨッテ定マル）又 E_i ハ $\mathfrak{C}$ ノ element デアル。

逆ニ任意ノ素数列 $\{p_i\}$，$\mathfrak{C}$ ノ任意ノ element

ノ列 $\{E_i\}$ 及ビ各 p ニツイテ（＊＊）ヲ満足スル p-adic number ノ列 $\{\alpha_i(p)\}$ ニ對シ上記 relation ニヨリ與ヘラレル群 $\mathfrak{G}$ ハ quasi-Hamiltonean トナリ、從ッテ Modular トナル。

コノ定理及ビ定理 7 カラ直チニ

定理10. 無限ノ order ヲ持ツ element ヲ含ム群 $\mathfrak{G}$ ニ於テハ quasi-Hamiltonean group ト M-group トハ一致スル。

即チ $\mathfrak{G}$ ノ任意ノ部分群 $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ $\mathfrak{a} \leq \mathfrak{c}$ ニ對シ

$$\mathfrak{a} \cup (\mathfrak{b} \cap \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} \cup \mathfrak{b}) \cap \mathfrak{c}$$

ガ成立スルコト.

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{b}\mathfrak{a} = \mathfrak{a} \cup \mathfrak{b}$$

ガ成立スルコトゝハ等値ニナルノデアリマス。コレハ一寸面白イコトゝ思ヒマス。

以上ニヨリ無限ノ order ヲ持ツ element ヲ含ム M-group 及ビ quasi-Hamiltonean group ノ構造ハ一應分ッタト云ヘルカト思ヒマス。 （終）

（脚註）

1) コレハ"群トソノ lattice ニツイテ I"（紙上談話會談話 909）及ビ"群トソノ lattice ニツイテ II"（位相數學次号）ノ續キデアリマス。II ニ證明ナシデ述ベタ有限群ニ関スル定理ニツイテハ東大紀要 vol 4. Part 3 ヲ參照下サイ。

(脚註ツヅキ)

2) 例ヘバ次ノ様ニ証明サレマス。$\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{c}$ ナルトキ $\mathfrak{a} \cup (\mathfrak{b} \cap \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} \cup \mathfrak{b}) \cap \mathfrak{c}$ ヲ云ヘバヨイワケデスガ $\mathfrak{a} \cup (\mathfrak{b} \cap \mathfrak{c}) \subseteq (\mathfrak{a} \cup \mathfrak{b}) \cap \mathfrak{c}$ ハ明カデアリマスカラ $\mathfrak{a} \cup (\mathfrak{b} \cap \mathfrak{c}) \supseteq (\mathfrak{a} \cup \mathfrak{b}) \cap \mathfrak{c}$ ヲ証明シマス。$\mathfrak{a} \cup \mathfrak{b} = \mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{b}\mathfrak{a}$ デスカラ右辺ニ含マレル element ハ $C = AB$, $A \in \mathfrak{a}$, $B \in \mathfrak{b}$, $C \in \mathfrak{c}$。 $A^{-1}C = B$, $A \in \mathfrak{c}$ ナル故 $B \in \mathfrak{b} \cap \mathfrak{c}$. ヨッテ $C = AB \in \mathfrak{a} \cup (\mathfrak{b} \cap \mathfrak{c})$.

3) 例ヘバ Zassenhausノ Lehrbuch der Gruppentheorie I. S. 89.