998. Vector Lattice ノ表現

前田 文友
小笠原 藤次郎 (廣島文理大)

Vector lattice ノ表現ニツイテハ，ステニ我國ニ於テ多クノ人々ニヨツテ論ゼラレテ居ルノデアルガ，コヽデハ F. Wecken[1] ノ characteristic family ヲ用フル比較的初等的ナ方法ヲ述ベタイト思フ。

§1. ニ於テハ unit ヲ有スル vector lattice L ヲ考ヘ，L ノ principal ideal ノ全体 P ハ distributive lattice ヲナシ，L ノ要素ニ對應スル characteristic family ハ principal ideal ノ列 $(\mathfrak{a}_\lambda;\ -\infty<\lambda<\infty)$ デアルカラ，P ヲ Wallman ノ方法デ集合族ニ表現スルトキハ，$\{\mathfrak{a}_\lambda\}$ ハ単調ニ増加スル集合列ニ表現サレル。

コレカラ点函數ヲ作レバ，L ハ連續函數ノ族ニ linear-lattice-homomorphic ニ表現サレル。コレガ isomorphic デアルタメニハ，L ガ Archimedean デナケレバナラヌコトヲ述ベル。

§2 ニ於テハ unit ノ存在ヲ假定シナイ Archimedean vector lattice L ヲ考ヘ，L ノ normal ideal ノ全体 N ハ complete Boolean algebra ヲナシ，L ノ要素ニ對應スル characteristic family ハ normal ideal ノ列ニナル．コノ N ヲ

§1ノ如ク表現スルコトニヨリテ，Lノ表現ヲ求メル。

§3ニ於テハ σ-complete 或ハ complete vector lattice Lヲ考ヘル。

コノトキハ上ノ方法デ唯ノ vector lattice トシテハ表現出来ルガ，ソレガ σ-complete 或ハ complete vector lattice トシテ lattice-isomorphic デアルトハ云ヘナイ．故ニコヽデハ Lノ要素ヲ値ニ持ツ measure ノ概念ヲ導入シテ，measure zero ノ集合ヲ無視スレバ，成立スルコトヲ示ス。

但シ§2ト§3トハソノ概略ヲ示スニ止メタ。

§1. Lヲ vector lattice トスル．即チLハ實數ヲ係數トスル linear space デアッテ，順序 $x \geqq y$ ヲ $x-y \geqq 0$ デ定義スルトキ，Lハ lattice ヲ作ッテ居ル．コノトキLハ distributive デアッテ，尚

$$(x \vee y)+z=(x+z) \vee (y+z),$$

$$(x \wedge y)+z=(x+z) \wedge (y+z)$$

ガ成立スル．$x_+ = x \vee 0$，$x_- = -(x \wedge 0)$，$|x| = x_+ + x_-$ ト定義スル．コノトキ $x = x_+ - x_-$ デアル。

$x, y \in L$ トスル．モシ $|x| \wedge |u| = 0$ ナルスベテノ u ニ對シテ $|y| \wedge |u| = 0$ デアルトキハ $y < x$ ト書ク．$y < x$，$x < y$ ガ同時ニ成立スルトキハ $x \sim y$ ニテ示ス．スベテ

前頁脚註

(1) F. Wecken, Abstrakte Integrale and fast periodische Functionen, Math. Zeit 45(1939), 382

ノ $x \in L$ ニ對シテ $x < e$ ナルガ如キ $e > 0$ ガ存在スルトキハ，e ヲ L ノ <u>unit</u> ト云フ。$e \wedge |x| = 0$ ナルトキハ $x = 0$ デアル。

補助定理 1.1 (i) $x \smile |x|$, $x \smile \lambda x$ $(\lambda \neq 0)$

(ii) $x, y \geqq 0$ ナルトキハ $x \vee y \sim x + y$

(證) (i) $x \sim |x|$ ハ定義カラ明ラカデアル。今 $|x| \wedge |u| = 0$ ナル u ヲトリ，$|\lambda x| \wedge |u| = y$ トオク。$|\lambda x| \geqq y$, $|\lambda u| \geqq |\lambda| y$ デアルカラ $|\lambda|(|x| \wedge |u|) \geqq y \wedge |\lambda| y \geqq 0$ 故ニ $y = 0$. 即チ $\lambda x < x$. λ ノ代ニ $\frac{1}{\lambda}$ ヲオケバ $x < \lambda x$. 故ニ $x \sim \lambda x$.

(ii) ハ $x \vee y \leqq x + y = x \vee y + x \wedge y \leqq 2(x \vee y)$ カラ明リデアル。

L ノ sublattice $\mathfrak{a}$ ニ於テ，$x \in \mathfrak{a}$, $y < x$ ナルトキ常ニ $y \in \mathfrak{a}$ デアルトキハ $\mathfrak{a}$ ヲ L ノ <u>ideal</u> デアルト云フ. ideal ハ linear デアルコトハ補助定理 1.1 ヲ用ヒテ容易ニ証明シ得ル. H ヲ L ノ部分集合トスルトキ，H' ヲ H ノスベテノ要素 y ニ對シテ $|x| \wedge |y| = 0$ ナルガ如キ x ノ集合トスル. H' ガ ideal デアルコトモ容易ニワカル。

$x \in L$ ガ與ヘラレタルトキ $y < x$ ヲ満足スル y ノ集合 $\mathfrak{a}(x)$ ハ ideal デアル. コレヲ <u>principal ideal</u> ト云フ. 補助定理 1.1 カラ $\mathfrak{a}(x) = \mathfrak{a}(|x|)$ デアル. 故ニ今後ハ $\mathfrak{a}(x)$ トカケバ $x \geqq 0$ ナルモノト約束スル.

<u>補助定理 1.2</u> $\mathfrak{a}(x) \vee \mathfrak{a}(y) = \mathfrak{a}(x \vee y) = \mathfrak{a}(x+y)$,

$\mathfrak{a}(x) \wedge \mathfrak{a}(y) = \mathfrak{a}(x \wedge y)$

（証）$\mathfrak{a}(x) \leqq \mathfrak{a}(x \vee y)$, $\mathfrak{a}(y) \leqq \mathfrak{a}(x \vee y)$ ハ明ラカデアル．$\mathfrak{a}(x) \leqq \mathfrak{a}(z)$, $\mathfrak{a}(y) \leqq \mathfrak{a}(z)$ ナレトキハ $x < z$, $y < z$ デアル．今 $z \wedge |u| = 0$ トスレバ

$(x \vee y) \wedge |u| = (x \wedge |u|) \vee (y \wedge |u|) = 0$　故ニ $x \vee y < z$．即チ $\mathfrak{a}(x \vee y) \leqq \mathfrak{a}(z)$　故ニ $\mathfrak{a}(x \vee y)$ ハ $\mathfrak{a}(x)$ ト $\mathfrak{a}(y)$ トノ join デアル。

又 補助定理1.1ヨリ　$\mathfrak{a}(x \vee y) = \mathfrak{a}(x + y)$

$\mathfrak{a}(x) \geqq \mathfrak{a}(x \wedge y)$, $\mathfrak{a}(y) \geqq \mathfrak{a}(x \wedge y)$ ハ明ラカデアル．$\mathfrak{a}(x) \geqq \mathfrak{a}(z)$, $\mathfrak{a}(y) \geqq \mathfrak{a}(z)$ トスレバ $x > z$, $y > z$ デアル．今 $x \wedge y \wedge |u| = 0$ トハルトキハ $x > z$ ナレバ $z \wedge y \wedge |u| = 0$.

シカルニ $y > z$ ナレバ $z \wedge z \wedge |u| = 0$．即チ $z \wedge |u| = 0$ 故ニ $x \wedge y > z$．従ッテ $\mathfrak{a}(x \wedge y) \geqq \mathfrak{a}(z)$．故ニ $\mathfrak{a}(x \wedge y)$ ガ $\mathfrak{a}(x)$ ト $\mathfrak{a}(y)$ トノ meet デアル。

定理1.1　vector lattice L ノ principal ideal ノ全体 $\mathbf{P}$ ハ distributive lattice デアル。

（証）補助定理1.2カラ $\mathbf{P}$ ハ lattice ヲ作リ，尚 L ガ distributive デアルコトカラ $\mathbf{P}$ モ distributive ナルコトガワカル。

以後本節ニ於テハ L ハ unit e ヲ有スルモノト仮定スル．任意ノ $x \in L$ ニ對シテ $\mathfrak{a}_\lambda = \mathfrak{a}((x - \lambda e))$ トオクトキ，$(\mathfrak{a}_\lambda;\ -\infty < \lambda < \infty)$ ヲ x ノ <u>characteristic family</u> ト云フ。

補助定理1.3. $\mathfrak{X}$ ノ characteristic family ヲ $\{\mathfrak{a}_\lambda^{(x)}\}$ トシ，尚 $t_\lambda^{(x)}=\mathfrak{a}((x-\lambda e)_+)$ トオクトキハ，次ノコトガ成立スル。

(i) $\lambda<\mu$ ナルトキハ $\mathfrak{a}_\lambda^{(x)}\leqq\mathfrak{a}_\mu^{(x)}$

(ii) $\lambda<\mu$ ナルトキハ $t_\lambda^{(x)}\vee\mathfrak{a}_\mu^{(x)}=L$

(iii) $\mathfrak{a}_\lambda^{(x)}\wedge t_\lambda^{(x)}=\mathfrak{o}$ (1)

(iv) $\mathfrak{a}_\lambda^{(x)}\vee\mathfrak{a}_\mu^{(y)}\geqq\mathfrak{a}_{\lambda+\mu}^{(x+y)}$

(v) $\mathfrak{a}_\lambda^{(x)}\wedge\mathfrak{a}_\lambda^{(y)}=\mathfrak{a}_\lambda^{(x\vee y)}$

(證) (i) 定義ヨリ明ラカデアル。

(ii) $\lambda<\mu$ ナルトキハ

$$
\begin{aligned}
(x-\lambda e)_+ + (x-\mu e)_- &= (x-\lambda e)\vee 0+(-x+\mu e)\vee 0\\
&=(\mu-\lambda)e\vee(x-\lambda e)\vee(-x+\mu e)\vee 0\\
&\geqq(\mu-\lambda)e
\end{aligned}
$$

故ニ補助定理1.2ヲ用フレバ

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{a}((x-\lambda e)_+)\vee\mathfrak{a}((x-\mu e)_-) &= \mathfrak{a}((x-\lambda e)_+ + (x-\mu e)_-)\\
&\geqq\mathfrak{a}((\mu-\lambda)e)=L
\end{aligned}
$$

(iii) $(x-\lambda e)_-\wedge(x-\lambda e)_+=0$。

カラ明ラカデアル。

(iv)
$$
\begin{aligned}
(x-\lambda e)_- + (y-\mu e)_- &= (\lambda e-x)\vee 0+(\mu e-y)\vee 0\\
&=((\lambda+\mu)e-(x+y))\vee(\lambda e-x)\vee(\mu e-y)\vee 0\\
&\geqq((\lambda+\mu)e-(x+y))\vee 0=(x+y-(\lambda+\mu)e)_-
\end{aligned}
$$

---

(1) $\mathfrak{o}$ ハ 0 ノミカラナル ideal

カラ成立スル。

(v) $(x \vee y - \lambda e)_- = ((x-\lambda e) \vee (y-\lambda e))_-$
$$= (x-\lambda e)_- \wedge (y-\lambda e)_-$$

カラ成立スル。

P ハ distributive lattice デアルカラ，コレヲ Wallman ノ方法ニヨッテ表現スル。(1) 先ヅ P ハ Wallman ノ所謂 disjunction property ヲ満足スル. 即チ $\mathfrak{a}(x)$, $\mathfrak{a}(y)$ ヲ P ノ相異ナル二要素トスルトキハ，$\mathfrak{a}(x) \wedge \mathfrak{a}(z)$, $\mathfrak{a}(y) \wedge \mathfrak{a}(z)$ ノ何レカガ θ ナル如キ $\mathfrak{a}(z)$ ガ存在スル. ソレハ例ヘバ $\mathfrak{a}(x) \neq \mathfrak{a}(y)$ ナルトキハ，$x \nleq y$ デアルカラ $y \wedge z = 0$, $x \wedge z \neq 0$ ナル $z > 0$ ガ存在スル。ソノトキ $\mathfrak{a}(z)$ ガ求ムルモノデアル。

P ノ maximal additive ideal $\mathfrak{J}^*$ ノ全体ヲ Ω トスル. $\mathfrak{a} \in$ P ニ對シテ $\mathfrak{a}$ ヲ含ム maximal additive ideal ノ全体ヲ $\mathfrak{a}^*$ ニテアラハストキハ，P ハ $\mathfrak{a}^*$ ノ如キ集合ノ族 P^* ニヨッテ lattice-isomorphic ニ表現サレル. 今 P^* ヲ底トスルガ如ク Ω ヲ位相化スルトキハ，Ω ハ totally-disconnected デアッテ $\mathfrak{a}^*$ ハ開集合ニシテ同時ニ閉集合デアル。

コノトキ characteristic family $\{\mathfrak{a}_\lambda\}$ ハ Ω ニ於ケル集合族 $\{\mathfrak{a}_\lambda^*\}$ ニ寫サレル. $\{\mathfrak{a}_\lambda^*\}$ カラ次ノ如

(1) H. Wallman, Lattices and Topological spaces, Annals of Math. 39 (1938), 112-126

クシテ点函数 $f(\mathfrak{p}^*)$ ヲ作ル。

$$f(\mathfrak{p}^*)=g.l.b.(\lambda;\ \mathfrak{p}^*\in\mathfrak{a}_\lambda^*)=l.u.b.(\lambda;\ \mathfrak{p}^*\notin\mathfrak{a}_\lambda^*)$$

コンデ $\mathfrak{p}^*\in\mathfrak{a}_\lambda^*$ 及ビ $\mathfrak{p}^*\notin\mathfrak{a}_\lambda^*$ ハ，前ノ表現ノ方法ニヨリ，夫々 $\mathfrak{a}_\lambda\in\mathfrak{p}^*$ 及ビ $\mathfrak{a}_\lambda\notin\mathfrak{p}^*$ ト同一ノコトヲ意味スル．λノ如何ニ関ラズ $\mathfrak{p}^*\in\mathfrak{a}_\lambda^*$ ナルトキハ $f(\mathfrak{p}^*)=-\infty$ デアリ，又λノ如何ニ関ラズ $\mathfrak{p}^*\notin\mathfrak{a}_\lambda^*$ ナルトキハ $f(\mathfrak{p}^*)=+\infty$ デアル。

補助定理 1.4. $x\in L$ ノ characteristic family ヲ $\{\mathfrak{a}_\lambda^{(x)}\}$ トシ，コレニ對應スル点函数ヲ $f_x(\mathfrak{p}^*)$ ニテ表ハストキハ次ノコトガ成立スル。

(i) $f_x(\mathfrak{p}^*)$ ハ連續函数デアル。

(ii) x ガ 0 ノトキハ $f_x(\mathfrak{p}^*)$ ハ恒等的ニ 0 デアル。

(iii) $f_{-x}(\mathfrak{p}^*)=-f_x(\mathfrak{p}^*)$

(iv) $f_{\mu x}(\mathfrak{p}^*)=\mu f_x(\mathfrak{p}^*)$

(v) $f_{x+y}(\mathfrak{p}^*)=f_x(\mathfrak{p}^*)+f_y(\mathfrak{p}^*)$

(vi) $f_{x\vee y}(\mathfrak{p}^*)=\max[f_x(\mathfrak{p}^*),\ f_y(\mathfrak{p}^*)]$

(vii) $f_{x\wedge y}(\mathfrak{p}^*)=\min[f_x(\mathfrak{p}^*),\ f_y(\mathfrak{p}^*)]$

〔証〕(i) 今 $f(\mathfrak{p}_0^*)=\lambda_0$ (有限) ナルトキハ

$\mathfrak{a}_{\lambda_0-\varepsilon}^*-\mathfrak{a}_{\lambda_0-\varepsilon}^*$ ハ $\mathfrak{p}_0^*$ ヲ含ム開集合デアッテ，$\mathfrak{p}^*\in\mathfrak{a}_{\lambda_0+\varepsilon}^*-\mathfrak{a}_{\lambda_0-\varepsilon}^*$ ナルトキ $|f(\mathfrak{p}^*)-\lambda_0|\leqq\varepsilon$ デアル。

故ニ $f(\mathfrak{p}^*)$ ハ $\mathfrak{p}_0^*$ デ連続デアル。又 $f(\mathfrak{p}_0^*)=+\infty$ ナル

トキハ，$\Omega - \mathfrak{a}^*_\lambda$ ハ $\mathfrak{p}^*_0$ ヲ含ム開集合ニシテ，
$\mathfrak{p}^* \in \Omega - \mathfrak{a}^*_\lambda$ ナルトキハ $f(\mathfrak{p}^*) \geqq \lambda$. $f(\mathfrak{p}^*_0) = -\infty$ ノトキモ同様ニ云ヘル。

(ii) $x = 0$ ノトキハ

$$\mathfrak{a}^{(x)}_\lambda = \mathfrak{a}((1-\lambda e)_-) = \begin{cases} L & \lambda > 0 \text{ ノトキ} \\ \theta & \lambda \leqq 0 \text{ ノトキ} \end{cases}$$

ナルコトカラ明ラカデアル。

(iii) $\mathfrak{a}^{(-x)}_\lambda = \mathfrak{a}((-x-\lambda e)_-) = \mathfrak{a}((x+\lambda e)_+)$ ニシテ，
補助定理1.3 (ii) ヨリ

$\mu < \lambda$ ナルトキハ

$$\mathfrak{a}((x+\lambda e)_+) \vee \mathfrak{a}((x+\mu e)_-) = L \tag{1}$$

今 $f_{-x}(\mathfrak{p}^*) = g.l.b.(\lambda;\ \mathfrak{a}^{(-x)}_\lambda \in \mathfrak{p}^*) = \lambda_0$ (有限) トスル。任意ノ $\mu < \lambda_0$ ニ對シテ $\mu < \lambda < \lambda_0$ ナル λ ヲトレバ $\mathfrak{a}((x+\lambda e)_+) \notin \mathfrak{p}^*$. 故ニ (1) ヨリ
$\mathfrak{a}((x+\mu e)_-) \in \mathfrak{p}^*$.
從ッテ $f_x(\mathfrak{p}^*) = g.l.b.(\lambda;\ \mathfrak{a}((x-\lambda e)_-) \in \mathfrak{p}^*) \leqq -\mu$
$\mu \to \lambda_0$ ナラシメレバ

$$f_x(\mathfrak{p}^*) \leqq -\lambda_0 \tag{2}$$

次ニ任意ノ $\mu > \lambda_0$ ニ對シテ $\lambda_0 < \mu < \lambda$ ナル λ ヲトレバ $\mathfrak{a}((x+\lambda e)_-) \in \mathfrak{p}^*$. 故ニ (1) ヨリ $\mathfrak{a}((x+\mu e)_-) \notin \mathfrak{p}^*$
從ッテ $f_x(\mathfrak{p}^*) \geqq -\mu$. $\mu \to \lambda_0$ ナラシメレバ

$$f_x(\mathfrak{p}^*) \geqq -\lambda_0 \tag{3}$$

故ニ $f_x(\mathfrak{p}^*) = -\lambda_0 = -f_{-x}(\mathfrak{p}^*)$. 次ニ $f_{-x}(\mathfrak{p}^*) = \infty$ ノトキハ (2) ヲ証明シタ様ニシテ $f_x(\mathfrak{p}^*) \leqq -\infty$. 即

$f_x(\mathfrak{p}^*) = -\infty$. 又 $f_{-x}(\mathfrak{p}^*) = -\infty$ ノトキハ (3) ヲ証明シタ様ニシテ $f_x(\mathfrak{p}^*) = \infty$

(iv) (ii), (iii) カラ $\mu > 0$ ノトキヲ証明スレバヨイ。コノトキハ

$$\mathfrak{a}_\lambda^{(\mu x)} = \mathfrak{a}\left((\mu x - \lambda e)_-\right) = \mathfrak{a}\left(\left(x - \frac{\lambda}{\mu} e\right)_-\right) = \mathfrak{a}_{\frac{\lambda}{\mu}}^{(x)}$$

カラ成立スル。

(v) 先 $f_x(\mathfrak{p}^*) = \lambda_0$, $f_y(\mathfrak{p}^*) = \mu_0$ が共ニ有限トスル。$\lambda < \lambda_0$, $\mu < \mu_0$ ナル任意ノ λ, μ ヲトルトキハ $\mathfrak{a}_\lambda^{(x)} \not\subset \mathfrak{p}^*$, $\mathfrak{a}_\mu^{(y)} \not\subset \mathfrak{p}^*$. 故ニ $\mathfrak{a}_\lambda^{(x)} \vee \mathfrak{a}_\mu^{(y)} \not\subset \mathfrak{p}^*$.(1)

従ッテ補助定理1.3 (iv) ヨリ $\mathfrak{a}_{\lambda+\mu}^{(x+y)} \not\subset \mathfrak{p}^*$. 即チ $f_{x+y}(\mathfrak{p}^*) \geqq \lambda + \mu$. 従ッテ

$$f_{x+y}(\mathfrak{p}^*) \geqq f_x(\mathfrak{p}^*) + f_y(\mathfrak{p}^*) \qquad (4)$$

(4) ハ x, y ノ代リニ $-x$, $-y$ ヲ入レタルトキモ成立スルカラ

$$f_{-x-y}(\mathfrak{p}^*) \geqq f_{-x}(\mathfrak{p}^*) + f_{-y}(\mathfrak{p}^*)$$

故ニ (iii) カラ $$f_{x+y}(\mathfrak{p}^*) = f_x(\mathfrak{p}^*) + f_y(\mathfrak{p}^*) \qquad (5)$$

次ニ $f_x(\mathfrak{p}^*) = +\infty$, $f_y(\mathfrak{p}^*) = \mu_0$ (有限) ナリト

---

(1) maximal additive ideal ハ prime additive ideal デアル. (Wallman, 上掲, P. 116, 脚註)

スル。$\lambda<+\infty$, $\mu<\mu_0$ ナル任意ノ λ, μ ヲトルトキハ上ノ如クシテ $f_{x+y}(\mathfrak{p}^*)\geqq\lambda+\mu$. 故ニ $f_{x+y}(\mathfrak{p}^*)=+\infty$ ヨッテ (5) ガ成立スル。同様ニシテ $f_x(\mathfrak{p}^*)$, $f_y(\mathfrak{p}^*)$ ノ一方ガ $+\infty$, 他方ガ $-\infty$ ノ場合以外ハ (5) ガ成立スルコトガ証明出来ル。

(vi) 補助定理 1.3 (v) ヨリ $\mathfrak{a}_\lambda^{(x\vee y)}=\mathfrak{a}_\lambda^{(x)}\wedge\mathfrak{a}_\lambda^{(y)}$ 故ニ

$$\begin{aligned} f_{x\vee y}(\mathfrak{p}^*) &= g.l.b.\,(\lambda;\ \mathfrak{a}_\lambda^{(x)}\wedge\mathfrak{a}_\lambda^{(y)}\in\mathfrak{p}^*) \\ &= \max[g.l.b.\,(\lambda;\ \mathfrak{a}_\lambda^{(x)}\in\mathfrak{p}^*),\ g.l.b.\,(\lambda;\ \mathfrak{a}_\lambda^{(y)}\in\mathfrak{p}^*)] \\ &= \max[f_x(\mathfrak{p}^*),\ f_y(\mathfrak{p}^*)] \end{aligned}$$

(vii) ハ (iii) 及ビ (vi) カラ成立スル。

定理 1.2 unit ヲ有スル vector lattice L ハ totally-disconnected ナル空間 Ω ニ於テ定義セラレタ連續函數ノ族 L^* ニヨッテ linear-lattice-homomorphic ニ表現サレル。

(証) $(f_x(\mathfrak{p}^*);\ x\in L)$ ヲ L^* ニテアラハストキハ補助定理 1.4 ヨリコノ定理ハ成立スル。

但シ $x\vee y$ ニ對應スル函數ハ $\max[f_x(\mathfrak{p}^*), f_y(\mathfrak{p}^*)]$, 即チ一点 $\mathfrak{p}^*$ ニ於ケル $f_x(\mathfrak{p}^*)$, $f_y(\mathfrak{p}^*)$ ノ大ナル方ヲ値ニトル函数デアル. 故ニ委シク云ヘバ, Ω ニ於テ定義セラレタルアラユル点函数ノ全体 F^* ヲ考ヘ, $f, g\in F^*$ ナルトキ, $f\geqq g$ ヲスベテノ点 $\mathfrak{p}^*$ ニ於テ $f(\mathfrak{p}^*)\geqq g(\mathfrak{p}^*)$ ガ成立スルコトニヨリテ定義スルトキハ, F^* ハ一ツノ vector lattice デアル. コノ定理ハ L^* ヲコノ F^* ノ vector sublattice ト考ヘテモ lattice-homomorphic デアルコトヲ意味スル。

補助定理 1.5. x ノ表現 $f_x(\mathfrak{p}^*)$ ガ恒等的ニ 0 ナルタメノ必要且ツ充分ナル條件ハ，スベテノ $\lambda>0$ ニ対シテ $|x|<\lambda e$ ガ成立スルコトデアル。

(証) コノ表現ハ linear-homomorphic デアッテ $x=x_+-x_-$ デアルカラ，$x\geqq 0$ ノ場合ヲ考ヘレバ充分デアル。シカルニ $f_x(\mathfrak{p}^*)$ ガ恒等的ニ 0 ナルタメニハ

$$\alpha_\lambda^{(x)}=\alpha((x-\lambda e)_-)=\begin{cases}L & \lambda>0 \text{ ナルトキ}\\ 0 & \lambda\leqq 0 \text{ ナルトキ}\end{cases}$$

ナルコトガ必要且ツ充分デアル．シカルニ $\alpha((x-\lambda e)_-)$ ハ $\alpha((x-\lambda e)_+)=0$ デアルカラ $\lambda>0$ ノトキ $\alpha((x-\lambda e)_-)=L$ ナルコトハ $\alpha((x-\lambda e)_+)=\theta$, 即 $(x-\lambda e)_+=0$, 即 $x\leqq\lambda e$ ナルコトト同等デアル。

定理 1.3 スベテノ $\lambda>0$ ニ對シテ $|x|<\lambda e$ ナルガ如キ x ノ集合ヲ N トスルトキハ，L^* ハ L/N ニ linear-lattice-isomorphic デアル。

(証) N ハ normal subspace ヲ作ル. Birkhoff, Lattice theory P.109 カラ，コレハ一ツノ linear-lattice-homomorphism ヲ決定スルガ，補助定理 1.5 カラ，コレハ $L\to L^*$ ニ外ナラナイ．故ニ L/N ト L^* トハ linear-lattice-isomorphic デアル。

定理 1.3 ノ isomorphism $L/N\longleftrightarrow L^*$ ニ於テ，

L/N ノ中ノ二ツノ異ナル要素 x, y ノ L^* ニ於ケル表現 $f_x(\mathfrak{p}^*)$, $f_y(\mathfrak{p}^*)$ ガ何レモ恒等的ニ $+\infty$ デアルトキハ、$x \neq y$ ナルニ関ラズ、$f_x(\mathfrak{p}^*) = f_y(\mathfrak{p}^*)$ ナルコトガアリ得ル。(局部的ニ無限大ノ値ヲトル場合デモ、カヽル場合ガ起ル) コレハ $\infty - \infty$ ガ不定デアルコトカラ出テ来ル。次ニ述ベルガ如ク、L ヲ Archimedean ニスレバ、コレガ除カレルノミナラズ、$L \longrightarrow L^*$ ガ isomorphism ニナル。ソレヲ考ヘル前ニ若干ノ注意ヲ與ヘル。

E ヲ L ノ部分集合トスルトキハ、一般ニハ $\bigvee_{x \in E} x$ ガ存在スルトハ限ラナイガモシコレガ存在スルトキハ

$$\bigvee_{x \in E} x + y = \bigvee_{x \in E} (x+y), \quad \bigwedge_{x \in E} x + y = \bigwedge_{x \in E} (x+y),$$

$$\bigvee_{x \in E} x \wedge u = \bigvee_{x \in E} (x \wedge u), \quad \bigwedge_{x \in E} x \vee u = \bigwedge_{x \in E} (x \vee u)$$

ガ成立スルコトハ容易ニ証明シ得ル. 次ニ極限ノ概念ヲ拡張スル。

$\{x_\delta\}$ ヲ L ノ要素ノ directed set トスル. モシ x 及ビ二ツノ directed set $\{u_\delta\}$, $\{w_\delta\}$ ガ存在シ

(i) スベテノ δ ニ対シテ $u_\delta \leqq x_\delta \leqq w_\delta$

(ii) $\delta < \delta'$ ナルトキハ $u_\delta \leqq u_{\delta'}$, $w_{\delta'} \leqq w_\delta$ ニシテ $\bigvee_\delta u_\delta$ 及ビ $\bigwedge_\delta w_\delta$ ガ存在シ

$$\bigvee_\delta u_\delta = x = \bigwedge_\delta w_\delta$$

ガ成立スルトキ $x_\delta \to x$ ニテアラハス.

カク極限ノ概念ヲ定義スルトキハ $x_\delta \to x$ ナルトキ

$x_\delta \vee y \to x \vee y$, $x_\delta \wedge y \to x \wedge y$, $\lambda x_\delta \to \lambda x$,
$x_\delta + y \to x + y$

ガ成立スルコトハ容易ニ証明シ得ル。

vector lattice L ニ於テ，スベテノ $x \in L$ ニ対シテ，$\lambda \to 0$ ナルトキ $\lambda x \to 0$ デアルトキハ L ハ <u>Archimedean</u> デアルト云フ。

補助定理1.6 L ガ Archimedean vector lattice ナルトキ，x ノ characteristic family ヲ $\{\mathfrak{a}_\lambda\}$ トスレバ $\bigwedge_\lambda \mathfrak{a}_\lambda = \theta$ デアル。(1)

(証) $\lambda < 0$ ノ如何ニ関ラズ $z \in \mathfrak{a}_\lambda = \mathfrak{a}((x-\lambda e)_-)$ ナル $z \geqq 0$ ガ存在スルトセバ $z < (x-\lambda e)_-$. 故ニ $z \wedge (x-\lambda e)_+ = 0$. 即チスベテノ $\lambda < 0$ ニ対シテ $z \wedge (\frac{x}{\lambda} - e)_- = 0$. $\lambda \to -\infty$ ナラシメレバ $z \wedge e = 0$. 故ニ $z = 0$. 従ッテ $\bigwedge_\lambda \mathfrak{a}_\lambda = 0$.

定理1.4. L ガ unit e ヲ有スル Archimedian vector lattice ナルトキハ，L ハ L^* ニヨッテ linear-lattice-isomorphic ニ表現サレル。又任意ノ $x \in L$ ニ対シテ $f_x(\mathfrak{p}^*)$ ガ無限大ナル点 $\mathfrak{p}^*$ ノ集合ハ非稠密デアル。

(証) L ガ Archimedean ナレバ $N = \theta$ デアルカラ，定理ノ前半ハ定理1.3カラ明カデアル．後半ヲ証明スルニハ，今 $f_x(\mathfrak{p}^*) = -\infty$ トスル．即チ λ ノ如何ニ関ラ

---

(1) 尚 $\bigvee_\lambda \mathfrak{a}_\lambda = L$ ガ成立スル.

ズ $\mathfrak{a}_\lambda \in \mathfrak{q}^*$ デアル. $\mathfrak{a}(y) \in \mathfrak{q}^*$ ナル任意ノ principal ideal $\mathfrak{a}(y)$ ヲトルトキハ, 補助定理1.6 カラ相當ニ小ナル $\lambda_0 < 0$ ヲトレバ $\mathfrak{a}(y) \not\equiv \mathfrak{a}_{\lambda_0} = \mathfrak{a}((x-\lambda_0 e)_-)$ 即チ $y \not\in (x-\lambda_0 e)_-$. 故ニ $(x-\lambda_0 e)_- \wedge z = 0$, $y \wedge z \neq 0$ ナル $z > 0$ が存在スル. $\mathfrak{a}(y)$, $\mathfrak{a}(z)$ ヲ含ム maximal additive ideal ヲ $\mathfrak{p}^*$ トスルトキハ $\mathfrak{a}_{\lambda_0} = \mathfrak{a}((x-\lambda_0 e)_-) \notin \mathfrak{p}^*$.

故ニ $f_x(\mathfrak{p}^*) = l.u.b.\ (\lambda;\ \mathfrak{a}_\lambda \notin \mathfrak{p}^*) \geqq \lambda_0$.

即チ $\mathfrak{q}^*$ ノ任意ノ近傍 $\mathfrak{a}^*(y)$ ニハ $f_x(\mathfrak{p}^*) \neq -\infty$ ナルガ如キ点 $\mathfrak{p}^*$ が存在スル. 從ッテ $f_x(\mathfrak{q}^*) = -\infty$ ナルガ如キ点 $\mathfrak{q}^*$ ノ集合ハ非稠密デアル. x ノ代リニ $-x$ ヲ考ヘレバ, $f_x(\mathfrak{q}^*) = \infty$ ナル点 $\mathfrak{q}^*$ ノ集合ニツキテモ同様ニ云ヒ得ル.

$f_x(\mathfrak{p}^*)$ ハ連続函数デアルカラ, コノ定理ニヨリ $f_x(\mathfrak{p}^*)$ ノ値ハ函数値が有限ナル点ニヨッテ定マル. 故ニ前ニ述ベタ ∞ ノ場合ノ不明瞭が除カレル.

§2. 次ニ unit ノ存在ヲ假定シナイ vector lattice L ノ表現ヲ考ヘル. 前節カラワカル様ニ, isomorphic ナ表現ヲ得ルタメニハ, L ハ Archimedean デナケレバナラナイ. ソレデコノ節デハ始カラ L ハ Archimedean デアルト假定スル. ソウデナイトキハ L/N ヲ考ヘレバヨイ.

L ノ ideal $\mathfrak{a}$ が $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}''$ ヲ満足スルトキ, $\mathfrak{a}$ ヲ normal ideal ト云フ. principal ideal ハ

normal デアル。

定理2.1. L ノ normal ideal ノ全体 N ハ complete Boolean algebra デアル.

アマリ長クナルカラ以下証明ハ省略スルガ, コノ定理ヲ証明スルニ必要ナ次ノ補助定理ダケヲ証明シテオカウ。

補助定理2.1 $\mathfrak{a}$ ヲ ideal トシ, $y>0$ トスル. モシ y ガ集合 $(y \wedge x;\ x \in \mathfrak{a})$ ノ l.u.b. デナイトキハ, $(y \wedge x;\ x \in \mathfrak{a})$ ノ任意ノ upper bound $y_1 < y$ ヲトレバ, $y - y_1 \in \mathfrak{a}'$ デアル.

(証) モシ $y - y_1 \notin \mathfrak{a}'$ トスレバ $(y - y_1) \wedge x \neq 0$, $x \in \mathfrak{a}$ ナル $x>0$ ガ存在スル。$u = (y - y_1) \wedge x$ トオケバ, $u \in \mathfrak{a}$ ナレバ y_1 ノ定義カラ $y_1 \geqq y \wedge u = u$. 他方 $y - y_1 \geqq u$ ナレバ, $y \geqq y_1 + u \geqq 2u$. 又 $2u \in \mathfrak{a}$ ナレバ, y_1 ノ定義ヨリ $y_1 \geqq y \wedge 2u = 2u$. 故ニ $y \geqq u + 2u = 3u$. コレヲ繰リ返ヘセバ, スベテノ n ニ対シテ $y \geqq nu$. シカルニ L ハ Archimedean ナレバ $u = 0$. コレ $u>0$ ニ矛盾スル。故ニ $y - y_1 \in \mathfrak{a}'$

超限帰納法ヲ用フレバ, L ハ principal ideal $\mathfrak{a}(e^{(\alpha)})$ ノ直和ニ分解セラレル。即チ $\alpha \neq \beta$ ナルトキ $e^{(\alpha)} \wedge e^{(\beta)} = 0$ ニシテ, $L = \bigvee_{\alpha} \mathfrak{a}(e^{(\alpha)})$ デアル.

$x \in L$ ガ與ヘラレタルトキ, $\mathfrak{a}_{\lambda} = \bigvee_{\alpha} \{\mathfrak{a}((x - \lambda e^{(\alpha)})_{-}) \wedge \mathfrak{a}(e^{(\alpha)})\}$ トオクトキハ, normal ideal ノ列 $(\mathfrak{a}_{\lambda};\ -\infty < \lambda < \infty)$ ヲ得ル. コレヲ x ノ <u>characteristic family</u> ト云フ. コノ characteristic family

ハ§1ニ定義シタ characteristic family ト全ク同一ノ性質ヲ有スルコトガ証明出来ル. 従ッテ L ノ表現ヲ得ルタメニハ, Boolean algebra N ニ Wallman ノ表現方法ヲ適用スル。即チ N ニ於ケル maximal additive ideal $\mathfrak{z}^*$ ノ全体ヲ Ω トシ, $\mathfrak{a}\in$ N ニ対シテ $\mathfrak{a}$ ヲ含ム $\mathfrak{z}^*$ ノ全体ヲ $\mathfrak{a}^*$ ニテアラハストキハ N ハ $\mathfrak{a}^*$ ノ如キ集合ノ族 N^* ニヨッテ isomorphic ニ表現セラレル. 今 N^* ヲ基トスルガ如ク Ω ヲ位相化スルトキハ, Ω ハ totally disconnected bicompact space デアッテ, $\mathfrak{a}^*$ ハ bicompact ナ開集合デアル。(N ハ Boolean algebra デアルカラ maximal additive ideal ト prime additive ideal トハ同一ノモノデアリ, $\mathfrak{z}^*$ ノ補集合ハ N ノ prime ideal デアル. 故ニ Ω ハ N ノ prime ideal ノ集合ト考ヘテヨリ, Wallman ノ表現ト stone ノ表現トハ一致スル) 故 $x\in L$ ニ対シテ

$$f_x(\mathfrak{z}^*)=g.l.b.(\lambda;\ \mathfrak{a}_\lambda\in\mathfrak{z}^*)=l.u.b.(\lambda;\ \mathfrak{a}_\lambda\notin\mathfrak{z}^*)$$

ヲ対応セシメルトキハ, §1 ニ於ケルガ如ク次ノ定理ヲ証明スルコトガ出来ル。

定理 2.2 unit ノ存在ヲ假定シナイ Archimedean vector lattice L ハ, Ω ニ於ケル連続函数 $f_x(\mathfrak{z}^*)$ $(x\in L)$ ノ system L^* ニヨッテ linear-lattice-isomorphic ニ表現サレル. 又 $f_x(\mathfrak{z}^*)$ ガ無限大ナル点 $\mathfrak{z}^*$ ノ集合ハ非稠密デア

ル。

コノ節ノ方法ハ L が unit e ヲ有スル場合ニモ勿論適用出来ルが，§1 ノ方法が L ノ principal ideal デ作ッタ distributive lattice P ノ媒介トシテ居ルニ反シ，コゝデハ L ノ normal ideal デ作ッタ Boolean algebra N ヲ媒介トシテ居ル点が異ル。

§3. 次ニ L が σ-complete 或ハ complete デアッテ unit e ヲ有スル場合ノ表現ヲ考ヘル。Birkhoff, Lattice theory, P. 106 カラ L ハ Archimedean デアル。コノトキハ y ノ principal ideal $\alpha(x)$ ヘノ projection $P_{\alpha(x)}y = \bigvee_n (y_+ \wedge nx) - \bigvee_n (y_- \wedge nx)$ が考ヘラレルカラコレヲ用フレバ次ノ定理が証明出来ル。

定理3.1 unit e ヲ有スル σ-complete（或ハ complete）vector lattice L ノ principal ideal ノ全体 P ハ σ-（或ハ complete）Boolean algebra デアル。(1)

定理1.4 ヨリ L ハ唯ノ vector lattice トシテ，連續函数ノ system L^* ニヨッテ linear-lattice-isomorphic ニ表現サレル。(1') シカシ σ-complete（或ハ

（脚註1ハ次頁へ）

---

(1) unit e が存在シナイトヤハ conditionally σ-complete（或ハ conditionally complete）Boolean algebra トナル。

complete) vector lattice トシテ lattice-isomorphic デアルトハ云ヘナイ. コノタメニハ Ω = measure ヲ導入スル. $\mathfrak{a} \in \mathbf{P}$ ナルトキ $e(\mathfrak{a}) = F_{\mathfrak{a}} e$ トオクトキハ $e(\mathfrak{a})$ ハ $\mathbf{P}$ ニ於テ定義セラレタ countably (或ハ completely) additive function デアル. $\mathfrak{a}$ ノ表現ヲ $\mathfrak{a}^*$ トシ, $e(\mathfrak{a}^*) = e(\mathfrak{a})$ トオケバ, $e(\mathfrak{a}^*)$ ハ $\mathbf{P}$ ノ表現 $\mathbf{P}^*$ ニ於テ定義セラレタ additive function デアル. $\mathfrak{l}^*$ ヲ Ω ノ一集合トスルトキ countable (或ハ directed) set $\mathfrak{a}_\delta, \mathfrak{b}_\delta \in \mathbf{P}$, $\omega_\delta \in L$ ガアッテ, $\omega_\delta \to 0$ ニシテ

$$\mathfrak{a}_\delta^* \leqq \mathfrak{l}^* \leqq \mathfrak{b}_\delta^*, \quad e(\mathfrak{b}_\delta - \mathfrak{a}_\delta) \leqq \omega_\delta$$ [1']

ガ成立スルトキ, $\mathfrak{l}^*$ ハ可測ナリト云ヒ, $e(\mathfrak{a}_\delta), e(\mathfrak{b}_\delta)$ ノ共通ノ極限 $e(\bigvee_\delta \mathfrak{a}_\delta) = e(\bigwedge_\delta \mathfrak{b}_\delta)$ ヲ $e(\mathfrak{l}^*)$ ニテアラハス. シカルトキハ次ノコトガ成立スル.

定理3.2　可測集合ノ全体 $\overline{\mathbf{P}^*}$ ハ field ヲ作リ, measure $e(\mathfrak{l}^*)$ ハ $\overline{\mathbf{P}^*}$ ニ於テ finitely additive デアル. シカシ measure zero ノ集合ヲ無視スレバ, $\overline{\mathbf{P}^*}$ ハ σ-(或ハ complete) field デアッテ, $e(\mathfrak{l}^*)$ ハ $\overline{\mathbf{P}^*}$ ニ於テ countably (或ハ completely) additive

---

(1') $\mathfrak{b}_\delta - \mathfrak{a}_\delta$ ハ $\mathfrak{b}_\delta$ ニ於ケル $\mathfrak{a}_\delta$ ノ relative complement ヲ示ス.

(1) L ガ σ-complete ノ場合ハ $f_x(\mathfrak{p}^*)$ ガ中野秀五郎氏ノ relative spectrum ニナッテ居ル. (H. Nakano, spektraltheorie, 数物記事 23 (1941), 491参照)

デアル．尚 P ト $\overline{\mathrm{P}}^*$ トハ σ-（或ハ complete）Boolean algebra トシテ lattice-isomorphic デアル．（即 I^* ヲ measure zero ノ集合ガ作ル $\overline{\mathrm{P}}^*$ ノ ideal トスレバ P ト $\overline{\mathrm{P}}^*/I^*$ トハ σ-（或ハ complete）Boolean algebra トシテ lattice-isomorphic デアル）

コノ measure ノ概念ヲ用ヒレバ次ノ様ニ云ヘル。

定理3.3　measure zero ノ集合ヲ無視スレバ，unit e ヲ有スル σ-complete（或ハ complete）vector lattice L トソノ表現 L^* トハ σ-complete（或ハ complete）vector lattice トシテ linear-lattice-isomorphic デアル．又 $f_y(\mathfrak{z}^*)$ ヲ y ノ表現トスレバ

$$y=\int_{\Omega} f_y(\mathfrak{z}^*)\,de(\iota^*) \qquad (1)$$

デアル。

即チ $y=\bigvee_\nu y_\nu$ ノ表現ハ measure zero ノ集合ニ属スル点ヲ除ケバ $f_y(\mathfrak{z}^*)=\max_\nu[f_{y_\nu}(\mathfrak{z}^*)]$ デアリ，meet ノ場合モ同様ノコトガ成立スル。

(1)ハ Freudenthal ノ得タ式

$$y=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda\,de(\alpha_\lambda^{(y)}) \qquad (2)$$

ニ對應スル．(2)ハ前著 F. Maeda, Partially ordered linear space（廣島文理大紀要，10巻（1940），137-150）ニ於テハ，L ガ complete デ regular デアル場合ニ，

equivalence class A_x（x ∨ z ナルガ如キ z ノ集合）ヲ用ヒテ証明シタガ，$x \sim z$ ナルコトト $\mathfrak{a}(x)=\mathfrak{a}(z)$ ナルコトトハ同等デアルカラ，equivalence class ノ全体ト principal ideal ノ全体 $\mathbf{P}$ トハ lattice-ismorphic デアル。故ニ前者ト大略同様ニシテ，L ガ σ-complete デアル場合ニ，characteristic family $\{\mathfrak{a}_\lambda^{(y)}\}$ ヲ用ヒテ，(2) ヲ証明スルコトが出来ル.

コノ measure ヲ導入スル方法ハ，unit e ガ存在シナイトキデモ，L ガ complete デアルトキハ同様ニ云ヘル．normal ideal $\mathfrak{a}$ ガ與ヘラレタルトキ，任意ノ $y \in L$ ニ對シテ $\vee(y_+ \wedge x;\ x \in \mathfrak{a}) - \vee(y_- \wedge x;\ x \in \mathfrak{a})$ ガ存在スルカラ，コノ値ヲ y ノ $\mathfrak{a}$ ヘノ projection トシ，$P_\mathfrak{a} y$ トアラハス。

§2 ノ如ク $L=\bigvee_\alpha \mathfrak{a}(e^{(\alpha)})$ ニ分割スルトキハ，$\mathfrak{a} \in \mathbf{N}$ ニ對シテ $e(\mathfrak{a})=\bigvee_\alpha P_\mathfrak{a} e^{(\alpha)}$ ト定義スル．但シ $\bigvee_\alpha P_\mathfrak{a} e^{(\alpha)}$ ガ存在シナイトキハ $e(\mathfrak{a})=+\infty$ ト考ヘル．シカルトキハ $e(\mathfrak{a})$ ハ $\mathbf{N}$ ニ於テ completely additive デアル。前ノ $\mathbf{P}$ ノ代リニ $\mathbf{N}$ ニ對シテ，同様ノ方法ヲ行ヘバ，measure ガ導入出来ル.

但シコノトキハ measure ガ $+\infty$ ノトキモ出来ルガ，コレハ差支ヲ生ジナイ。

故ニ定理 3.3 ノ如ク，measure zero ノ集合ヲ無視スレバ，unit ヲ有シナイ場合モ．complete vector lattice L トソノ表現 L^* トハ，complete vector lattice トシテ linear-lattice-isomorphic デアル。

尚 L が complete vector lattice デアルトキハ，N ハ Bochner and Phillips, Additive set functions and vector lattices, Annals of math. 42(1941), 316-324 ニ於ケル (complete) normal subspace ノ全体 B ト同一デアル。