1006. Cauchy ノ Integralformula ニ於ケル i ノ意義ニ就テ

高須　鶴三郎（東北大）

私ガ $z=x+jy$, ($j^2=\mu+\nu j$; μ, ν, x, y ：實數) ノ函數論ノ研究ヲヤッテ居ヲ氣附イタコトノ二三ヲ述ベサセテ頂キマス。

1. Cauchy ノ integralformula ハ一般ノ場合ニ

$$(1)\quad f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta,\qquad (i^2=-1)$$

トナッテ，普通ノ函數論ノモノト同型ニナリマス。其レカラ直ニ分ル第一ノコトハ，此ノ i ハ $z=x+jy$ ノ中ノ j ト，ヨシヤ $j^2=-1$ ノ場合デモ全然無關係デアルコトデス。其レヲ在來ノ函數論デ $z=x+iy$ ノ i ト (1) ノ i トヲ同ジニシテ居タコトハ，convention デ間ニ合セテ居タノデアルコトガ分リマス。(1) ノ i ハ積分部ニヒソンデ居ル i ト約シ合セルタメニ這入ッテ居ルノデアッテ，Zahlensystem $z=x+jy$ ノ j トハ無關係ニ遊離シタ，Hilfsmittel デアッテ，Zahlensystem ヲ genstoren スルコトナク，恰モ水ノ中ノ油ノ如キモノデアリマス。

其ンナラ何処カラ這入ッタカト云フト，xy 平面上ノ法則ヲ規定スルノニ，Kreispunkte ヲ導入シタコトト，

角ノ Laguerre 型ノ定義式

$$(2)\quad \frac{1}{j}\log(i_1 i_2,\ g_1 g_2) = \angle(g_1, g_2)$$

ニアラハレル log ノ periodic function デアルコトカラ這入ッテ来タ Hilfsmittel デアリマス。

2. 所ガコノコトガ言ヘンガタメニハ，(i) ガ成立スルコトヲ確メネバナラヌ訳デスガ，一寸考ヘルト $\nu^2+4\mu>0$ ノ場合ニハ (1) ノ成立，或ハ其ノ特殊ナ場合

$$(3)\quad \int_C \frac{d\zeta}{\zeta - z} = 2\pi i', \qquad (i'^2 = -1)$$

ガ問題ニサレル様デス。事柄ハ同ジデスカラ以下専ラ $\nu=0$, $\mu=0$ ノ場合ニツイテ述ベマセウ。私ノ理論ト普通ノ在来ノ函数論ト同功同罪デアルコトハ次ノ如ク対比的ニ考ヘレト(私ノデ j-domain デヤッテルコトヲ普通ノ函数論デハ i-domain デヤッテ居ルコトナドガ分リ)一目瞭然ニナリマス。

(4) $z = x + iy,\ i^2 = -1$	$z = x + jy,\ j^2 = +1$

ニ於テ

$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,$ $r^2 = x^2 + y^2$	$x = \rho\cosh\theta,\ y = \rho\sinh\theta,$ $\rho^2 = x^2 - y^2$

ヲ用フル時ニハ，xy-平面上ノ幾何学的法則ヲ規定スル材料トシテ

Kreispunkte	real absolute points

ト角ノ Laguerre 型ノ定義(2)ヲ

$j = i'$	$j = j$

トシテ導入シタコトニナリ，此ノ土台ノ下ニ

在来ノ函数論	私ノ函数論

ガスラスラ行クノデス．然ルニ，(4)ニ於テ意地悪ク

$x=\rho\cosh\theta,\ y=\rho\sinh\theta$	$x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi$

ヲ導入シマスト，最早

Kreispunkte	real absolute points

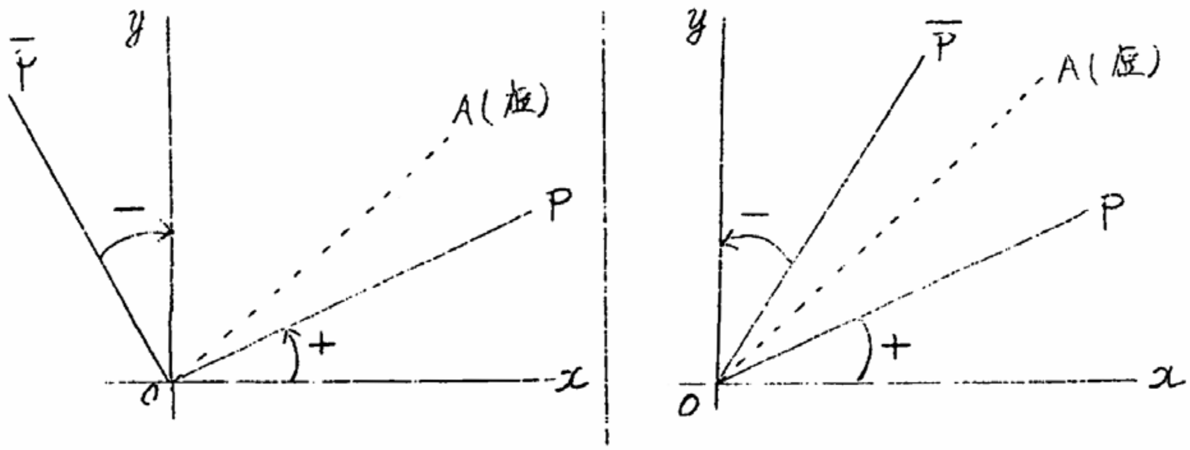
ハ無視サレ，新ニ

real absolute points	Kreispunkte

ガ王座ヲ占メルコトニナリ，前トxy平面上ノ幾何學的法則ガ別ニナルノデス．コノ際尚函數論ヲスラスラト展開セシメルニハ，今無視シタモノヲ追加シテ置カナケレバナリマセヌ．ソウスルト

通常ノ	独特ノ

orthogonal involution ガ追加サレマス。即チ圖ニ於テ



OP, O$\bar{P}$ ヲ isotropes OA, OA′ ニ関シテ共軛トシテオクト，

$\angle(Ox, Oy) = \frac{\pi}{2}\frac{i'}{i}$,	$\angle(Ox, Oy) = \frac{\pi}{2}\frac{i'}{j}$,
$\angle(OP, O\bar{P}) = \frac{\pi}{2}\frac{i'}{i}$	$\angle(OP, O\bar{P}) = \frac{\pi}{2}\frac{i'}{j}$

$$\angle(Ox, Oy) = \angle(Ox, OP) + \angle(OP, O\bar{P}) + \angle(O\bar{P}, Oy)$$

$\frac{\pi}{2}\frac{i'}{i} = \angle(Ox, OP)$	$\frac{\pi}{2}\frac{i'}{j} = \angle(Ox, OP)$
$+\frac{\pi}{2}\frac{i'}{i} + \angle(O\bar{P}, Oy)$	$+\frac{\pi}{2}\frac{i'}{j} + \angle(O\bar{P}, Oy)$

仍テ　$\angle(Ox, OP) + \angle(O\bar{P}, Oy) = 0$

斯クシテ $\angle(Ox, OP)$ ト $\angle(Oy, O\bar{P})$ トハ cancel シマス．特ニ $OP \to OA$ ノ時ハ必然ニ $O\bar{P} \to OA$

此ノ原理ガアレバ，(2)ニ於テ

$\displaystyle\int_{\lvert\rho^2\rvert = C\ (\text{共軛双曲線})} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \oint \frac{d\cosh\theta}{\cosh\theta} + i\oint\frac{d\theta}{\cosh\theta}$	$\displaystyle\int_{\rho^2 = C\ (\text{円})} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \oint\frac{d\cos\varphi}{\cos\varphi} + j\oint\frac{d\varphi}{\cos\varphi}$

ノ右辺ノ diverge スル形ノ積分ガ OA, OA' デ作ラレル異ッタ angular domains ノ角分ガ schrittweise ニ cancel サレ, limit process デ converge シテ零トナリ，唯

$\cosh\theta + i\sinh\theta$	$\cos\varphi + j\sin\varphi$

ガ正負号ヲ変ズル四ケ所即チ radiusvector ガ OA, OA' ヲ通過スル四ケ所デ

$\frac{\pi}{2}\frac{i'}{i}$	$\frac{\pi}{2}\frac{i'}{j}$

究寄與ヲ生ジテ，結局

$$4\times\frac{\pi}{2}\,\frac{i'}{i}\,i = 2\pi i' \qquad \Big| \qquad 4\times\frac{\pi}{2}\,\frac{i'}{j}\,j = 2\pi i'$$

ガ残ッテ(3)ガ analysis ノ法則ヲ破ルコトナク成立スルノデス。同様ノコトハ(1)ニツイテモ云ヘルノデス。

要之,

$x+iy$	$x+jy$

ノ pure analysis ト, xy 平面上ノ幾何学的法則トノ堺目ガ何処ニアルカト云フ問題ニ帰シマスガ, 之ニ明答スルノハ仲々骨ガ折レマスガ, 上ニ説明シマシタ通リ

在来ノ $x+iy$ ノ函数論	私ノ $x+jy$ ノ函数

ヲスパリト手際ヨクヤルニハ

Kreispunkte	real absolute points

ニ refer シタ

$(r,\ \varphi)$	$(\rho,\ \theta)$

ヲ用フレバ, 同功同罪デ進メルコトダケハ明白デアリマス。

此ノ意味デ夫々ノ函数論ニ一ツ宛ノ xy-平面上ノ Euclid 若クハ非 Euclid 幾何学ガ附随サセフレテ居ルト云フコトガ出来マス。目デ見テハ x-, y-軸ハ直交軸ニトリマシタガ, 実ハ之レヘ

普通	real absolute points ニ refer シテ

ノ意味ノ直交軸ガトッテアルノデス. 此ノコトヲ理解サレナ

イト私ノ函數論（學士院記事ノ十一月号及ビ一月号ノ中ノ十一月号ノ筆ノ疵ハ一月デ正シテ置キマシタ。ausführliche Darstellung ハ東北理科報告ニ晩春頃出マセウ）ハ解ッテ頂ケマセン。私ノ函數論ヲ Euclid ノ見地即チ(r, φ)ノ見地カラ非難サレルコトハ，在来ノ函数論ヲ(ρ, θ)ノ見地カラ非難サレルノト同ジ程度ノ議論ニナリマス。

附記　私ノ理論ノ鍵ハ $\oint d\theta = 2\pi \frac{i}{j}$ ト，ソシテ modulus ト absolute value トヲ区別スルコトトノ二点ニアリマスが，此ノ見地ハ bicomplex $z = x + jy + jj'$ ノ $z + j$ ノ z，（j ト j' トハ別々ノ二次方程式ノ根）ノ場合ト tricomplex ノ場合ニモ鍵トナリマシテ，例ヘバ前者ノ special case タル $j^2 = -1$, $j'^2 = +1$ ノ場合ノ二川道次君ノ 1928, T.M.J. ノ論文モ改良セラレ，四次元ノ Cauchy ノ integral-formula

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

ニ於ケル C モ，二川君ノ如リ，Nullteiller ノ軌跡タル isotrope Hyperebenen ヲヨケテ通ルモノニ限ル必要ハナクナリマス。イヅレ又組織的ナモノヲ発表シマセウ。