992. locally bicompactly bounded ナ空間ニ就テ(I)

寺阪 英孝(阪大)

§1. マヘガキ

locally bicompact ナ Hausdorff 空間ハ極メテ簡単ニ唯一点ヲ附加シテ bicompact ニスルコトガ出来ルガ[1]。例ノ Wallman[2] ソノママノ流儀デ一般ノ bicompactification ヲヤッテ見ルト, Tychonoff[2] ヤ Čech[2] ニアルヨウナ, 収斂列ト云フモノガ全然存在シ

(1) Alexandroff-Hopf: Topologie I. Original ハ Alexandroff: über die Metrisation der im kleinen kompakten topologischen Räume. Math. Ann. 92(1924) コレノ Fundamentalsatz ノトナッテヰル所ハホボエマシク思ハレル。

(2) Wallman: Lattices and topological spaces, Ann. of math., 39(1938)
Tychonoff: Über die topologische Erweiterung von Räumen. Math. Ann. 102(1930)
Čech: On bicompact spaces. Ann. of math. 38 (1937)

ナイト云フ頗ル離解ナ空間ヲ添加スルコトニナツテ了フ。

コレヲ避ケルタメニ私ハ以前A>Bト云フ概念ヲ基ニシテ空間ノ Erweiterung ヲ考ヘテ見タガ[3]コノ>ハ場合ニヨツテ適宜ニ定義セネバナラナイノデ（ソレモ何時モ具合ヨク訳デハナイ）。例ヘバA>BヲA⊃$\overline{B}$即チ Menger ノ記号デ A⋑B ニトツタノデハ Alexandroff ノト同ジニナツテ[4]，空間ノ拡大ハ矢張リ複雑ナモノデアル。

ソレデ如何イフ場合ニ>ガウマク定義出来ルダラウカ考ヘテヰル中，例ヘバ，空間ノ各点 x ノドノ近傍 U∋x ニモ，境界 $\dot{O}$ ガ bicompact デアルヨウナ開集合 O∋x ガ含マレテヰルトキ，斯様ナ空間ナラバ拡大ガ具合ヨク行キソウニ思ハレタ．実際如何ナルカハ後ノ機会ニ述ベルコトトシ，兎モ角コノヤウナ経過デ locally bicompactly bounded ナ空間トイフモノニブツカッタ訳ヲ冒頭ニ才断リスル次第デアル。

§2. （K^n）空間及ビ（LK^n）空間．

繰返シテ言フナラバ，空間Rノ一点 a ノ任意ノ近傍Uヲ a ニ対シ，U⊃O∋a ナル開集合Oガ存在シテ，ソノ境界 $\dot{O}$ ガ bicompact ナルトキ，Rハ a ニ於テ locally

(3) 位相数学第一巻，又ハ Über die Darstellungen der Verbände. 學士院記事．

(4) P. Alexandroff: Bikompakte Erweiterungen topologischer Räume. Recueil Math. T. 5(47) 1939

bicompactly bounded デアルト云ヒ, locally bicompactly bounded デハアルケレドモ locally bicompact デハナイナラバ, R ハ a 点デ $(\dot{K})$ デアルト云フ。ココニ・ハ境界, K ハ bicompact ヲ意味スル. $(\dot{K})$ ノ場合ト locally bicompact ノ場合トヲ双方引クルメテ高々 $(\dot{K})$ デアル, ト云フ言ヒ方ヲスレバ便利ナコトハ次元論ト同ジ。

若シ R ノ各点ガ高々 $(\dot{K})$ デ, 且ツドコカニ $(\dot{K})$ ノ点ガ少クモ一ツ存在スルトキ, R ハ $(\dot{K})$ 空間デアルト云フ。

尚 bicompact ナ空間ヲ (K), locally bicompact デ bicompact デハナイ空間ヲ (LK) ト書クコトニスル。

サテ次元論トノ類推ニヨレバ, 任意ニ小サキ近傍ノ境界ガ (LK) ナ点 $(L\dot{K})$ ダトカ, 任意ニ小サナ近傍ノ境界ガ $(\dot{K})$ ナ点 $(\dot{K})$ ダトカヲ順ニ考ヘルコトガ出来ル訳デ, 一般ニ

$\boxed{\text{定義}}$ R ノ一点 a ノ任意ノ近傍 $U \ni a$ ニ対シ, $U \supset O \ni a$ ナル開集合 O ガ存在シテ, O ノ境界 $\dot{O}$ ガ (K^n) ナラバ, R ハ a ノ所デ高々 (K^{n+1}) デアルト云ヒ, a ノ所デ高々 (K^{n+1}) デアルガ高々 (K^n) デハナイトキ, R ハ a ノ所デ (K^{n+1}) デアルトイフ。(LK^n) ニツイテモ同様ニ定義スル。

(K^n) 空間, (LK^n) 空間モ前同様ニ定義出来ル. 特ニ $(K^0) = (K) =$ bicompact, $(K') = (\dot{K})$,

$(K^2)=(\ddot{K})$ 及ビ $(LK^0)=(LK)$ = *locally bicompact* (*not bicompact*) $(LK')=(L\dot{K})$ 等 Class トシテハ明カ＝(LK)ノ方ガ(K)ヨリ廣ク $(\dot{K})$ ハ(LK)ヨリ廣ク，一般＝

$$(K)\subset(LK)\subset(\dot{K})\subset(L\dot{K})\subset(\ddot{K})\subset\cdots\cdots$$

~~＝(LK)ノ方ガ(K)ヨリハ廣ク，(K̇)ハ(LK)ヨリ廣ク~~

~~一般＝~~

$$\cancel{(K)\subset(LK)\subset(\dot{K})\subset(L\dot{K})\subset(\ddot{K})\subset\cdots}$$

トナル。

サテコノ様ニ全ク次元論ト同様，*recursion formula* ニヨッテ次元數ノ如キモノガ少クモ言葉ノ上カラハ定義ガ出来タケレドモ，果シテカヽル空間ガ存在スルダラウカ．又カヽル空間ガ存在スルトシテモ，*Menger* ヤ *Urysohn* ノ創立シタ次元論ト平行ニ論ゼラレル。タゞソレダケノモノデハナカラウカ，ト云フ疑問ガ起ル。

先ヅ第一ニ必要ナ，存在ニ就テハ，後ニ實例ヲアゲルツモリデアル．第二ノ平行論ニ對シテハ，次元論ト根本的ノ差違ガ次ノ二点ニ存スルコトヲ指摘シテ置キタイ。(5)

1°. 遺傳性 (*heredity*). 次元論デハ，Aガ高々 n 次元ナラバAノ部分空間ハ又高々 n 次元デアルガ，(K^n) ヤ (LK^n) ニハコノ遺傳性ガナイ。*bicompact* (K)ノ部分空間デ (K^n) $(n\geqq 1)$ ナルモノガイクラモツクレル。

---

(5) Kuratowski : *Topologie I.* P.134 參照．文献モアリ。

（實例參照）

2°. F_σ—加法性（F_σ-additivity）. Rが可附番個ノ閉ヂタn次元集合ノ和ナラバ，Rノ次元モ亦nデアルガ，（K^n）デハコノ性質ガナイ．後ノ実例デ見ルヨウニ，閉ヂタ（$\dot{K}$）集合ノ和デ（L$\dot{K}$）ナモノガ存在スル。

コノ1°遺傳性，2°加法性、殊ニ2°ナル重要ナ性質ガ缺ケテヰルタメニ，（K^n）ノ研究ハ仲々困難ナヨウニ思ハレル．少クモ次元論ソノママノ議論ハ適用出来ナイ場合ガ多イ．

ソノタメニ今ノ所残念ナガラ種々ノ実例以外、定理ラシイモノモ求マッテヰナイケレドモ，元来次元論トノ関聯ハ可成アルヨウデ、例ヘバ曲線上ノ集合ノ分布状態ダトカ，一般kompaktデナイn次元集合ダトカヲ調ベルノニ，アル一ツノ見方ヲ與ヘルヨウニ思ハレル。

§3. 實例二，三

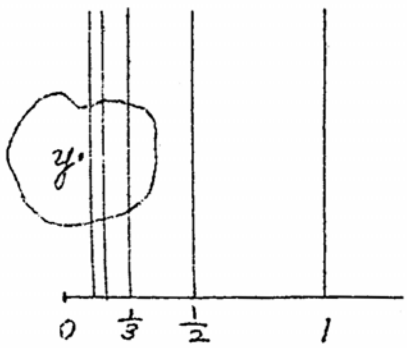
最モ簡便ナ例ヲ二三挙ゲテ、御参考ニ供シタイ．モット大事ナ例ハ後デアゲルツモリデアル。

$\boxed{\text{例1}}$ 直線$-\infty<x<\infty$カラ原点ニ収斂スル点列$x=\frac{1}{n}$（$n=1,2,\cdots\cdots$）ヲ除イタ残ハ，原点ノ所ガ（$\dot{K}$）デアル．外ノ点ハ凡テ（LK）．ヨッテ空間トシテ（$\dot{K}$）空間デアル。

$\boxed{\text{例2}}$ （i）直線上ノ有理点ノミノ集マリハ（$\dot{K}$）空間（ii）無理点ノミノ集マリモ（$\dot{K}$）空間デ區別ハナイ。

$\boxed{\text{例3}}$ （i）平面ヲ考ヘ，x軸上デ原点ニ収斂スル

点列ノ各点 $x=\frac{1}{n}$ カラ y 軸ニ平行線ヲ引キ，コレヲ平面カラ除イタ部分ヲ考ヘレバ，y 軸上ノ点 y ハ凡ヲ $(\ddot{K})$，他ハ $(L K)$ ヨッテコノ空間ハ $(\ddot{K})$ デアル。



(ii) x 軸上ノ有理点ノ各カラ y 軸ニヒイタ平行線ヲ平面カラ除ケバ至ル所 $(\ddot{K})$ 点ノミカラ成ル $(\ddot{K})$ 空間ガ得ラレル。無理点デモ同ジ。

$\boxed{\text{例 4}}$ 平面カラ x 軸ノ正ノ部 $0<x<\infty$，$y=0$ ヲ除イタ残リハ，原点ノ所ガ $(L\dot{K})$ デアル。

$\boxed{\text{問 1}}$ "凡テノ点ガ $(L\dot{K})$ ナル空間ハアルダラウカ"

以上ノ例カラ考ヘテ，(K^n) ヤ (LK^n) ヲ造ルニハ (K^{n-1}) 又ハ (LK^{n-1}) ト直線トノ積空間ヲ考ヘレバヨササウニ思ヘル．コレハ果シテ事実ダラウカ。

(K^n) ヤ (LK^n) ノ実例ヲ製作スル前ニ，差当リ定義カラ譯ナク出セル事柄ヲ二三挙ゲテオキタイ。

§4. 二三ノ簡単ナ定理

先ヅ 0-dim. ノ空間ニハ，各点 x ニ境界ガ空（従ッテ bicompact）ナ開集合ガ，x ノ勝手ナ近傍内ニトレルカラ，0次元空間ハ高々 $(\dot{K})$ デアル．一次元空間デハ近傍ノ境界ガ0次元即チ高々 $(\dot{K})$ ニトレルカラ，一次元空間ハ高々 $(\ddot{K})$ デアル。一般ニ

$\boxed{\text{定理 1}}$ Menger-Urysohn ノ意味デノ n 次元空間ハ高々 (K^{n+1}) デアル。

然ルニ直線又ハ円ノ部分空間ハ一次元デモ0次元デモ境界ガ bicompact ナ任意ニ小サイ近傍ガトレルカラ，高々 $(\dot{K})$ デアル．従ツテ平面内ノ集合ハ近傍トシテ円近傍ヲトレバ各点ガ高々 $(\ddot{K})$ ナルコトガ分リ，一般ニ帰納法ニヨッテ

$\boxed{\text{定理2}}$ Euclid n次空間 R^n ノ部分空間ハ高々 (K^n) デアル。

bicompact ナ空間 (K) ノ部分空間ハ勿論一般ニ (K) デハナイケレドモ，(K) ノ閉集合ハ部分空間ト考ヘテ矢張リ (K) デアル．locally bicompact ナ空間 (LK) ノ閉集合ハ (LK) カ (K) カデアル。ソレ故一般ニ帰納法ニヨッテ

$\boxed{\text{定理3}}$ (K^n) 又ハ (LK^n) 内ノ閉集合ハ夫々高々 (K^n) 及ビ (LK^n) デアル。

コトガ分ル。

（對米英宣戰布告ノ夜シルス）