984. Vector lattice, 特ニ談話 980ニツイテ

中山　正（阪大）

前号ノ談話 980ニ於ケル吉田―深宮氏ノ興味アル定理ニツキ，ソレガ Lorenzen ノ Math. Zeitschr. 45 (1939) ノ論文ノ結果ヲ使ッテモ出スコトガ出来ルコトヲ注意シタイト思ヒマス。即チ Lorenzen ハ一般ノ partially ordered abelian group ニツキ色々興味アリ且ツ重要ナ結果ヲ出シテヰルワケデスガ，lattice 的デナク整数論的ニ Teilbarkeit デ言ッテヰルノデ―

寸或ル意味デ見ニクヽナッテヰル点モアリマスガ、ソノ lattice 的言葉ヘノ飜譯ハ Clifford ガ Annals ヤッテヰル通リデアリマス。

サテ Vector lattice 從ッテ（一般ノ partially ordered デナク）lattice-ordered abelian group ガ我々ノ問題デスカラ、ソレニダケ考察ヲ限リマスト，ソレハ Lorenzen ノ §3 デアリ，ソコノ主定理ガ Satz 11（コレト §2，Satz 4 ヲ組合セタモノトイフベキデセウ）デアリ、ソレハ Clifford モ言ッテヰル通リ「任意ノ lattice-ordered abelian group G ハ適當ナ（有限又ハ無限個ノ）linearly ordered abelian groups Γ_τ ノ直積ノ中ニ tren ニ imbed サレル．即チ G ノ x ニ

$$(\cdots\cdots,\ x(\tau),\ \cdots\cdots) \qquad (コヽニ x(\tau)\in\Gamma_\tau)$$

ガ對應シテコノ $x \longrightarrow (\cdots\cdots,\ x(\tau),\ \cdots\cdots)$ ナル對應ハ tren 且ッ G ニオケル群算法（加法的ニカキマス）及ビ束算法ハ componentwise ニシタノニ對應スル：

$$x+y \longrightarrow (\cdots\cdots,\ x(\tau)+y(\tau),\ \cdots\cdots)$$

$$x \curlywedge y \longrightarrow (\cdots\cdots,\ x(\tau) \curlywedge y(\tau),\ \cdots\cdots)」$$

トイフ事ニナリマス。

$x \longrightarrow x(\tau)$ ハ G カラ Γ_τ ノ中ヘノ lattice oredered group トシテノ準同型寫像デスガ、Γ_τ ハ余分ノ所ガナク恰度 G ノ像ダケ、即チ $x \longrightarrow x(\tau)$ ガ Γ_τ ノ<u>上ヘ</u>ノ準同型デアルトシテ係ヒマセンカラ，以下サウシマス。

實數ヲ operator ニモツ lattice-ordered abelian group 即チ vector lattice ノ場合コノ定理ガ operators ヲ考ヘニ入レテ成立スルコトハ明カデアリマセウ。

サテ, G ニ単位 I（<u>アルキメデスノ意味ノ単位</u>）ガアルト假定シマス. 即チ任意ノ $x \in G$ ニ對シテ適當ナ n ヲトレバ $nI \geqq |x|$.

然ラバ $I(\tau)$ ガ Γ_τ ニオケル単位デアルコトハ明カデアル. 更ニアル元 $x \in G$ ガ nilpotent デアルトハ吉田—深宮氏ニ從ッテ $I \geqq m|x|$ for all $m = 1, 2, \cdots\cdots$ ナルコトヽスレバ, ソノタメニハスベテノ τ ニツイテ $I(\tau) \geqq m|x(\tau)|$ for all $m = 1, 2, \cdots\cdots$ ナルコトガ必要且ツ充分ナルコトモ明カデアル. 即チ各 $x(\tau)$ ガ Γ_τ ノ nilpotent ナル事デアル。

$G \longrightarrow$ 實數ナル表現ニオイテ nilpotent $\rightarrow 0$ ハ明カデアルカラ, 吉田—深宮氏ノ定理ノ証明ニハソノ逆, スナハチ x ガ nilpotent デナケレバ $x \rightarrow \alpha \neq 0$ ナル G ノ表現（實數ニヨル）ガアルコトヲ云ヘバヨイ. 然ルニ x ガ nilpotent デナリレバ上述ノ如ク<u>適當ナ</u> τ ヲトレバ, $x(\tau)$ ガ Γ_τ ノ nilpotent デナイ. ソコデ今コノ Γ_τ ノ $\Gamma_\tau \longrightarrow$ 実數ナル表現デ $x(\tau)$ ハ 0 デナイ実数ニウツルコトヲ云ヘバヨイ（$G \longrightarrow \Gamma_\tau \longrightarrow$ 實數, $x \longrightarrow x(\tau) \not\longrightarrow 0$）

即チ linearly ordered ノ Γ（但シ単位 I ヲ有

ス）ニツイテ云ヘバヨイ．然シソレハ殆ンド明カデアル。即チΓハ（Iヲ有スルカラ）確カニ一ツノ，ソシテ（linearダカラ）タダ一ツノ maximal <u>ideal</u>（吉田氏ノ意味．Birkhoff ノ言葉ナラ normal subspace）Mヲモチ、Γ/Mハ simple ナ vector latticeダカラ実数ノ vector lattice デアル．然ルニMハΓノ nilpotent ナ元ノ全体デアル．何故ナラMノ元ノ絶対値（xハリ$\in M$）ヲ何倍シテモ（xカリ$\in M$）ハIヲコヘナイ（従ツテ$\equiv I$，何者Γハ linearly ordered）．何故ナラ$I \notin M$ダカラデアル．逆ニ$x \notin M$ナラ（$x \not\to 0$ナル表現$\Gamma \longrightarrow \Gamma/M$ガアルノダカラ）$x$ハ nilpotent デナイ。（ナホ Clifford ノニアル Hahn ノ定理ヲツカヘバ更ニ明カデスガ、ソノ必要モナイワケデス）

コレデ定理ガ証明サレタワケデアル。

ナホコノ吉田 — 深宮氏ノ結果ニツキ、単位ガアルコトガ，重要デアルコトヲ示スタメ先日ノおぺれーしょんノ会ノ時一寸オ話シシタ例モ Lorenzen ヲヨク見マシタラソノP.550ノ上部ニアル例ト殆ンド同ジモノデアルコトヲ知リマシタ。気ガツカナイデ居タコトハ汗顔ノ至リデス。ナホ上記ノヤウニ Lorenzen ガ使ヘルコトナド気ガツカズ居タノモ相応シイ次第デス。

ナホ、Vector-lattice ニツイテノ種々ナル結果ニツイテ少クモ純代数的ナ点ニ関スル限リ、上記 Lorenzen ノ一般定理（Clifford 式ニ解釈シテ）

カラ言ッタ方ガ簡単ニナルモノガ多クアルノデハナイカト思ヒマス。

同論文ニツイテハ次ノ拙文ヲモ参照サレタイト思ヒマスガ、Vector-lattice 的ニイフニハ乗法的デナク加法的ニ書イタ方ガ見易イデスガ、次ノ拙文デハ non-commutative ナ群ヲ取扱ッタノデヤハリ Lorenzen 同様乗法的ニカキマシタ．ソレデ念ノタメ，コヽニソコノ言葉ノ Vector-lattice 的ナ言葉ヘノ翻訳ヲ書イテオキマス。（ソンナ必要モナイデセウガ！）．ナホ lattice ノ場合，即チ同論文ノ §3 ニノミ限ルコトニシマス。

Vollständig ガ lattice-ordered ノコトハ明カ．マタ $\cup$ ト $\cap$ ヲ dual ニシタ方ガ Vector-lattice ノ言葉ニ云ヒ易イデセウ。t-Ideal ノ意味ハ Clifford デ云ッテアル通リニ束トシテノ Ideal, s-Ideal ハ M-closure．従ッテ 545 頁ノ 5行目ノ式

$a = \frac{a(1\cup a)^{-1}}{(1\cup a)^{-1}}$ ハ（essentially ニハ）a ノ正，負部分ヘノ分解 $a=a^{+}+a^{-}$ ニ相当シ，同ノ 8行目ノ

$\frac{1}{1\cup a}\cup\frac{1}{1\cup a^{-1}}=1$ ハ正，負部分ガ直交：$a^{+}\cap(-a^{-})=0$ ニ相当スルワケ．ソシテ quotient semi-group $\mathfrak{G}_s$ ノ Einheiten ノ集合（即チ $\mathfrak{G}_g - \mathfrak{z}\mathfrak{G}_g$）ガ Birkhoff ノ normal subspace 即チ吉田サンノいでやるニナリマス。然シテソノ際 $\mathfrak{G}_g$ デノ Teilbarkeit デ order ヲツケテ゛トイフノガ゛ソノ normal subspace ヲ mod. トシテ" トイフコトニナルト思ヒマス。

Lorenzen ノ方法ノ巧ミサハ，丁度 linear ニナル様ナ t-Primideal ヲ使ッテアル所デアリ、実際ニオイテハ maximal ナ t-Primideal，即チ residue class vector-lattice ガ linear ナル如キ normal subspace トシテハムシロ minimal ナモノヲ使ッテアッテ maximal ノデナイ点ニアルト思フ. ソノタメニIモナクマタアルキメデス的デナクトモソノ"存在"ニツイテハ何等心配ナシ（Satz 4），ソシテアルキメデス的デナクテモ tren ナ表ハシ方ヲ得テヰルワケデアルト思フ. ソシテコノ兎モ角 linear ニマデモッテ行クコトノ可能性ニツイテハ，吉田サンモ独立ニ最近（紙上デナク黒板上ノ）談話会デ注意サレタ所デモアリマシタ。

―― 以上 ――