

1003. Eulerノ彈道分弧計算ニ於ケル誤差

渡辺 次 雄(滿洲國陸軍士官學校)

原点ヲ砲口ニ、射面ヲ xz 平面ニトリシ、 z 軸ヲ夫々
水平及ハ鉛直方向ニトシテ彈道方程式ハ次ノ式ヲ與ヘラ
レル。

$$\begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = -cf(v) \cos \theta \dots\dots\dots (1) \\ \frac{dv_z}{dt} = -cf(v) \sin \theta - g \dots\dots\dots (2) \end{cases}$$

但シ空氣抵抗ハ彈丸ノ速度ニノミ關係スルモノト假定スル。
又且ハ彈道上ノ一点 (x, z) ニ於ケル彈道切線ノ傾斜
角ヲ θ ナル。

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{dv_x}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = -\frac{g \cos \theta}{v} \frac{dv_x}{d\theta}$$

コレヲ (1) = (A) 入ルテ

$$g \frac{dv_x}{d\theta} = v \cdot cf(v)$$

特ニ $f(v) = v^2 + vt + \lambda$

$$g d(v \cos \theta) = cv^2 = c(v \cos \theta)^3 \frac{d\theta}{\cos^3 \theta}$$

$$(v_x = v \cos \theta)$$

$$\therefore \frac{d(v \cos \theta)}{(v \cos \theta)^3} = \frac{c}{g} \frac{d\theta}{\cos^3 \theta}$$

積分スルテ

$$\frac{1}{(v \cos \theta)^2} = -\frac{2c}{g} \int \frac{d\theta}{\cos^3 \theta} + \text{Int-Konst}$$

而シテ

$$\int_0^\theta \frac{d\theta}{\cos^3 \theta} = \frac{\sin \theta}{2 \cos^2 \theta} + \frac{1}{2} \log \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right)$$

コレヲ $\xi(\theta)$ ナルニ表ハスル

$$\frac{1}{(v \cos \theta)^2} = -\frac{2c}{g} \xi(\theta) + \text{Konst.}$$

コノ定数ヲ $\frac{2c}{g} C$ トカケバ $C = \frac{g}{2c v_s^2}$ (v_s ハ 彈道頂

点ニ於ケル速度)

$$\therefore \frac{1}{(v \cos \theta)^2} = \frac{2c}{g} (C - \xi(\theta))$$

$$\therefore v^2 = \frac{g}{2c} \frac{1}{\cos^2 \theta (C - \xi(\theta))}$$

$$\text{而 } v = g ds = -v^2 \frac{d\theta}{\cos \theta}$$

$$\therefore 2c ds = - \frac{d\theta}{\cos^3 \theta (C - \xi(\theta))}$$

$$\frac{d\xi}{d\theta} = \frac{1}{\cos^3 \theta} + \text{ルコトヲ用ヒテ変形スルニ}$$

$$2c ds = - \frac{d\xi}{C - \xi(\theta)} = + \frac{d(C - \xi(\theta))}{C - \xi(\theta)}$$

$$\therefore 2cS = \log(C - \xi(\theta)) + k (\text{Int - Konst.})$$

弧 S ヲ彈道ノ頂点カラ測ルコト = スルニ

$$k = -\log C \quad (\because s=0, \theta=0)$$

$$\therefore S = \frac{1}{2c} \log \frac{C - \xi(\theta)}{C}$$

故ニ圖ニ於テ

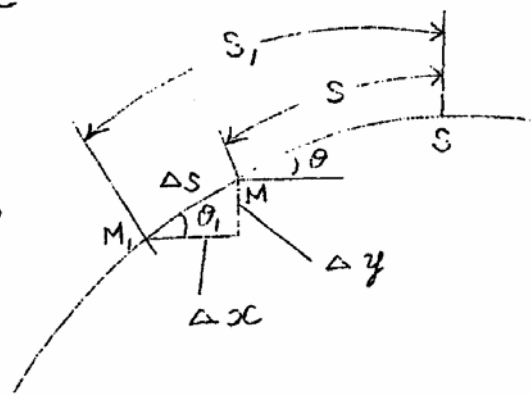
$$SM = S = \frac{1}{2c} \log \frac{C - \xi(\theta)}{C},$$

$$SM_1 = S_1$$

$$= \frac{1}{2c} \log \frac{C - \xi(\theta_1)}{C}$$

$$\therefore \widehat{MM_1} = \Delta S = \frac{1}{2c} \log \frac{C - \xi(\theta_1)}{C - \xi(\theta)}$$

$$\text{今 } \Delta x = \frac{1}{2c} \log \frac{C - \xi(\theta_1)}{C - \xi(\theta)} \cos \frac{\theta + \theta_1}{2}$$



$$\Delta y = \frac{1}{2C} \log \frac{C - \xi(\theta_1)}{C - \xi(\theta)} \sin \frac{\theta + \theta_1}{2}$$

↑の近似式ヲトルト x, y ハ次ノ式ヲ計算サレル。

$$x = \sum \Delta x = \frac{1}{2C} \sum \log \frac{C - \xi(\theta_1)}{C - \xi(\theta)} \cos \frac{\theta + \theta_1}{2}$$

$$y = \sum \Delta y = \frac{1}{2C} \sum \log \frac{C - \xi(\theta_1)}{C - \xi(\theta)} \sin \frac{\theta + \theta_1}{2}$$

コレハ1753年 L. Euler = ヨツテ與ヘラレタ (Berl. Berl. 1753, S. 348)

本談話ハコノ分弧計算ノ誤差評価式ヲ求メタリ。

明ラカニ

$$\cos \theta_1 < \cos \frac{\theta + \theta_1}{2} < \cos \theta$$

$$\therefore \sum \log \frac{C - \xi(\theta_1)}{C - \xi(\theta)} \cos \theta_1 < 2Cx$$

$$< \sum \log \frac{C - \xi(\theta_1)}{C - \xi(\theta)} \cos \theta$$

故ニ全彈道ニツイテ $2Cx$ ノ計算カラ生ズル誤差ヲ $2C\varepsilon$

トスレバ

$$2C\varepsilon = \sum \log \frac{C - \xi(\theta)}{C - \xi(\theta_1)} \cos \theta - \sum \log \frac{C - \xi(\theta_1)}{C - \xi(\theta)} \cos \theta_1$$

$$= \sum \log \frac{C - \xi(\theta)}{C - \xi(\theta_1)} \cdot 2 \sin \frac{\theta + \theta_1}{2} \sin \frac{\theta_1 - \theta}{2}$$

落角ヲ ω ($< \frac{\pi}{2}$) トスレバ落角ハ射角ヨリ大ナルコ

トヨリ

$$\left\langle \sum \log \frac{C - \xi(\theta)}{C - \xi(\theta)} \cdot 2 \sin \omega \sin \frac{\Delta \theta}{2} \right\rangle$$

故 = 彈道曲線 / 長サヲ S トスレバ

$$\begin{aligned} 2C\varepsilon &< 2CS \cdot 2 \sin \omega \cdot \sin \frac{\Delta \theta}{2} \\ &= 4C \sin \omega \sin \frac{\Delta \theta}{2} \cdot S \end{aligned}$$

同ジ射角 α , 同ジ初速 v_0 / 真空彈道 / 長サヲ S' トスレバ $S' > S$.

$$\text{且ツ } S' = \frac{2v_0^2}{g} \cos^2 \alpha \int_0^\alpha \frac{d\theta}{\cos^3 \theta} = \frac{2v_0^2}{g} \cos^2 \alpha \cdot \xi(\alpha)$$

$$\therefore \boxed{2C\varepsilon < \frac{8Cv_0^2}{g} \cdot \sin \omega \cdot \cos^2 \alpha \cdot \sin \frac{\Delta \theta}{2} \xi(\alpha)}$$

例 $\alpha = 40^\circ$, $\omega = 47^\circ 11.3'$, $\frac{Cv_0^2}{g} = 0.517$ トキ
 $\therefore 2CX = 0.45$

上ノ不等式 / 右辺ヲ計算スルト約 $1.668 \sin \frac{\Delta \theta}{2}$
 トナル。故 $= \Delta \theta = 20' =$ トナル

$$2C\varepsilon < 0.0049$$

トナル。 C ハ 彈道係數ト稱スルモノヲ 0.010 乃至
 0.00007 ノ値ヲトル。今 $C = 0.0001$ トスレバ, 射
 程ハ 約 3750 m , 誤差ハ 49 m ヲリ小トナル。』

同様 = $2C\varepsilon$ / 誤差評價式ニ計算出來ル。

$$\boxed{2C\varepsilon < \frac{8Cv_0^2}{g} \cos^2 \alpha \sin \frac{\Delta \theta}{2} \xi(\alpha)}$$

トナル。