979. Lie algebra ノ Faktorensystem

安倍　亮

通常ノ群論ニ於テ,「アラユル可能ナ」群ノ構造ヲ決定シヨウト思ヘバ,先ヅアラユル単純群ヲ決定シテ,次ニソレラヲ Kompositionsfaktoren ニモツ群ヲ合成スルコトガ問題ニナル。ソコデ Normalteiler $\mathfrak{N}$ ト Faktorgruppe $\mathfrak{F}=\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ ヲ與ヘテ $\mathfrak{G}$ ヲ決メルコトガ問題ニナルガ,ソレハ Schreier ノ Erweiterungstheorie ニ依ッテ少クトモ形式的ニハ答ヘラレル。Zassenhaus ガ指摘シテオル様ニ(Über Lie'sche Ringe mit Primzahlcharakteristik (Hamburg XIII, 1939) 5頁), Schreier ノ理論ハ(Lie 群ヲ仲介トシテ) Lie algebra ニ於テモ analog ニ建テルコトガ出来ルノハ殆ンド明デアラウ。

ソレハ「アラユル可能ナ」Lie algebra ノ構造ノ決定ニ,少クトモ形式的ニハ一ツノ手段ヲ提供スルデアラウ。而モ有限群ナドノバアヒヨリ簡単ナコトハ, Lie algebra $\mathfrak{R}$ ノ Radikal ヲ $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{r}$ ノ逐次ノ Ableitung ヲ $\mathfrak{r}'$, $\mathfrak{r}''$, ... トセバ

$$\mathfrak{R} \supset \mathfrak{r} \supset \mathfrak{r}' \supset \cdots \supset \mathfrak{r}^{(m)} = 0$$

ナル Hauptreihe ($\mathfrak{R}$ ノ Ideal ノ Reihe) ガアッテ, $\mathfrak{R}/\mathfrak{r}$ ノミガ halbeinfach, ソノ他ノ Faktor ハ可換デアル。先ヅ下カラ可換ナ Faktor ニヨル Erweiterung ヲ繰返シテ一般ノ auflösbar ナ Lie Algebra ヲ決定スル。(勿論ソレガ実行出来ルト云フノデハナイ。zweistufig meta-abelsch 位デモ既ニカナリ困難デアル。ソシテ最後ノ $\mathfrak{N}$ カラ $\mathfrak{R}$ ヘノ Schritt ハ所謂 Levi ノ定理, Erweiterungstheorie ノ言葉デ言ヘバ「$\mathfrak{R}$ ハ $\mathfrak{N}$ ノ上デ zerfallen スル」ニ依ツテ可ナリ容易ニナル。*)

§1. Faktorensystem

係數体 P ハ任意ノ体トスル。P ノ上ノ Lie-algebra

$$\mathfrak{R} = u_1P + \cdots\cdots + u_rP + v_1P + \cdots\cdots + v_nP$$

ノ中デ

$$\mathfrak{N} = v_1P + \cdots\cdots + v_nP$$

ガ Ideal ヲナストスル; $\mathfrak{R}\circ\mathfrak{N}\subset\mathfrak{N}$. $\mathfrak{f} = \mathfrak{R}/\mathfrak{N}$ トシテ, ソノ構造ハ

(1) $\quad \bar{u}_i \circ \bar{u}_j = \bar{u}_k \gamma_{ij}^k, \quad \gamma_{ij}^k \in P$

デアラハストスル。但シ $\bar{u}_i$ ハ u_i ノ mod $\mathfrak{N}$ ノ Klasse デアル。又 $\bar{u}_k\gamma_{ij}^k$ ハ $\sum_{k=1}^{r} \bar{u}_k\gamma_{ij}^k$ ヲアラハス。以下同様。扨 $v\in\mathfrak{N}$ ニ對シテ

(2) $\quad u_i \circ v = D(u_i)v \in \mathfrak{N}$

---

*) 勿論上カラ作ツテ行ク方法モ考ヘラレル。即チ $\mathfrak{R}/\mathfrak{N}$, $\mathfrak{R}/\mathfrak{N}'$, ……, $\mathfrak{R}/\mathfrak{N}^{(m-1)}$, $\mathfrak{R}$ ヲ順ニ作ルノデアル。此ノ時ハ可換 Ideal ノ擴大ノミガ繰返サレル。

$\mathfrak{v}$ ノ一ツノ一次変換 $D(u_i)$ ヲ生ズルガ，之レハ $v\,w\in\mathfrak{v}$ トスルトキ，u_i, v, w ニ関スル *Jacobi* 條件ニヨッテ

I. $D(u_i)(v\circ w) = D(u_i)v\circ w + v\circ D(u_i)w$

ヲ満足シナケレバナラナイ。即チ $D(u_i)$ ハ $\mathfrak{v}$ ノ無限小自己同型、或ハ Derivation デアル。次ニ $u_i\circ u_j$ ヲ考ヘルニ，(1) ニ依ッテ $u_i\circ u_j \equiv u_k\gamma^k_{ij}\ (\mathfrak{v})$ デアルカラ

(3) $u_i\circ u_j = u_k\gamma^k_{ij}+a_{ij}$, $a_{ij}\in\mathfrak{v}$

$u_i\circ u_j = -u_j\circ u_i$, $u_i\circ u_i=0$ デアルカラ

II. $a_{ij}=-a_{ji}$, $a_{ii}=0$

又 u_i, u_j, v ニ関スル，*Jacobi* 條件

$$u_i\circ(u_j\circ v)-u_j\circ(u_i\circ v)=(u_i\circ u_j)\circ v$$

ニ(2)及(3)ヲ代入シテ

III. $D(u_i)D(u_j)v - D(u_j)D(u_i)v = D(u_k)v\gamma^k_{ij}+a_{ij}\circ v$

又 u_i, u_j, u_k ニ関スル *Jacobi* 條件ニ於テ

$$u_i\circ(u_j\circ u_k)=u_i\circ(u_l\gamma^l_{jk}+a_{jl})$$

$$=u_m\gamma^m_{il}\gamma^l_{jk}+a_{il}\gamma^l_{jk}+D(u_i)a_{jk}$$

デアルカラ，i, j, k ヲ循環シテ加ヘ合セテ，（第一項ノ和ハ 0）

IV. $a_{il}\gamma^l_{jk}+a_{jl}\gamma^l_{ki}+a_{kl}\gamma^l_{ij}+D(u_i)a_{jk}$

$$+D(u_j)a_{ki}+D(u_k)a_{ij}=0$$

定義. Lie Algebra $\mathfrak{G}$ ノ Basis ニ對應シテ Lie Algebra $\mathfrak{v}$ ノ Derivation $D(u_i)$ ガアリ，$\mathfrak{v}$ ノ r^2 ケノ元 a_{ij} ガ II, III, IV ノ條件ヲ滿足スル a_{ij} ノ System ヲ zu $\mathfrak{G}$ gehöriges Faktorensystem aus $\mathfrak{v}$ ト名付ケ，$(D(u_i), a_{ij})$ ト書クコトニスル。

$\mathfrak{R}/\mathfrak{v} \cong \mathfrak{G}$ ナル Lie-algebra $\mathfrak{R}$ ガアレバ，上ノ様ニシテ Faktorensystem ガ定マルガ，逆ニ Faktorensystem カラ $\mathfrak{R}$ ガ作レル事ハ上ノ議論ヲ逆ニ辿レバヨイ。即チ

$\boxed{\text{定理 1}}$ Lie-algebra $\mathfrak{G} = \bar{u}_1 P + \cdots\cdots + \bar{u}_r P$, $\bar{u}_i \circ \bar{u}_j = \bar{u}_k \gamma_{ij}^k$ ノ階数 r ダケノ個數ノ，Lie-algebra $\mathfrak{v}$ ノ Derivation $D(u_i)$, $i = 1, \cdots\cdots, r$, 即チ

$$\text{I} \quad D(u_i)(v \circ w) = D(u_i)v \circ w + v \circ D(u_i)w; \quad v, w \in \mathfrak{v}$$

ヲ滿足スル $\mathfrak{v}$ ノ一次変換 $D(u_i)$ ト，r^2 個ノ $\mathfrak{v}$ ノ元 a_{ij} ガアッテ

$$\text{II} \quad a_{ij} = -a_{ji}, \quad a_{ii} = 0$$

$$\text{III} \quad D(u_i)D(u_j)v - D(u_j)D(u_i)v = D(u_k)v\gamma_{ij}^k + a_{ij} \circ v$$

$$\text{IV} \quad a_{il}\gamma_{jk}^l + a_{jl}\gamma_{ki}^l + a_{kl}\gamma_{ij}^l + D(u_i)a_{jk} + D(u_j)a_{ki} + D(u_k)a_{ij} = 0$$

ヲ滿足スルトキ，換言スレバ $(D(u_i), a_{ij})$ ガ $\mathfrak{G}$ ニ屬

ルル ノ Faktorensystem トルトキ,

$$\mathfrak{R} = u_1 P + \cdots\cdots + u_\gamma P + \mathfrak{v},$$

ハ計算規則

$$(2) \qquad u_i \circ v = - v \circ u_i = D(u_i) v, \quad v \in \mathfrak{v},$$

$$(3) \qquad u_i \circ u_j = u_k \gamma_{ij}^k + a_{ij}$$

ニヨッテ Lie-Algebra ニナリ、$\mathfrak{g} \cong \mathfrak{R}/\mathfrak{v}$ デアル。逆ニ $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{R}/\mathfrak{v}$ ナル $\mathfrak{R}$ ハ総テ此様ニシテ得ラレル。

証明. $\mathfrak{R}$ ガ實際 Lie-Algebra ニナル事. $x \circ y = - y \circ x$, $x \circ x = 0$ ハ, u_i, u_j ニ関シテハ $\gamma_{ij}^k = - \gamma_{ji}^k$ ト II ヨリ, u_i, v ニ関シテハ $\mathfrak{R}$ ニオケル計算規則ノ定義ヨリ, $v, w (\in \mathfrak{v})$ ニ関シテハ $\mathfrak{v}$ ガ始メカラ Lie-Algebra ナルコトヨリ出ル。

又 Jacobi 條件ハ, u_i, u_j, u_k ニ関シテハ IV ヨリ, u_i, u_j, v ニ関シテハ III ヨリ, u_i, v, w ニ関シテハ I ヨリ, $\mathfrak{v}$ ノ中デハ元々 $\mathfrak{v}$ ノ Jacobi 條件ヨリ夫々出ル。

§2. Assoziierte Systeme, Zerfallen.

$\overline{u}_i$ ノ代表トシテ u_i ノ代リニ $u_i^* = u_i + t_i$, $t_i \in \mathfrak{v}$ ヲトレバ

$$\begin{aligned} D(u_i^*) v = u_i^* \circ v &= u_i \circ v + t_i \circ v \\ &= D(u_i) v + t_i \circ v \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_i^* \circ u_j^* &= u_i \circ u_j + u_i \circ t_j - u_j \circ t_i + t_i \circ t_j \\ &= u_k^* \gamma_{ij}^k - t_k \gamma_{ij}^k + a_{ij} + D(u_i) t_j \\ &\qquad - D(u_j) t_i + t_i \circ t_j \end{aligned}$$

トナル。ソコデ

定義. $\mathfrak{G}$ニ屬スル $\mathfrak{N}$ ノ二ツノ *Faktorensystem* $(D(u_i),\ a_{ij})$, $(D(u_i^*),\ a_{ij}^*)$ ガアルトキ，ソノ間ニ

$$(\mathrm{A\,I})\quad D(u_i^*)v = D(u_i)v + t_i \circ v, \quad v \in \mathfrak{N}$$

$$(\mathrm{A\,II})\quad a_{ij}^* = a_{ij} - t_k \gamma_{ij}^k + D(u_i)t_j - D(u_j)t_i + t_i \circ t_j$$

ヲ満足スル $t_1, \text{-----}, t_r \in \mathfrak{N}$ ガ存在スレバ，之等ハ互ニ <u>*assoziiert*</u> デアルトイフ。*) コノコトヲ

$$(D(u_i),\ a_{ij}) \sim (D(u_i^*),\ a_{ij}^*)$$

ト書クコトニスル。

定理2 $\mathfrak{R}, \mathfrak{R}^*$ ハ共ニ $\mathfrak{N}$ ノ $\mathfrak{G}$ ニヨル拡大，即チ $\mathfrak{R}/\mathfrak{N} \cong \mathfrak{G}$, $\mathfrak{R}^*/\mathfrak{N} \cong \mathfrak{G}$ ナル *Ideal* $\mathfrak{N}$ ヲ持ツトスル。$\mathfrak{N}$ ヲ *elementweise* ニ固定シ且ツ $\mathfrak{R}/\mathfrak{N}$ ト $\mathfrak{R}^*/\mathfrak{N}$ ノ $\mathfrak{G}$ デ對應スル *Restklasse* ガ互ニ對應スルヤウナ $\mathfrak{R}$ ト $\mathfrak{R}^*$ ノ同型對應ガアルトキ，$\mathfrak{R}$ ト $\mathfrak{R}^*$ ハ $\mathfrak{N}$-*isomorph* デアルト云フコトニスル。$\mathfrak{R}$ ト $\mathfrak{R}^*$ トガ $\mathfrak{N}$-*isomorph* ナル必要且ツ十分ナ條件ハ，$\mathfrak{R}, \mathfrak{R}^*$ ニ對應スル *Faktorensystem* ガ互ニ *assoziiert* ナル事デアル。

証明 殆ンド明デアラウ。

系 $\mathfrak{R}/\mathfrak{N}$ ノ *Restklasse* ノ代表ガ夫自身 $\mathfrak{R}$ ノ *Teilalgebra* ヲナス様ニ取レルトキ，$\mathfrak{R}$ ハ K ノ上デ

---

*) *assoziiert* ナル関係ガ，反射律，對稱律，推移律ヲ満足スルコトハ，ソノ意味カラ殆ンド明カデアラウ。勿論 A I, II ダケカラ形式的ニ証明スルコトモ出来ル。

zerfallen スルト云フ。ソノタメニハ，Faktorensystem ニ對シテ

$$(\mathrm{Z})\qquad a_{ij}=t_k\gamma_{ij}^k-D(u_i)t_j+D(u_j)t_i-t_i\circ t_j$$

ヲ満足スル $t_1,\cdots\cdots,t_r\in\mathfrak{A}$ ガ存在スルコトガ必要且十分デアル。

§3. Faktorensystem ノ存在ニ關シテ

$\mathfrak{A}$ ト $\mathfrak{g}$ トヲ與ヘタトキ，$\mathfrak{g}$ ニ屬スル $\mathfrak{A}$ ノ Faktorensystem ハ少クトモ一ツハ何時デモ存在スル。ソレハ直和 $\mathfrak{g}+\mathfrak{A}$ ニ對應スルモノデ，$D(u_i)=0,\ a_{ij}=0$ デアル。

併シ r ケノ Derivation ノ集合 $D(u_1),\cdots\cdots,D(u_r)$ ヲ勝手ニ與ヘテモ，必ズシモ $(D(u_i),\ a_{ij})$ ノ形ノ Faktorensystem ガアルカドウカハ分ラナイ。一般ニ $v\in\mathfrak{A}$ ガ $\mathfrak{A}$ ニ生ズル innere Der. ヲ $\underline{v}$ ト書クコトニスル。$\underline{v}$ ノ全体ハ $\mathfrak{A}$ ノ Der. 全体ノ作ル Lie環 $\mathfrak{L}$ ノ中デ Ideal $\mathfrak{J}$ ヲ作ル。條件 III ハ

$$\mathrm{III}\qquad D(u_i)\circ D(u_j)=D(u_k)\gamma_{ij}^k+\underline{a_{ij}}$$

ト書ケルカラ，兎モ角

$$D(u_i)\circ D(u_j)\equiv D(u_k)\gamma_{ij}^k\ (\mathrm{mod.}\ \mathfrak{J})$$

デナケレバナラナイ。換言スレバ $\bar{u}_i\to D(u_i)\ \mathrm{mod}\ \mathfrak{J}$ ハ $\mathfrak{g}$ ノ $\mathfrak{L}/\mathfrak{J}$ 内ヘノ表現*) デナケレバナラナイ。少クトモ之ハ $D(u_i)$ ノ満足スベキ必要條件デアル。サテ斯様ナ $D(u_i)$ ガ與ヘラレヽバ，III カラ $\underline{a_{ij}}$ ガキマル；從ッテ

$\mathfrak{zerfallen}$ スルト云フ。ソノタメニハ，Faktorensystem ニ對シテ

(Z) $a_{ij}=t_k\gamma_{ij}^k-D(u_i)t_j+D(u_j)t_i-t_i\circ t_j$

ヲ滿足スル $t_1,\cdots\cdots,t_r\in\mathfrak{A}$ ガ存在スルコトガ必要且十分デアル。

§3. Faktorensystem ノ存在ニ關シテ

$\mathfrak{A}$ ト $\mathfrak{g}$ トヲ與ヘタトキ，$\mathfrak{g}$ ニ屬スル $\mathfrak{A}$ ノ Faktorensystem ハ少クトモ一ツハ何時デモ存在スル。ソレハ直和 $\mathfrak{g}+\mathfrak{A}$ ニ對應スルモノデ，$D(u_i)=0$, $a_{ij}=0$ デアル。

併シ r ケノ Derivation ノ集合 $D(u_1),\cdots\cdots,D(u_r)$ ヲ勝手ニ與ヘテモ，必ズシモ $(D(u_i),\ a_{ij})$ ノ形ノ Faktorensystem ガアルカドウカハ分ラナイ。一般ニ $v\in\mathfrak{A}$ ガ $\mathfrak{A}$ ニ生ズル innere Der. ヲ $\underline{v}$ ト書クコトニスル。$\underline{v}$ ノ全体ハ $\mathfrak{A}$ ノ Der. 全体ノ作ル Lie 環 $\mathfrak{L}$ ノ中デ Ideal $\mathfrak{I}$ ヲ作ル。條件 III ハ

III $D(u_i)\circ D(u_j)=D(u_k)\gamma_{ij}^k+\underline{a_{ij}}$

ト書ケルカラ，兎ニ角

$$D(u_i)\circ D(u_j)\equiv D(u_k)\gamma_{ij}^k\ (\mathrm{mod.}\ \mathfrak{I})$$

デナケレバナラナイ。換言スレバ $\overline{u}_i\longrightarrow D(u_i)\ \mathrm{mod}\ \mathfrak{I}$ ハ $\mathfrak{g}$ ノ $\mathfrak{L}/\mathfrak{I}$ 内ヘノ表現*) デナケレバナラナイ。少クトモ之ハ $D(u_i)$ ノ滿足スベキ必要條件デアル。扨テ斯様ナ $D(u_i)$ ガ與ヘラレヽバ，III カラ $\underline{a_{ij}}$ ガキマル；從ッテ

a_{ij} が mod. $\mathfrak{z}(\mathfrak{v})$ ($\mathfrak{v}$ ノ Zentrum) デ一意的ニキマル。a_{ij} ヲ mod $\mathfrak{z}(\mathfrak{v})$ デ適當ニトッテ條件 IV が成立ツヤウニデキレバ, Faktorensystem が作レタコトニナルが, 夫ハ一般ニハ出來ルカドウカ分ラナイ。從ッテ $\mathfrak{v} \to \mathfrak{E}/\mathfrak{J}$ ノ表現ナル $D(u_i)$ ニ對シテモ, 必ズ Faktorensystem がアルカドウカハ分ラナイ。然シナがラ, 次ノ定理が成立ツ。

$\boxed{\text{定理 3}}$ III が成立ツナラバ, IV ノ左辺

$$a_{ijk} = a_{il}\gamma^{l}_{jk} + a_{jl}\gamma^{l}_{ki} + a_{kl}\gamma^{l}_{ij}$$

$$+ D(u_i)a_{jk} + D(u_j)a_{ki} + D(u_k)a_{ij}$$

ハ $\mathfrak{v}$ ノ Zentrum $\mathfrak{z}(\mathfrak{v})$ ニ屬スル。

［証明］ $a_{ijk} = 0$ ヲ云ヘバヨイ。III カラ

$$\underline{a_{ij}} = D(u_i)\circ D(u_j) - D(u_k)\gamma^{k}_{ij}$$

デアルカラ

$$\underline{a_{il}\gamma^{l}_{jk}} = D(u_i)\circ D(u_l)\gamma^{l}_{jk} - D(u_m)\gamma^{m}_{il}\gamma^{l}_{jk} \text{ 等}$$

$$\underline{D(u_i)a_{jk}} = D(u_i)\circ \underline{a_{jk}} = D(u_i)\circ(D(u_j)\circ D(u_k))$$

$$- D(u_i)\circ D(u_l)\gamma^{l}_{ij} \text{ 等.}$$

i, j, k ヲ循環シテ加ヘ合セルト

$$\sum_{(i,j,k)} D(u_i)\circ(D(u_j)\circ D(u_k)) = 0$$

及ビ $$\sum_{(i,j,k)} \gamma^{m}_{il}\gamma^{l}_{jk} = 0$$

---

*) 前頁脚註 表現＝Homomorphismus!

ヨリ　$a_{ijk}=0$　　　q.e.d.

從ツテ特別ナ場合ニハ Faktorensystem ノ存在ガウマク云ヘル。例ヘバ

i) $\mathfrak{z}(\mathfrak{n})=(0)$ ノ時

コノトキハ $\bar{u}_i \to D(u_i) \bmod \mathfrak{J}$ ガ表現ニナツテ居レバ，a_{ij} ハ III カラ一意的ニ決ル。ソノ a_{ij} ヲ用ヒテ作ツタ IV ノ左辺 a_{ijk} ハ定理3ニヨリ Zentrum ニ屬スルカラ 0，即チ IV ハ自働的ニ滿足サレ，從ツテ $(D(u_i), a_{ij})$ ハ Faktorensystem ニナル。$D(u_i)$ ノ代リニ mod $\mathfrak{J}$ ノ別ノ Vertreter ヲトツテモ，結局 assoziiert ナ System ガ得ラレルニ過ギナイ。即チ

$\boxed{\text{定理4}}$　「$\mathfrak{n}$ ガ ohne Zentrum ナラバ，$\mathfrak{r}$ ノ $\mathfrak{G}/\mathfrak{n}$ 内ヘノ表現ト $\mathfrak{n}$ ノ $\mathfrak{r}$ ニヨル Erweiterung トガ一對一ニ對應スル。」（特ニ零表現ニハ直和 $\mathfrak{n}+\mathfrak{r}$ ガ對應スル）

ii) $\mathfrak{n}$ ガ abgeschlossen ナル時。

即チ $\mathfrak{z}(\mathfrak{n})=(0)$ デ而モ $\mathfrak{n}$ ノ Derivation ガ盡ク inner 即チ $\mathfrak{G}=\mathfrak{J}$ ナルバアヒデアル。此ノトキ $\mathfrak{r}$ ノ $\mathfrak{G}/\mathfrak{J}$ 内ヘノ表現ハ零表現シカナイ。故ニドンナ $\mathfrak{r}$ ヲトツテキテモ $\mathfrak{n}$ ノ $\mathfrak{r}$ ニヨル Erweiterung ハ唯一ツ，即チ直和 $\mathfrak{r}+\mathfrak{n}$ デアル。

$\boxed{\text{定理5}}$　「Lie-algebra $\mathfrak{R}$ ノ abgeschlossen ナ Ideal $\mathfrak{n}$ ハ必ズ直和因子デアル。即チ $\mathfrak{R}=\mathfrak{n}+\mathfrak{r}$

ナル Ideal $\mathfrak{f}$ ガ必ズアル。」

標數体ノ Charakteristik ガ 0 ナラ halbeinfach ナ Lie-Algebra ハ abgeschlossen デアル。從ッテ halbeinfach ナ Ideal ガアレバ，ソレハ必ズ直和因子デアル。

附記 群論ノ場合ハ $\mathfrak{N}=(A, B, \cdots\cdots)$ ヲ $\mathfrak{U}=(\sigma, \tau, \cdots\cdots)$ デ erweitern スルトシテ，$\sigma=\mathfrak{N}$ ノ Autom. S_σ ヲ對應セシメ，ソレト $\mathfrak{N}$ ノ元 $C_{\sigma,\tau}$ トガ §1 ノ III ニ相應シテ III'. $(A^{S_\tau})^{S_\sigma}=A^{C_{\sigma,\tau}S_{\sigma\tau}}$，IV ニ相應シテ IV'.

$$C_{\sigma,\tau}\,C_{\sigma\tau,\rho}\,C_{\tau,\rho}^{-S_\sigma}\,C_{\sigma,\tau\rho}^{-1}=e$$

ヲ満足スルトキ，$(S_\sigma, C_{\sigma,\tau})$ ヲ Faktorensystem ト云フ。本節ニ述ベタコトハスベテ群デモ成立ツ。$\mathfrak{N}$ ノ Automorphismengrouppe ヲ $A\mathfrak{n}$，ソノ中 innere Autom. ノ作ル Normalteiler ヲ $J\mathfrak{n}$ トセバ，先ヅ III' カラ $\sigma\longrightarrow S_\sigma$ ハ $\mathfrak{U}\longrightarrow A\mathfrak{n}/J\mathfrak{n}$ ノ表現デナケレバナラナイ。ソノトキ III' ヲ満足スル $C_{\sigma,\tau}$ ヲトレバ，定理3ニ相應シテ，IV' ノ左辺ガ $\mathfrak{z}(\mathfrak{N})$ ニ属スル。定理4'「$\mathfrak{z}(\mathfrak{N})=(e)$ ナラ，$\mathfrak{U}\longrightarrow A\mathfrak{n}/J\mathfrak{n}$ ノ表現ト $\mathfrak{N}$ ノ $\mathfrak{U}$ ニヨル Erweiterung トガ一對一ニ對應スル」定理5'「$\mathfrak{N}$ ガ abgeschlossen，即チ $\mathfrak{z}(\mathfrak{N})=(e)$, $A\mathfrak{n}=J\mathfrak{n}$ ナラ，$\mathfrak{N}$ ヲ如何ナル $\mathfrak{U}$ デ拡大シテモ直積 $\mathfrak{N}\times\mathfrak{U}$ シカナイ」モ成立ツ。

§4. 可換 Ideal ノ擴大。

$\mathfrak{V}$ ガ可換ナル場合ヲ考ヘル。コノトキハ $\bar{u}_i$ ノ Vertreter u_i ノ取リ方如何ニ係ハラズ，$D(u_i)$ ハ変ラナイカラ $D(u_i)$ ノ代リニ D_i ト書ク。I―IV ハ

I　自ラ満足サレル。

II　$a_{ij}=-a_{ji},\ a_{ii}=0$

III　$D_iD_j-D_jD_i=D_k\gamma_{ij}^k$

IV　$a_{il}\gamma_{jk}^l+a_{jl}\gamma_{ki}^l+a_{kl}\gamma_{ij}^l+D_ia_{jk}+D_ja_{ki}+D_ka_{ij}$
$=0$

即チ III ハ簡単ニ $\bar{u}_i\rightarrow D_i$ ガ $\mathfrak{f}$ ノ表現ナルコトヲアラハス；$\mathfrak{V}$ ヲ表現加群トスル表現デアル。表現 $u_i\rightarrow D_i$ ガ與ヘラレバ，$(D_i, 0)$ 即チ zerfallen スル Faktorensystem ハ何時デモ存在スル。

assoziiert ノ條件ノ中 (AI) ハ $D_i^*=D_i$ トナリ，$(D_i, a_{ij})\sim(D_i, a_{ij}^*)$ ノ條件ハ

(AII)　$a_{ij}^*=a_{ij}-t_k\gamma_{ij}^k+D_it_j-D_jt_i$ ナル $t_1, \cdots\cdots, t_r$ ノ存在デアル。Zerfallen ノ條件ハ

(Z)　$a_{ij}=t_k\gamma_{ij}^k-D_it_j+D_jt_i$

トナル。

$\boxed{\text{定理 6}}$　$\mathfrak{V}$ ガ可換ナルトキハ，$\mathfrak{f}$ ノ $\mathfrak{V}$ ヲ表現加群トスル任意ノ表現 $\bar{u}_i\rightarrow D_i$ ニ對シ (D_i, a_{ij}) ノ形ノ Faktorensystem ハ存在スル。

D_i ヲ決メタ時 (D_i, a_{ij}) ノ全体ハ

$$(D_i, a_{ij}) + (D_i, b_{ij}) = (D_i, a_{ij} + b_{ij})$$

ナル加法ニヨリ加法群ヲ作ル。a_{ij} ハ一次方程式系II, IVノ解ダカラ，a_{ij} ノ群ハアル有限次元ノ Vektorgruppe ヲナス。ソノ中デ，zerfallen スル。

$$a_{ij} = t_k \gamma_{ij}^k - D_i t_j + D_j t_i$$

ハ Vektoruntergruppe ヲナス。從ツテ assoziiert ナモノヲ Klasse ニ纏メテモ Vektorgruppe ヲナス。即チ $\mathfrak{P}$ ノ $\mathfrak{G}$ ニヨル拡大ニ於テ D_i ヲキメレバ，拡大全体ガ上ノ加法デ Vektorgruppe ヲナス。

〔注意〕 $\mathfrak{P}$ ガ一般ナルトキハ，$D(u_i)$ ヲ決メテモ，Faktorensystem a_{ij} ト b_{ij} ノ和ハ Faktorensystem ニナラナイ。ソレハ III ガ満足サレナイカラデアル。モシ $\mathfrak{G} \to \mathfrak{E}/\mathfrak{I}$ ノ Bild ガ $\mathfrak{I}$ ノ上デ zerfallen スレバ，

$$D(u_i) \circ D(u_j) = D(u_k)\, \gamma_{ij}^k$$

ナルヤウニ $D(u_i)$ ガ選ベル。コノ $D(u_i)$ ヲ固定スレバ III ハ $\underline{a_{ij}} = 0$ 即チ $a_{ij} \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{P})$ デアリ，ソレト II, IV ノ解ナル a_{ij} ハ此ノ時ハ加法デ Vektor 群ヲナス。又 $D(u_i)$ ヲ固定シテアルカラ $t_i \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{P})$ デ，シタガッテ (Z) ハ本節ノ (Z) ノ形ニナリ，zerfallen スルモノハ部分群ニナル。カクシテ始メニ與ヘタ $\mathfrak{G} \to \mathfrak{E}/\mathfrak{I}$ ニ對應スル拡大全体ガ Vektor 群ヲナス。$\mathfrak{P}$ ガ可換ナルバアヒニハ，$\mathfrak{I} = (0)$ トナルカラ，$\mathfrak{E}$ ノスベテノ部分環ハ $\mathfrak{I}$ ノ上デ zerfallen スル。即チ上ノ特別ノ場合ニナル。

例1. γ: halbeinfach

係數体ノ標數ガ0ナラ必ズ zerfallen スル。ソレハ以前ニ詳シク述ベタコトガアルガ，要スルニ、表現 D_i ニ對シテ IV ヲ滿足スル a_{ij} ガイレバ，必ズ (Z) ノ形ニナルコトヲ云ヘバヨイ。ソコデ IV ヲ a_{ij} ニツイテ解クタメニ IV ノ両辺ニ D^k ヲカケテ k デ加ヘル。途中ノ計算ヲ略スガ結果ハ

$$Ca_{ij}+D^k a_{kl}\gamma^l_{ij}-D_i(D^k a_{kj})+D_j(D^k a_{ki})=0$$

トナル。$C=D^kD_k$ ハ Casimir 行列ト呼バレルモノデアル。表現ガ零表現ヲ含マナイナラ，C ハ逆ガアッテ

$$t_i=-C^{-1}D^k a_{ki}$$

ト置ケバ直チニ (Z) ガ成立ツ。C ガ零表現ヲ含ム場合モ容易ニ出ル。之レカラ，一般ニ可解ナ $\mathfrak{r}$ ノ halbeinfach ナ γ ニヨル Erweiterung ガ必ズ zerfallen スルト云フ Levi ノ定理モ直チニ得ラレル。

例2. γ: 可換　即チ $\mathfrak{r}$ ガ (zweistufig) meta-abelsch ノ場合

II　$a_{ij}=-a_{ji}$, $a_{ii}=0$

III　$D_iD_j=D_jD_i$

IV　$D_ia_{jk}+D_ja_{ki}+D_ka_{ij}=0$

(Z)　$a_{ij}=-D_it_j+D_jt_i$

一例トシテ $\mathfrak{r}=(v)$ ガ一次元ノトキヲ考ヘテ見ヨウ。

$\mathfrak{G}$ ノ一次ノ表現ハ

i) 零表現カ

ii) $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_{r-1}$ ノ trace ナ表現，但シ $\mathfrak{G}_{r-1}$ ハ $r-1$ 次元ノ Ideal (＝Teilmodul)

$\mathfrak{G}_{r-1}=(u_2, u_3, \cdots\cdots, u_r)$ ナル如クトリ u_i ノ係數ヲ適當ニスレバ，$D_1 v = v$, $D_2 v = 0, \cdots\cdots, D_r v = 0$

i) IV ハ自ラ滿足サレル。故ニ $a_{ij}=-a_{ji}$, $a_{ii}=0$ 以外，$\{a_{ij}\}$ ハ全ク任意デアル．

(Z) ハ $a_{ij}=0$ トナル。 ∴ Erweiterung ノ Vektorgruppe ノ次元ハ $\{a_{ij}\}$ ノ独立ナ解ノ數，即チ $\frac{1}{2}r(r-1)$ デアル。

$$\begin{cases} u_i \circ u_j = v\alpha_{ij}, \quad \alpha_{ij}=-\alpha_{ji}, \ \alpha_{ii}=0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad i, j = 1, \cdots\cdots, r \\ u_i \circ v = 0 \end{cases}$$

ii) $i, j, k \neq 1$ ナラ IV ハ自然ニ成立ッテ居ル。故ニ $i=1$ トスレバ IV ハ

$$a_{jk}=0, \quad j, k \neq 1;$$

II ハ $a_{1j}=-a_{j1}$, $a_{11}=0$

トナル。Zerfallen ノ條件ハ

(Z) $a_{jk}=0$, $a_{1j}=-t_j \qquad j, k \neq 1$

即チ $t_1=0$, $t_j=-a_{1j}$ トオケバ常ニ滿足サレル。

故ニ此ノ場合ハ必ズ Zerfallen スル。

$$\begin{cases} u_i \circ u_j = 0 \\ u_1 \circ v = v \\ u_j \circ v = 0, \quad j \neq 1 \end{cases}$$