1000. Ring Lattice ノ公理系及ビ表現論

小笠原　藤次郎（廣島大理文）

vector lattice ノ表現論[1]ヨリシテ ring lattice ノ公理系及ビ表現ニツイテ論ズ。如何ナル vector lattice モ meet 及ビ join ヲ無制限ニ保存シテ complete vector lattice ニ埋藏サレル。[2] コレヨリ complete vector lattice ニ於テ成立スル事実ハ Archimedean case ニ於テモ必要ナ修正ヲ加ヘテ成立スベシトイフ考ヘ方ニヨッテ次ノ様ニ論ジタ。§1 デ ring lattice ノ定義ヲ與ヘタ後各要素ガ單位ニツイテ有界ナ可換環ニツイテ周知ノ表現論ヲ §2 デハ有限次元[3]ノ ring lattice ニ於テ

---

(1) 前田文友, 小笠原藤次郎, vector lattice ノ表現. 以後コノ論文ヲ "表現論" ト呼ブ。

(2) 小笠原藤次郎, Boole 空間ニツイテ。

(3) 次頁へ.

"Archimedean ハ冪零元ノ非在ノ條件ト對等ナルコトヲ§3デハ§1中ノ條件可換ハ余分ナルコトヲ§4デハコレヲ一般ノ ring lattice デ證明シタ。

§1. 定義 環單位 e, 實數ヨリナル作用團ヲモツ環 R が次ノ條件ヲ滿足スルトキ ring lattice トイフ。

(1) R ハ vector lattice デアル。

(2) Archimedean ノ公理ヲ滿足スル。

(3) e ハ vector lattice トシテノ單位デアル。

(4) $x>0,\ y>0,\ x, y\in R$ ノトキ $xy\geqq 0$

(1), (2) ヨリ"表現論"ニヨリ normal ideal ノ全体 N ノ表現 Boole 空間 Ω 上ノ連續函數ニヨッテ R ヲ vector lattice トシテ linear-lattice-isomorphic ナ表現が得ラレル。x ニ對應スル函數ハ $f_x(\mathfrak{p}^*)$ デ表ス。コノ§デハ R ノ各要素が e ニ關シテ有界ナ可換環ノ場合ノミヲ考ヘル。自明ナルモノノ證明ハ略スル。

補助定理1. $x>0,\ y>0,\ x\wedge y=0$ ノトキ $xy=0$

補助定理2. $a>0$ ノトキ $(ax)_+=ax_+,\ (ax)_-=ax_-$

(證) $ax=ax_+-ax_-,\ ax_+\wedge ax_-=0$ ヨリ

$$(ax)_+=ax_+,\ (ax)_-=ax_-$$

補助定理3. $x^2=|x|^2$

---

(3) ハ次頁ノ脚註

(3) R が實數体上有限ノ order ヲモツ換言スレバ有限個 linear basis ヲモツ意。

(4) 各 $x\in R$ ニ $|x|<\alpha e$ ナル正數 α ノ存在スル意。

定理1. 各要素ガ e ニ関シテ有界ナ可換ナ ring lattice R ハ単独的ニ定マル bicompact Hausdorff 空間ノ稠密ナ連続函数族ノ環ニヨリ ring-lattice-isomorphic ニ表現サレル。

(証) $f_{xy}(\mathfrak{z}^*) = f_x(\mathfrak{z}^*)\, f_y(\mathfrak{z}^*)$ ヲ証スレバ他ノ部分ノ証明ハ"表現論"及ビ"Zerlegungsraum"ヲ作ルコトニヨリ自明。

コノタメニハ $f_{x^2}(\mathfrak{z}^*) = \{f_x(\mathfrak{z}^*)\}^2$ ヲ証スレバ可。何者 x ノ代リニ $x+y$ ト置イテ両辺ヲ比較スレバヨイ。補助定理3ニヨリ $x>0$ ノトキ証スレバ可。"表現論"ノ記法デ $x>0$ ノトキ任意ノ正数 λ ニツイテ $\mathfrak{a}^{(x)}_{\lambda} = \mathfrak{a}^{(x^2)}_{\lambda^2}$ 換言スレバ $(x-\lambda e)_- \sim (x^2-\lambda^2 e)_-$ ナルコトヲ証スレバ可ナリ。然ルニ補助定理2ニヨリ $\lambda(x-\lambda e)_- \leqq (x^2-\lambda^2 e) \leqq \alpha(x-\lambda e)_-$ ナル正数 α ガ存在スル。

従ッテ定理1ハ証明サレタコトニナル。

(2) ノ假定ノナイトキハ e ニ関シテ無限小ノ全体[1]ハ ideal 且ツ normal subspace トナル。従ッテソレニ関スル剰余環ガ定理1ノ假定ヲ満スコトニナルカラ無限小ノ全体ハ radical トモ考ヘラレル。有限次元ノトキハ丁度 radical ト一致スル。

定理2. 単位 e ニ関シテ各要素ガ有界ナ Archimedean vector lattice L ハ必要ノ場合 L ノ拡大ニヨリ e ヲ

---

(1) 任意ノ正数 α ニツイテ $|x| \leqq \alpha e$ ガ成立スル x ノ全体。"表現論" §1 参照。

環單位トスル *ring lattice* ニスルコトガ可能デアル。且ツ積ハ L 上デハ単独的ニ定マル。[2]

§2. 茲デハ有限次元ノ R ノミニツイテ考ヘル。*Archimedean* ノ公理ヲ代数的性質ニヨツテ究メルタメコノ公理ハコヽデハ假定セズニオク。e ニ關シテ有界ナ要素ノ全体ヲ R_b トスレバコレマタ *ring lattice* デアル。

補助定理1. R_b ノ *radical* ハ e ニ関スル無限小ノ全体ト一致スル。

(証) x ガ e ニ関スル無限小ノトキ x ハ冪零元ナルコト及ビソノ逆ガ容易ニ示サレル。コレカラ補助定理1ノ成立ガワカル。

定理1. R_b ニ於テ "*Archimedean*" ト "半單純" ハ對等ノ條件デアル。

補助定理2. R_b ガ *Archimedean* ノ公理ヲ満足スルトキ $R = R_b$.

(証) R_b ハ実數全体ノ作ル *ring lattice* ノ有限個ノ *direct union* トナルコトガ知ラレテヰル。e ヲ *primitive idempotent* e_i, $i = 1, 2, \cdots\cdots, n$ ニ分解スル。R ガ *Archimedean* デナイトスレバ $x, y > 0$ ガ存在シテ任意ノ正數 α ニツイテ $x \geqq \alpha y$ ガ成立スル。$y \frown e_i > 0$ ヲ満足スル i ヲトレバ $y \frown e_i = \lambda e_i$ ノ形ニカヽレル。コレカラ上ノ x, y ノ代リニ $x \geqq \alpha e_i$, $x e_i = x$ トシテ差支ヘナイ。コレヨリ $x^2 \geqq \alpha x, \cdots\cdots$ トナリコノ無限大的性質ガ矛盾

---

(2) §3 定理1参照

ヲ起スコトヲ示セバヨイ。RガArchimedean ノトキハ $R=R_b$ ガ容易ニ分ル。

定理2. RガArchimedeanノ公理ヲ満足スルタメノ條件ハ冪零元ノ非在(或ハ又 $x>0$ ノトキ $x^2>0$)デアル。

(証) 補助定理1,2ヨリ

定理3. 可換ナRデハArchimedeanノ公理ハ半単純ノ條件ト對等デアル。

(証) 補助定理1及ビ2ヨリ

有限次元デナイRデハ此ノ定理ハ成立セズ。スベテノ実係数ノ冪級数ヲ辞書的ニ順序ヅケCauchy積ヲ積ノ定義トシテ導入スルコトニヨリ例示サレル。

§3. 定理1 各要素ガeニ関シテ有界ナring lattice ハ可換デアル。

(証) vector latticeトシテRヲcomplete vector latticeニ埋蔵シ後者ニRノ積ノ定義ヲ拡大スルコトガ可能。コレヨリ本定理ヲcompleteナRデ証明スレバ充分。"表現論"ノ記法デ $e(a)\,e(b)=e(b)\,e(a)$ ヲ証明スレバ充分デアル。何者任意ノ x ハ $e(a)$ ノ一次的結合ニヨリ e ニ関シ一様ニ近似スルコトガ出来ルカラ。

$e(a)\,e(b)\leqq e(a)\frown e(b)$ ヨリ $f_{e(a)\,e(b)}(\mathfrak{p}^*)\leqq f_{e(a)}(\mathfrak{p}^*)\,f_{e(b)}(\mathfrak{p}^*)$ ガ成立スル。b ノ代リニ b' ト置イタ式ト辺々相加ヘテ左右両辺トモ $f_{e(a)}(\mathfrak{p}^*)$ ヲ得ル。コレカラ上ノ不等式デハ等号ガ常ニ成立スルコトヲ知ル。$e(a)$, $e(b)$ ノ順序ヲ変更シテ $f_{e(a)\,e(b)}(\mathfrak{p}^*)=$

$f\,e(\mathfrak{b})\,e(\mathfrak{a})(\mathfrak{p}^*)$. コレヨリ $e(\mathfrak{a})e(\mathfrak{b}) = e(\mathfrak{b})e(\mathfrak{a})$.

環単位ガ lattice 単位トナラナイトキ一般ニ可換デナイ。非可換有限群ヨリ実係数ノ group-ring ヲ作リ順序ヲ適当ニ定メルコトニ依テ分ル。

§4. §3ノ定理ノヲ一般ノ Ring lattice デ証明スルタメ若干ノ補助定理カラ始メル。

補助定理 1. $a>0$, 且ツ e ニ関シテ有界ノトキ

$$(ax)_+ = ax_+,\quad (ax)_- = ax_-$$

補助定理 2. $x>0$ ノトキ $x = \bigvee_n (x \wedge ne)$

補助定理 3. $x>0$ ヲ e ニ関シテ有界, 任意ノ $y>0$ ニ対シテ $y_n = x \wedge ne$ ト置クトキ $x y = \bigvee x \wedge y_n$

補助定理 4. $x>0$, $y>0$ ノトキ $xy=0$ ナラバ $x \wedge y = 0$

(証) $x_m = x \wedge me$, $y_n = y \wedge ne$ トスレバ $x_m y_n = 0$ §1 定理1, 及ビ §3 ノ定理ノ "表現論" ヨリ $x_m \wedge y_n = 0$。補助定理2ヲ使ッテ $x \wedge y = 0$.

補助定理 5. $x>0$ ガ有界ノトキ任意ノ $y>0$ ニツイテ $x \wedge y = 0$ ノトキ $xy=0$ ガ成立スル。

(証) 補助定理3ヨリ。

補助定理 6. $x>0$, $y_n \downarrow 0$ ノトキ $x y_n \downarrow 0$

(証) 任意ノ自然数 m ニ対シテ $x_m = x \wedge me$, $x'_m = x - x_m$ ト置ク。 $f_x(\mathfrak{p}^*) < m$ ノトキ normal ideal $\mathfrak{a}$ ガ存在シテ $\mathfrak{a} \in \mathfrak{p}^*$ ノトキ $f_x(\mathfrak{p}^*) < m$. 從ッテ $f_{x'_m}(\mathfrak{p}^*) = 0$. "表現論" ニヨリ任意ノ正数 λ ニ対

シ $\mathfrak{a}$ ハ $\mathfrak{a}((x'_m - \lambda e)_+) = 0$. e ニ関シテ有界ナ $\mathfrak{a}$ ノ任意ノ正要素 u ヲトル。$u \frown (x'_m - \lambda e)_+ = 0 = (ux'_m - \lambda e)_+$（補助定理1, 5）従ツト $ux'_m \leqq \lambda u$. 然ルニ λ ハ任意ノ正数デアルカラ $ux'_m = 0$. 故ニ $u(x'_m y_n - \lambda e)_+ = (ux'_m y_n - \lambda u)_+ = (-\lambda u)_+ = 0$（補助定理1）。従ツテ $u \frown (x'_m y_n - \lambda e)_+ = 0$（補助定理4）。

コレカラ $\mathfrak{a} \frown \mathfrak{a}((x'_m y - \lambda e)_+) = 0$ 即チ $\mathfrak{z}^* \in \mathfrak{a}$ ノトキ $f_{x'_m y}(\mathfrak{z}^*) = 0$. 故ニ $f_{x y_n}(\mathfrak{z}^*) = f_{x_n y_n}(\mathfrak{z}^*)$。$x_m$ ハ e ニ関シテ有界デアルカラ $x_m y_n \downarrow 0$ $(n \to +\infty)$. 従ツテ第一種集合ヲ除イテ $\lim_{n \to \infty} f_{x y_n}(\mathfrak{z}^*) = 0$

故ニ $x y_n \downarrow 0$ が成立スル。

定理1. R ハ可換デアル。

（証）$x > 0$, $y > 0$ ノトキ積ノ可換ヲ証スレバ可。先ヅ x が e ニ関シテ有界ノトキ $y_n = y \frown ne$ ト置イテ

$$xy = \bigvee x y_n = \bigvee y_n x = yx \quad (\S 3 \text{ ノ定理})$$

x が有界デナイトキハ $\bigwedge(xy - xy_n) = \bigwedge x(y - y_n) = 0$（補助定理6）ヨリ $xy = \bigvee x y_n$ ヲ得ル。

上ト同様ノ論法デ $xy = yx$ ヲ証シ得ル。

補助定理7. 第一種集合ヲ除イテ

$$f_{xy}(\mathfrak{z}^*) = f_x(\mathfrak{z}^*)\, f_y(\mathfrak{z}^*)。$$

（証）$x > 0$, $y > 0$ ノトキ証スレバ充分. x が有界ノトキ $y_n = y \frown ne$ ト置イテ第一種集合ヲ除イテ次ノ等式が成立スル。$f_{xy}(\mathfrak{z}^*) = \lim_{n \to \infty} f_{x y_n}(\mathfrak{z}^*) = f_x(\mathfrak{z}^*) \lim f_{y_n}(\mathfrak{z}^*) = f_x(\mathfrak{z}^*)\, f_y(\mathfrak{z}^*)$. x が有界デナイトキ定理1ノ証明ト

同論法ニヨル．コレヨリ次ノ定理ガ成立スル。

定理2. ring lattice R ハ單独的ニ定マル bicompact Hausdorff 空間ノ連続函数族（第一種集合ノ上ヲ除イテ有限ヲトル）ノ ring lattice ニヨリ ring-lattice-isomorphic ニ表現サレル。

定理3. §1ノ定理2デ"eニ關シテ有界"ノ條件ヲトッタモノ。

（注意）積ノ定義ニハ Riesz ノ方法ガアル。

（注意）表現論カラ ring lattice ノ種々ノ基礎的性質ヲ導クコトガ出来ル。

（オ断リ）本稿ヲ終ッテ中野氏ガ學士院記事17(1941)311-317デ σ-complete ring lattice ガ可換ナルコトヲ述ベラレテヰルノニ氣ガツイタ。