994. Symmetric group 及ビ full linear group ノ既約表現ニツイテ

小暮　勝美（東大）

1. 問題ノ説明

f 次ノ symmetric group π_f ノスベテノ既約表現ヲ與ヘルベキ表現加群ノ base ヲ作ルコトハ W. Specht. Die irreduziblen Darstellungen der symmetrischen Gruppe. (M. Z. 1935) ニカイテアル。結果ハ簡單デアッテニツノ証明ガノセテアル. 第一ノ方法ハ character ノ性質ヲ澤山使ッテヰル. 第二ノ方法ハ character ヲ使ハナイデ証明スルトナッテヰルガ，ソコノ証明ハ不完全ノヤウニ思ハレル——"Eigensystem" $\vartheta^{(\mu)}$ トイフノガ，変數ノ permutation ニツキ閉ヂタ modul ノ base ニナッテヰルトイフ事ガ証明サレテヰナイヤウデアル。

Young ノ digram ヲ用ヰテ π_f ノ group ring ρ ノ既約ナ left ideal ヲ求メルコトハ Weyl ノ Classical Groups（以下 C. G. トシテ引用スル）ヤ v. d. Waerden，Moderne Algebra，正田：抽象代數學等ニ載ッテヰルガ，ソノ方ノ立場カラ上ノ問題ヲ見ルト，Specht ノ第一ノ方法ヨリモット簡單ナ証明ガ得ラレルヤウニ思フ. 然シ character ノ理論カラ離レルワケニハユカナカッタ。

symmetric group π_f ト f 階ノ tensor space P_f ト密接ナ関係ガアル。ソノタメ π_f ノ場合ノ方法ヲ眞似テ，P_f ノ既約部分ノ base ヲ求メルコトガ出来ル。

2. 準　備

π_f ノ group ring $\mathfrak{p}$（algebraically closed ナ体 K ヲ係数トスル）ノ既約ナ left ideal ヲ求メル方法ハ次ノ様デアッタ。

f ノ partition: $f = f_1 + \cdots\cdots + f_r$, $f_1 \geqq f_2 \geqq \cdots \cdots \geqq f_r > 0$ ……(1)

ニ對應シテ所謂 Young ノ diagram ヲ作ル。ソシテ文字ヲ違ッタ行ヘ移サナイヤウナ permutation ヲ p,

$$\left.\begin{array}{l} 1 \quad 2 \cdots\cdots f_1 \\ f_1+1 \cdots\cdots f_1+f_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ f-f_r+1 \cdots\cdots f \end{array}\right\} (2)$$

違ッタ行ヘ移サナイヤウナ permutation ヲ q トシテ

$$a = \sum_p p, \quad b = \sum_q \delta_q q.$$

ヲ作ル。δ_q ハ q ガ even ナルカ odd ナルカニ從ッテ $+1$ or -1 トスル。

ソシテ $c = ba$ トオクト，$\mathfrak{p}c$ ガ求メルーツノ既約ナ left ideal トナル。尋シクイヘバ $cc = \mu c$, $\mu \neq 0$ スナハチ $\frac{c}{\mu}$ ハ idempotent，而モソレハ primitive ナ idempotent ニナル。ソシテ違ッタ partition ニ対スル c, c' ニツイテハ $\mathfrak{p}c \neq \mathfrak{p}c'$．然ルニ一方 partition ノ数ハ既約表現ノ同値デナイモノノ総数ニ等シイカラ上ノ方法デスベテノ既約 left ideal ノ代表ガ得ラレタコトニナル。

f ノ partition (i) ニ對應スル PC ノ rank（既約表現ノ次數）ヲ $g_{f_1\cdots f_r}$ トスルト 次ノ漸化式ガ成立スル。

$$g_{f_1\cdots f_r} = g_{f_1-1\, f_2\cdots f_r} + g_{f_1\, f_2-1\cdots f_r} + \cdots + g_{f_1\cdots f_r-1} \qquad \text{----(3)}$$

右辺ノ項ハ π_{f-1} ノ既約表現ノ次數デアッテ $f_i = f_{i+1}$ ノトキハ第 $(i+1)$ 項ハステル．又 $f_r = 1$ ノトキハ最後ノ項ハ $g_{f_1\cdots f_{r-1}}$ ヲ意味スルモノトスル。 (C.G. p. 215)

---

f 丁ノ變數 vector $\xi^{(1)} = (\xi^{(1)}_1, \cdots, \xi^{(1)}_n), \cdots, \xi^{(f)} = (\xi^{(f)}_1 \cdots \xi^{(f)}_n)$

ニ關スル multilinear form（K ノ上ノ）全体ヲ P_f トカク．之ハ n^f 次元ノ vector space デアル。

$$P_f \ni F = \sum F(i_1 \cdots i_f)\, \xi^{(1)}_{i_1} \cdots \xi^{(f)}_{i_f}$$

今 $$\xi^{(\nu)}_i \longrightarrow \sum_{j=1}^{n} \xi^{(\nu)}_j a_{ji} \qquad |a_{ij}| \neq 0$$

ナル置換ヲ施シタ結果ヲ

$$AF = \sum F'(i_1 \cdots i_f)\, \xi^{(1)}_{i_1} \cdots \xi^{(1)}_{i_f}$$

トシヨウ。之ハ P_f ノ linear transformation デアル，斯ウイフ operation デ $GL(n) = (A = \|a_{ij}\|;$

$|a_{ij}| \neq 0$) ヲ Operatorenbereich ト考ヘルトキ, P_f ヲ f 階ノ tensor space, F ヲ tensor ト呼バウ。A ナル operation デ成分ハ

$$F'(i_1 \cdots i_f) = \sum_{k_1 \cdots k_f} a_{i_1 k_1} \cdots a_{i_f k_f} F_{k_1 \cdots k_f}$$

ナル変換ヲ受ケル. P_f ノ A ニヨル linear transformation 全体ノ linear closure ヲ $\mathfrak{A}$ トシヨウ。

Tensor F ニ又次 operation ヲ考ヘル.
π_f ヲ $S = \binom{i}{i'}$ トスルトキ

$$FS = \left(\sum F(i_1 \cdots i_f) \xi^{(1)}_{i_1} \cdots \xi^{(f)}_{i_f}\right) S = \sum F(i_1 \cdots i_f) \xi^{(1')}_{i_1} \cdots$$
$$\cdots \xi^{(f')}_{i_f} = \sum F(i_{1'} \cdots i_{f'}) \xi^{(1)}_{i_1} \cdots \xi^{(f)}_{i_f}$$

此ノ linear transformation 全体ノ linear closure ヲ γ トシヨウ. 之ハ ρ ノ homomorphic ナ表現デアル: $\rho \rightrightarrows \gamma$. コノトキ γ ノ 0 ニ對應スル ρ ノ元全体ヲ ρ^0 トスルト, $\rho = \rho_0 + \rho^0$ トシテ ρ ノ ideal ρ_0 ガ一意ニキマリ $\rho_0 \cong \gamma$.

扨テ $\mathfrak{A}$ ハ γ ト commutative ナ linear transformation ノ全体ナルコトが証明サレル. (C.G. P. 130) γ ハ完全可約ダカラ $\mathfrak{A}$ モ完全可約デ, $\mathfrak{A}$ ト commutative ナ linear transformation 全体ハ γ ト一致スル. (C.G. P.95)

即チ γ ハ P_f ノ $\mathfrak{A}$-automorphism ノ ring ト

ナル. コノコトカラ γ^{-} ヲ仲介ニ置イテ ρ_0 ト P_f トノ間ニ次ノヤウナ構造ノ類似ガ成立スルコトガワカル. (前談話参照. 尚ホ今ノ場合ハ $\hat{\rho}_0=\rho_0$ ナルコトニ注意. C.G.p.129) 即チ ρ_0 ノ左 ideal σ ト P_f ノ Ω-subspace Σ トハ

$$\sigma=\rho e\longleftrightarrow P_f e=\Sigma$$

デ一對一ニ對應スル (e ハ ρ_0 ノ中ノ idempotent) ソシテ $\sigma\leftrightarrow\Sigma$, $\sigma_i\leftrightarrow\Sigma_i$ トスレバ

$$\sigma=\sigma_1+\sigma_2\longleftrightarrow\Sigma=\Sigma_1+\Sigma_2$$

從ツテ $\sigma_1\geqq\sigma_2\longleftrightarrow\Sigma_1\geqq\Sigma_2$

又 $\sigma_1\cong\sigma_2\longleftrightarrow\Sigma_1\cong\Sigma_2$ (operator isomorph)

トナル。

之デ P_f ノ構造ガ明カトナル. ソシテ P_f ノ irreducible ナ subspace ノスベテノ代表ハ P_fC デ與ヘラレルコトモワカル. コヽニ C ハ先ニ diagram カラ作ツタ C デアル。

f ノ partition (1) ニ對應スル P_fC ノ rank (A × ····· × A ノ一ツノ既約部分ノ次數) ヲ $h_{f_1\cdots\cdots f_r}$ トシヨウ. スルト, 次ノ漸化式ガ成立スル。

$$h_{f_1\cdots\cdots f_r}=\sum h_{f'_1\cdots\cdots f'_r}$$

右辺ハ n ガ n−1 トナツタトキノ既約部分ノ次數デ

$$f_1\geqq f'_1\geqq f_2\geqq f'_2\geqq\cdots\cdots\geqq f_r\geqq f'_r \qquad (4)$$

ナル關係ヲ滿足スルスベテノ $f'_1,\cdots\cdots,f'_r$ ニツイテノ和トスル. 勿論 $f'_r=0$ ノ場合ハ $h_{f'_1\cdots\cdots f'_r}$ ハ $h_{f'_1\cdots\cdots f'_{r-1}}$ ヲ

意味スルモノトスル。（Weyl：群論ト量子力學第五章）

3. π_f ノ既約表現ヲ求メルコト。

$$x^{(i)}=(x_1^{(i)},\cdots\cdots,x_f^{(i)})\qquad i=1,\cdots\cdots,f$$

ナルfケノf次元變數 vector ヲ考ヘル。ソレカラ $f!$ ケノ monomial

$$x_{i_1}^{(1)}\cdots\cdots x_{i_f}^{(f)}$$

ヲ考ヘル。ココニ $i_1\cdots\cdots i_f$ ハ $1,\cdots\cdots,n$ ノ permutate シタモノトスル。

ソシテ之等ノ linear combination 全体ヲMトカク。之ハ $f!$ 次元ノ K-modul デアル。之ノ次ノ linear transformation ヲ考ヘル。

$$\pi_f\ni S=\begin{pmatrix} j_\alpha \\ i_\alpha\end{pmatrix}\text{ノトキ}\quad S(x_{i_1}^{(1)}\cdots\cdots x_{i_f}^{(f)})=x_{j_1}^{(1)}\cdots\cdots x_{j_f}^{(f)}$$

$$S=\begin{pmatrix} i \\ i'\end{pmatrix}\text{ノトキ}\quad (x_{i_1}^{(1)}\cdots\cdots x_{i_f}^{(f)})S=x_{i_1}^{(1')}\cdots\cdots x_{i_f}^{(f')}$$

コノ operation ヲ左右共ニ π_f カラ P ニ擴ゲル。スルトMハ P-P modul トシテ P ト isomorphic デアル。ソレハ

$$M\ni x_{i_1}^{(1)}\cdots\cdots x_{i_f}^{(f)}\longleftrightarrow\begin{pmatrix} i_1 & \cdots\cdots & i_f \\ 1 & \cdots\cdots & f\end{pmatrix}\in P$$

ナル對應ヲ與ヘテ見レバ明カデアル（此ノ点ヲワカリヨクスルタメニ supufix, suffix ノ位置ヲカヘテ，$x_{(1)}^{i_1}\cdots\cdots x_{(f)}^{i_f}$ トカイテモヨイ）

故ニ　$PC \cong MC$　　（P ヲ Modul トシテ）

ダカラ，π_f ノ既約表現ヲ求メルニハ PC ノ base ノ代リニ MC ノ base ヲ求メレバヨイ。ソレニハ $X_{i_1}^{(1)} \cdots\cdots X_{i_f}^{(f)} \cdot C$ ノ f' ケノ中カラ独立ナモノヲトリ出セバヨイ。

1) 先ヅ $M\mathfrak{b}$ ヲ考ヘヨウ。

記号ヲワカリヨクスルタメニ $X_{i_1}^{(1)} \cdots\cdots X_{i_f}^{(f)}$ ヲ

$$\begin{aligned} & x_{\alpha_1}^{(1)} x_{\alpha_2}^{(2)} \cdots\cdots x_{\alpha_{f_1}}^{(f_1)} \\ & \times x_{\beta_1}^{(f_1+1)} \cdots\cdots x_{\beta_{f_2}}^{(f_1+f_2)} \\ & \cdots\cdots\cdots \\ & \times x_{\rho_1}^{(f-f_r+1)} \cdots\cdots x_{\rho_r}^{(f)} \end{aligned} \tag{5}$$

トカカウ．サテ $\mathfrak{b} = \sum_q \delta_q q$ デアルガ，(2) ニ於テ，第 i 列ノ間ノ文字ダケヲ移シ合フ permutation ヲ q_i トカケバ

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_1 \mathfrak{b}_2 \cdots\cdots \mathfrak{b}_s \qquad \mathfrak{b}_i = \sum_{q_i} \delta_{q_i} q_i \quad (s = f_1)$$

トナル．故ニ (5) ニ $\mathfrak{b}$ ヲ右カラ operate サセルト

$$\left(x_{\alpha_1}^{(1)} x_{\beta_1}^{(f_1+1)} \cdots\cdots x_{\rho_1}^{(f-f_r+1)}\right)\mathfrak{b}_1 \cdot \left(x_{\alpha_2}^{(2)} X_{\beta_2}^{(f_1+2)} \cdots\cdots\right)\mathfrak{b}_2 \cdots$$

$$= \begin{vmatrix} x_{\alpha_1}^{(1)} & x_{\beta_1}^{(1)} & \cdots\cdots & x_{\rho_1}^{(1)} \\ x_{\alpha_1}^{(f_1+1)} & \cdots\cdots & & x_{\rho_1}^{(f_1+1)} \\ \cdots\cdots & & & \\ x_{\alpha_1}^{(f-f_r+1)} & \cdots\cdots & & x_{\rho_1}^{(f-f_r+1)} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_{\alpha_2}^{(2)} & x_{\beta_2}^{(2)} & \cdots\cdots \\ x_{\alpha_2}^{(f_1+2)} & x_{\beta_2}^{(f_1+2)} & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & & \end{vmatrix} \cdots\cdots \tag{6}$$

(5)ニ於テ $\alpha_i, \beta_i, \cdots\cdots$ ヲソノ間ダケデ入レカヘテ得ラレル monomial カラハ符号ヲ無視スレバ同一ノ(6)ガ得ラレルカラ，独立ナモノヲ云ラブタメニハ重複ヲサケル爲メニ，(6)ガノハ

$$\begin{aligned}&\alpha_1 < \beta_1 < \cdots\cdots < \rho_1\\&\alpha_2 < \beta_2 < \cdots\cdots\\&\cdots\cdots\\&\cdots\cdots\end{aligned} \qquad (7)$$

ナルモノノミヲトルコトニスル。

2) 次ニ $M_{ba} = M_c$ ノ base ヲ考ヘルタメニ(6)ニ右カラ a ヲ operate スルト

$$\sum_{\substack{(i,\, i',\, \cdots\cdots)(1,2\cdots\cdots f_1)\\(j,\, j'\cdots\cdots)(f_1+1,\cdots f_1+f_2)\\\cdots\cdots\\(k,k'\cdots)=(f-f_r+1,\cdots\cdots,f)}} \begin{vmatrix} x^{(i)}_{\alpha_1} & x^{(i)}_{\beta_1} & \cdots & x^{(i)}_{\rho_1} \\ x^{(j)}_{\alpha_1} & x^{(j)}_{\beta_1} & \cdots & x^{(j)}_{\rho_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x^{(k)}_{\alpha_1} & \cdots & \cdots & x^{(k)}_{\rho_1} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x^{(i')}_{\alpha_2} & x^{(i')}_{\beta_2} \\ x^{(j')}_{\alpha_2} & x^{(j')}_{\beta_2} \\ \cdots & \cdots \end{vmatrix} \cdots \qquad \cdots\cdots (8)$$

(8)デ $x^{(1)} = \cdots\cdots = x^{(f_1)}$, $x^{(f_1+1)} = \cdots\cdots = x^{(f_1+f_2)}$, $\cdots\cdots$ ト identify シテ此等ヲ改メテ, $x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots\cdots, x^{(r)}$ トカケバ

$$f_1!\,f_2!\cdots\cdots f_r! \begin{vmatrix} x^{(1)}_{\alpha_1} & x^{(1)}_{\beta_1} & \cdots & x^{(1)}_{\rho_1} \\ x^{(2)}_{\alpha_1} & x^{(2)}_{\beta_1} & \cdots & x^{(2)}_{\rho_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x^{(r)}_{\alpha_1} & \cdots & \cdots & x^{(r)}_{\rho_1} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x^{(1)}_{\alpha_2} & x^{(1)}_{\beta_2} & \cdots \\ x^{(2)}_{\alpha_2} & x^{(2)}_{\beta_2} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \\ \cdots & \cdots & \end{vmatrix} \cdots\cdots (9)$$

トナル. 之ニツイテハ右カラノ ρ ノ operation ハ意味ヲ失フガ, 左カラノ operation ハ意味ヲ保存スル. (8) ニ (9) ヲ對應サセルト, スベテノ (8) カラ generate サレル K-modul 即チ Mc ハ, (9) カラ generate サレル K-modul ——之ヲ $(Mc)^*$ トカカウ ——ト ρ 左 modul トシテ isomorphic デアル. ((8) ハ (9) ヲ polarize シタモノデアルコトニ注意スレバ容易ニ証明サレル) 故ニ Mc ノ代リニ $(Mc)^*$ ヲ考ヘルコトニシヨウ. ソノ base ヲ考ヘルニ當ツテハ (9) ノ $f_1 \cdots\cdots f_r$! ハステテヨイ。

(9) ノ α, β_1 ハ (7) ナル條件ガツイテヰタガ, 更ニソノ上ニ

$$
\begin{aligned}
&\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots\cdots < \alpha_{f_1} \\
&\beta_1 < \beta_2 < \cdots\cdots < \beta_{f_2} \\
&\rho_1 < \cdots\cdots < \rho_{f_r}
\end{aligned}
\tag{10}
$$

ナル條件ヲ滿足スルモノダケヲ取リ出サウ. スルトソレガ丁度 $(Mc)^*$ ノ base ニナルノデアル。

$x_1^{(\nu_1)} x_2^{(\nu_2)} \cdots\cdots x_n^{(\nu_n)}$ ニ位フツケル. 即チ

$$x_1^{(\nu_1)} x_2^{(\nu_2)} \cdots\cdots x_n^{(\nu_n)} > x_1^{(\mu_1)} x_2^{(\mu_2)} \cdots\cdots x_n^{(\mu_n)} \cdots\cdots (11)$$

トハ $\nu_n - \mu_n$, $\nu_{n-1} - \mu_{n-1}$, $\cdots\cdots$ ノ中最初ニ 0 デナイモノガ, 正ナルコトヲ意味スルコトニスル. スルト (9) with (7) & (10) ヲ展開シタ中デノ最高位ノモノハ (7) ニヨリ各行列式ノ diagonal term ノ積

$$x_{\alpha_1}^{(1)} x_{\alpha_2}^{(1)} \cdots\cdots x_{\alpha_{f_1}}^{(1)} x_{\beta_1}^{(2)} \cdots\cdots x_{\beta_{f_2}}^{(2)} \cdots\cdots x_{\rho_{f_r}}^{(r)} \tag{12}$$

デアル．トコロガ(10)ノ條件ガアルカラ(12)ハ皆異ル．即チ(9) *with* (11) & (10)ハ一次独立デアル．然ルニ一方(9)，(10)ヲ満足スル $1, \cdots\cdots, n$ ノ配置ノ仕方ハ

$$\begin{aligned} &\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots\cdots < \alpha_{f_1} \\ &\hat{\beta}_1 < \cdots\cdots < \hat{\beta}_{f_2} \\ &\wedge \cdots\cdots \\ &\hat{\rho}_1 < \cdots\cdots < \hat{\rho}_{f_r} \end{aligned} \tag{13}$$

ナル表カラ $\hat{}$ ナル数字ヲ外シテミルコトニヨッテ明カナ如ク，(3)ト同ジ漸化式ヲ満足スル．$f=1$ ノトキハ明カニ(13)ハ一通リシカナク，且ツ $g_1=1$ ダカラ帰納法ニヨリ(13)ナル配置ノ数ハ正ニ $g_{f_1 \cdots\cdots f_r}$ ニ等シイ．即チ $(Mc)^*$ ノ *rank* ニ等シイ．故ニ(9) *with* (13)ハ $(Mc)^*$ ノ *base* ヲナスコトガ分ッタ。

之デ π_f ノ既約表現ヲ実際計算スルコトが出来ル．即チ(9) *with* (13)ヲ

$$d_1 = d_1(x^{(1)}, \cdots\cdots, x^{(r)}),\ d_2, \cdots\cdots, d_g$$

トスルト

$$\pi_f \ni S \qquad S(d_1, d_2, \cdots\cdots, d_g) = (d_1, d_2, \cdots\cdots, d_g)\,(a_{ij})$$

デ $S \rightarrow (a_{ij})$ ガ求メル既約表現デアル．

$$S d_i = \sum_j d_j a_{ji},$$

a_{ji} ヲキメルコトハ (12) ノヤウニ monomial ニ位ヲツケテオイテアルカラ、ソレヲ利用スレバヨイ。尚ホソノトキ (9) ($f_1! \cdots\cdots f_r!$ ヲステヽ) ノ最高位ノ monomial (12) ノ係数ハ1デアルカラ，得ラレル表現ハ有理整数ノミヲ element ニ持ツワケデアル。

4. $A \times \cdots\cdots \times A$ ノ既約部分ヲ求メルコト。

P_f ニツイテモ ρ ノ場合ト全ク同様ナ方法ヲトルコトが出来ル。$\mathfrak{o}$-Modul $P_f C$ ノ base ヲ求メルノデアルが、ソノタメニ先ヅ

1) $P_f \cdot b$ ヲ考ヘヨウ。

P_f ノ base $\quad \xi^{(1)}_{i_1} \xi^{(2)}_{i_2} \cdots\cdots \xi^{(f)}_{i_f}, \quad 1 \leqq i_k \leqq n$

ヲ便宜上次ノヤウニカク。

$$
\begin{array}{l}
\xi^{(1)}_{\alpha_1} \ \xi^{(2)}_{\alpha_2} \cdots\cdots \xi^{(f_1)}_{\alpha_{f_1}} \\
\xi^{(f_1+1)}_{\beta_1} \ \xi^{(f_1+2)}_{\beta_2} \cdots\cdots \xi^{(f_1+f_2)}_{\beta_{f_2}} \\
- - - - - - - - - \\
\xi^{(f-f_r+1)}_{\rho_1} \cdots\cdots \xi^{(f)}_{\rho_{f_r}}
\end{array}
\tag{14}
$$

之ニ $b = b_1 b_2 \cdots\cdots b_s$ ヲ operate スルト

$$
\left(\xi^{(1)}_{\alpha_1} \xi^{(f_1+1)}_{\beta_1} \cdots\cdots \xi^{(f-f_r+1)}_{\rho_1}\right) b_1 \cdot \left(\xi^{(2)}_{\alpha_2} \xi^{(f_1+2)}_{\beta_2} \cdots\cdots\right) b_2 \cdots\cdots
$$

$$
= \begin{vmatrix} \xi^{(1)}_{\alpha_1} & \xi^{(1)}_{\beta_1} \cdots\cdots & \xi^{(1)}_{\rho_1} \\ \xi^{(f_1+1)}_{\alpha_1} & \xi^{(f_1+1)}_{\beta_1} \cdots & \xi^{(f_1+1)}_{\rho_1} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \xi^{(2)}_{\alpha_2} & \xi^{(2)}_{\beta_2} \\ \xi^{(f_1+2)}_{\alpha_2} & \xi^{(f_1+2)}_{\beta_2} \end{vmatrix} \cdots\cdots \tag{15}
$$

$$\begin{vmatrix} \cdots\cdots\cdots \\ \xi_{\alpha_1}^{(f-f_r+1)} \cdots \xi_{\beta_1}^{(f-f_r+1)} \end{vmatrix}$$

(14)ニ於テ $\alpha_i, \beta_i, \cdots\cdots$ ヲソノ間ダケデ入レカヘタヤウナ monomial カラハ，符号ヲ無視スレバ同ジ(15)ヲ得ルカラ重複ヲサケルタメニ，(15)デ

$$\alpha_i \leqq \beta_i \leqq \cdots\cdots \qquad i = 1, 2, \cdots\cdots, f_1$$

トシテヨイ。然シ等号ガ成立スルトキハ(15)ハ0トナッテシマフカラ

$$\alpha_i < \beta_i < \cdots\cdots \qquad i = 1, 2, \cdots\cdots, f_1 \qquad (16)$$

ノミトルコトニシテヨイ。

2) 次ニ $P_f\,ba = P_f\,c$ ヲ考ヘルタメニ(15) with (16)ニ a ヲ operate スルト

$$\sum_{\substack{(i, i', \cdots) = (1, 2, \cdots, f_1) \\ (j, j', \cdots) = (f_1+1, \cdots, f_1+f_2) \\ \cdots\cdots\cdots \\ (k, k', \cdots) = (f-f_r+1, \cdots, f)}} \begin{vmatrix} \xi_{\alpha_1}^{(i)} & \xi_{\beta_1}^{(i)} & \cdots & \xi_{\rho_1}^{(i)} \\ \xi_{\alpha_1}^{(j)} & \xi_{\beta_1}^{(j)} & \cdots & \xi_{\rho_1}^{(j)} \\ \cdots & & & \\ \xi_{\alpha_1}^{(k)} & \cdots & & \xi_{\rho_1}^{(k)} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \xi_{\alpha_2}^{(i')} & \xi_{\beta_2}^{(i')} & \cdots \\ \xi_{\alpha_2}^{(j')} & \xi_{\beta_2}^{(j')} & \cdots \\ \cdots & & \end{vmatrix} \cdots\cdots \qquad (17)$$

ココデ $\xi^{(1)} = \xi^{(2)} = \cdots\cdots = \xi^{(f_1)}, \ \xi^{(f_1+1)} = \cdots\cdots = \xi^{(f_2)}, \cdots\cdots$ ト identify シテ之ヲ改メテ $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \cdots\cdots, \xi^{(r)}$ トカカウ。スルト(17)ハ次ノヤウニナル。($f_1!\,f_2!\cdots\cdots f_r!$ デワッテ)

$$\begin{vmatrix} \xi^{(1)}_{\alpha_1} & \xi^{(1)}_{\beta_1} & \cdots & \xi^{(1)}_{\rho_1} \\ \xi^{(2)}_{\alpha_1} & \xi^{(2)}_{\beta_1} & \cdots & \xi^{(2)}_{\rho_1} \\ \cdots & & & \\ \xi^{(r)}_{\alpha_1} & \cdots & & \xi^{(r)}_{\rho_1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \xi^{(1)}_{\alpha_2} & \xi^{(1)}_{\beta_2} & \cdots \\ \xi^{(2)}_{\alpha_2} & \xi^{(2)}_{\beta_2} & \cdots \\ \cdots & & \end{vmatrix} \cdots \qquad (18)$$

之ハ右カラノ $\int$ ノ operation ハ意味ヲ持タナクナルが $\mathfrak{O}$ ノ operation ハ意味ヲ保存スル。(17)ト(18)トヲ對應サセルト，スベテノ(17)カラ generate サレル K-Modul 即チ $P_f C$ ト，スベテノ(18)カラ得ラレル K-Modul —— 之ヲ $(P_f C)^*$ トカカウ —— トハ $\mathfrak{O}$-isomorphic トナル。故ニ $P_f C$ ノ代リニ $(P_f C)^*$ ヲ考ヘルコトニシヨウ。

扨テ(18)ハ(16)ナル條件がアッタが，更ニソノ上ニ

$$\alpha_1 \leqq \alpha_2 \leqq \cdots \leqq \alpha_{f_1}, \quad \beta_1 \leqq \cdots \leqq \beta_{f_2}, \cdots \qquad (19)$$

ナルモノノミトリ出ス。ソレが丁度 $(P_f C)^*$ ノ base ニナルコトヲ示サウ。

$\xi^{(i)}_{\lambda}$ ニ位ヲツケル。λ が大キイ程位が高リ，同ジ λ ノ中デハ i が大キイ程高位トスル。ソシテ monomial $\xi^{(i_1)}_{\lambda_1} \xi^{(i_2)}_{\lambda_2} \cdots \xi^{(i_f)}_{\lambda_f}$ ハソノ因子ノ最高位ノモノニ注目シテ位ヲ定メル。スルト(18) with (16) & (19) ヲ展開シタ中デノ最高位ハ(16)ニヨリ diagonal term ノ積

$$\xi^{(1)}_{\alpha_1} \xi^{(1)}_{\alpha_2} \cdots \xi^{(1)}_{\alpha_{f_1}} \xi^{(2)}_{\beta_1} \cdots \xi^{(2)}_{\beta_{f_2}} \cdots \xi^{(r)}_{\rho_{f_r}} \qquad (20)$$

デアル。然ルニ(19)ニヨリ(20)ハ皆異ナル。故ニ(18) with

(16) と (19) ハ一次独立デアル。一方 (16), (19) ヲ満足スル。

$$\begin{array}{l} \alpha_1 \leqq \alpha_2 \leqq \cdots\cdots \leqq \alpha_{f_1} \\ \hat{\beta}_1 \leqq \hat{\beta}_2 \leqq \cdots\cdots \leqq \hat{\beta}_{f_2} \\ \hat{\wedge} \cdots\cdots \hat{\wedge} \\ \rho_1 \leqq \rho_2 \leqq \cdots\cdots \leqq \rho_{f_r} \end{array} \qquad (21)$$

ナル配置ハ之カラ，n ナル数字（0 ヶ以上 f_1 ヶ以下）ヲ外シテミテワカルヤウニ (4) ト同ジ漸化式ヲ満足スル，ソシテ $n=1$ ノトキハ $r>1$ ナラバ $h_{f_1\cdots\cdots f_r}=0$，$r=1$ ナラバ $h_{f_1}=1$ (21) ノ配置ノ上方ノ数ニツイテモ同様ダカラ帰納法ニヨリ (21) ノ配置ノ仕方ノ数ハ正ニ $h_{f_1\cdots\cdots f_r}$ ニ等シイ。ソレハ P_fC 従ッテ $(P_fC)^*$ ノ rank デアルカラ，(18) with (21) ハ求メル $(P_fC)^*$ ノ basis デアル。

故ニ (18) with (21) ヲ $F_1=F_1(\xi^{(1)},\cdots\cdots\xi^{(\nu)})$, $F_2,\cdots\cdots,F_h$ トスルト

$$A\,(F_1\,F_2\cdots F_h)=(F_1,\cdots\cdots,F_h)\,(b_{ij})$$

デ，(b_{ij}) ハ $A\times\cdots\cdots\times A$ ノ P_fC ニ対応スル既約部分トナル。—— 之ハ a_{ij} ノ f 次ノ同次式ヲ element トスル matrix デアル。

特ニ P_fC ガ symmetric tensor カラ成ル irreducible subspace ナル場合ハ (18) ハ $\xi^{(1)}=\xi$ トカケバ $\xi_1^{\mu_1}\xi_2^{\mu_2}\cdots\cdots\xi_n^{\mu_n}$ $(\mu_1+\cdots\cdots+\mu_n=f)$ ノ全体デアリ，又 P_fC ガ antisymmetric tensor 全体

カラ成ル場合ハ (18) ハ

$$\begin{vmatrix} \xi_\alpha^{(1)} & \xi_\beta^{(1)} \cdots\cdots \xi_\rho^{(1)} \\ & \text{------} \\ & \text{------} \\ \xi_\alpha^{(f)} & \text{------} \; \xi_\rho^{(f)} \end{vmatrix}, \quad \alpha < \beta < \cdots\cdots < \rho$$

ノ全体デアル.(ル≧fデナイト存在シナイ)

之等ハヨク適用サレテキル。

5. π_f ノ場合ノ別証明

§3 ノ方法ハ§4 ノト全ク同ジニエクノデアッタガ, 問題ヲ π_f ノミニ限レバ次ノヤウニヤレバモット簡単デアラウ。

$$f \in K[X^{(1)}, \cdots\cdots, X^{(r)}] \qquad X^{(i)} = (X_1^{(i)}, X_2^{(i)}, \cdots\cdots, X_f^{(i)})$$

ニ対シテ $\pi_f \ni S = \begin{pmatrix} i \\ i' \end{pmatrix}$, $sf(x_1^{(1)}, \cdots\cdots, x_f^{(1)}; x_1^{(2)}, \cdots, x_f^{(2)}, \cdots)$

$$= f(x_{1'}^{(1)}, \cdots\cdots x_{f'}^{(1)}; x_{1'}^{(2)} \cdots\cdots x_{f'}^{(2)} \cdots\cdots)$$

ト定義スル. 此ノ operation ヲ ρ マデ拡張スル. サテ

$$p(x) = x_1^{(1)} \cdots\cdots x_f^{(1)}, \; x_{f_1+1}^{(2)} \cdots\cdots x_{f_1+f_2}^{(2)} \cdots\cdots x_f^{(r)}$$

ヲ考ヘヨウ. 之ニ左カラ $C = ba$ ヲ operate スル

$$cp(x) = bap(x) = bp(x)$$

$$= b_1(x_1^{(1)} x_{f_1+1}^{(2)} \cdots\cdots) \, b_2(X_2^{(1)} \cdots\cdots) \cdots\cdots$$

$$= \begin{vmatrix} x_1^{(1)} & x_{f_1+1}^{(1)} & \cdots & x_{f-f_r+1}^{(1)} \\ \cdots & & & \\ x_1^{(r)} & x_{f_1+1}^{(r)} & \cdots & x_{f-f_r+1}^{(r)} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_2^{(1)} & \cdots \\ \cdots & \\ \cdots & \end{vmatrix} \cdots = d(x)$$ ト

カカリ。

$$\therefore \quad \rho c\, p(x) = \rho d(x)$$

然ルニ $\rho c \rightrightarrows \rho c d(x)$ ハ ρ-homomorphic, ρc ハ irreducible, $\rho c d(x) \neq (0)$ ダカラ $\rho c \cong \rho c\, d(x)$

$$\therefore \quad \rho c \cong \rho d(x)$$

故ニ ρc ノ base ノ代リニ $\rho d(x)$ ノ base ヲ考ヘレバヨイ。

ソレハ $\begin{vmatrix} x_{\alpha_1}^{(1)} & x_{\beta_1}^{(1)} & \cdots & x_{\rho_1}^{(1)} \\ x_{\alpha_1}^{(2)} & x_{\beta_1}^{(2)} & \cdots & x_{\rho_1}^{(2)} \\ \cdots & & & \\ x_{\alpha_1}^{(r)} & \cdots & & x_{\rho_1}^{(r)} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_{\alpha_2}^{(1)} & \cdots \\ \cdots & \end{vmatrix} \cdots$ $\begin{matrix} \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_{f_1} \\ \wedge \quad \wedge \\ \beta_1 < \beta_2 < \cdots < \beta_{f_2} \\ \wedge \quad \wedge \\ \cdots \\ \rho_1 < \rho_2 < \cdots < \rho_{f_r} \end{matrix}$

デ與ヘラレルコトハ §3 ノ後半ト全様ニ証明サレル.

6. 一ツノ恒等式

A ノ characteristic value ヲ $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ トスルト, ρc ニ對應スル $A \times \cdots \times A$ ノ既約部分ノ character ハ

$$\chi(f_1 \cdots f_n; A) = \frac{|\varepsilon^{l_1} \varepsilon^{l_2} \cdots \varepsilon^{l_n}|}{|\varepsilon^{n-1} \cdots \varepsilon 1|}$$

デアル。ココニ　$l_i = f_i + (n-i)$デ

$$|\varepsilon^{l_1} \cdots\cdots \varepsilon^{l_n}| = \begin{vmatrix} \varepsilon_1^{l_1} & \cdots\cdots & \varepsilon_1^{l_n} \\ & \cdots\cdots & \\ \varepsilon_n^{l_1} & \cdots\cdots & \varepsilon_n^{l_n} \end{vmatrix}$$

トスル。

今(18)ヲ用キルト

$$\chi(f_1 \cdots f_n; A) = \sum \varepsilon_{\alpha_1} \cdots\cdots \varepsilon_{\alpha_{f_1}} \varepsilon_{\beta_1} \cdots\cdots \varepsilon_{\beta_{f_2}} \cdots \varepsilon_{\rho_{f_r}}$$

$\sum$ハ(21)ノ如キsuffix ニツイテノ総和デアル。故ニ

~~恒等式~~

$$\frac{|\varepsilon^{l_1} \cdots\cdots \varepsilon^{l_n}|}{|\varepsilon^{n-1} \cdots\cdots 1|} = \sum \varepsilon_{\alpha_1} \cdots\cdots \varepsilon_{\alpha_{f_1}} \varepsilon_{\beta_1} \cdots\cdots \varepsilon_{\beta_{f_2}} \cdots\cdots \varepsilon_{\rho_{f_r}}$$

$$\begin{aligned} &\alpha_1 \leqq \alpha_2 \leqq \cdots\cdots \leqq \alpha_{f_1} \\ &\wedge \quad \wedge \\ &\beta_1 \leqq \beta_2 \leqq \cdots\cdots \leqq \beta_{f_2} \\ &\wedge \cdots\cdots \wedge \\ &\wedge \\ &\rho_1 \leqq \cdots\cdots \leqq \rho_{f_r} \end{aligned}$$

ガ間接ニ証明サレタコトニナル。左辺ノ分子ハ$\varepsilon_1, \cdots\cdots, \varepsilon_n$ニツイテノ交代式，分母ハ最簡交代式ダカラ商ハ對称式ニナルワケデアルガ，上式ハソレヲ書キ下スニ便利デアラウ。

特ニ　$f_1 = f$，$f_2 = \cdots\cdots = f_r = 0$　トスレバ

$$\frac{|\varepsilon^{f+(n-1)} \varepsilon^{n-2} \cdots\cdots \varepsilon\, 1|}{|\varepsilon^{n-1} \varepsilon^{n-2} \cdots\cdots \varepsilon\, 1|} = \sum_{\alpha_1 \leqq \cdots \leqq \alpha_f} \varepsilon_{\alpha_1} \varepsilon_{\alpha_2} \cdots\cdots \varepsilon_{\alpha_f}$$

$$= \sum_{\mu_1 + \cdots + \mu_n = f} \varepsilon_1^{\mu_1} \varepsilon_2^{\mu_2} \cdots\cdots \varepsilon_n^{\mu_n}$$

又　$f_1 = f_2 = \cdots\cdots = f_f = 1$　ナラバ

$$\frac{\left|\varepsilon^{n}\ \varepsilon^{n-1}\cdots\cdots\varepsilon^{-}\ \varepsilon\right|}{\left|\varepsilon^{n-1}\ \varepsilon^{n-2}\cdots\cdots\varepsilon\ 1\right|}=\sum_{i_1<\cdots<i_f}\varepsilon_{i_1}\varepsilon_{i_2}\cdots\cdots\varepsilon_{i_f}=f$$

次ノ初等對稱式

此等ハヨク知ラレタ式デアル。

——（終リ）——