1007. 束ノ中心

前田 文友（廣島文理大）

私ハ前著 *Relative Dimensionality in Operator Rings*（廣島文理大紀要第11巻（1941），1—6頁）ニ於テ，Hilbert空間ニ於ケル operator ring ニ含マレタアラユル projection ノ作ル束ニ於ケル，J. v. Neumann ノ可約ナル連続幾何學（一般ニハ complemented modular lattice）ノ場合ト同ジク，次ノ四ツノ命題が equivalent デアルコトヲ證明シタ．今 a ヲ束 L ノ要素トスル．

(α) a ハ L ノ中心ニ属スル．

(β) a ハ neutral element デアル．

(γ) a ハ complement a' ヲ有シ，$(a, a')D$ デアル．

(δ) a ハ unique complement a' ヲ有スル．

コヽデ，L ノ中心トハ Birkhoff, Lattice theory P. 23 ニ定義シテアルが如ク，L ヲ ST ノ如ク束ノ積トシテアラハストキ $[1, 0]$ トシテアラハサレル L ノ要素ノ全体デアル．コレハ L が一般ノ束ノ場合ノ中心ノ定義デアルが，特ニ L が modular デアル場合ニハ J.v. Neumann ノ連続幾何學ノ講義 I. 39 頁ノ如ク，L ヲ $L(0, a)$ ト $L(0, b)$ トノ直和（$L = L(0, a) \oplus L(0, b)$）デアラハシ得ルが如キ要素 a ノ全体トナル．

次ニ a が L ノ neutral element デアルトハ，a ト L ノ任意ノ二要素 x y トが L ノ distributive sublattice

ヲ生成スル，即チaト任意ノx, yトハアラユル形ノ配分ノ式ヲ満足スルコトデアル。

コレハBirkhoff, Neutral Elements in General Lattices, Bull. A. M. S. 46 (1940), 702ニアル定義デアル．連続幾何学ノ講義40頁ノ$(a)D$ニ相當スル。

$(a, b)D$トハ，Lノ任意ノ要素xニ對シテ$x \wedge (a \vee b) = (x \wedge a) \vee (x \wedge b)$が成立スルコトデアル。$L$がmodularデアル場合ハ連續幾何學講義I, 38頁Theorem 5.1カラ，上ノ式ニ於テa, bノ位置ハドコデモヨイノデアルが，一般ノlatticeノ場合ハa, bハ上ノ如キ位置ニアルモノトスル。

(α) —— (δ)ノ四命題がequivalentデアルコトハ連續幾何学ノ場合ハ講義40頁Theorem 5.2, Theorem 5.3ノ如クmodularityヲ用ヒテ証明シテ居ル．Operator ringノ場合ハ必ズシモmodularトハ云ヘナイカラ，operatorト云フ具体的ノ性質ヲ用ヒテ居ル．コゝデハ、コノ両者ヲ包含スルが如キ一般ノ束ノ場合ノ定理ヲ求メル。

ソレニハWilcox, Modularity in the theory of Lattices, Annals of Math. 40 (1939), 494ニ導入サレタ次ノ概念ヲ用ヒル．如何ナル$c \leqq a$ニ対シテモ$(b \vee c) \wedge a = (b \wedge a) \vee c$が成立スルトキ$(b, a)M$トカク。$a \wedge b = 0$ニシテ$(b, a)M$, $(a, b)M$が同時ニ成立スルトキハ$(a, b)\perp_s$トカク。（コレハaffine geometryニ於テハaトbトが交ラズ　シカモ平行デナイコトヲ意味シ

テ居ル)

<u>補助定理1</u>　次ノ二ツノ命題ハ equivalent デアル。

(1°)　$(a, b)\perp_s$

(2°)　$a \wedge b = 0$ ニシテ，$x \leqq a$，$y \leqq b$ ナル任意ノ x, y ニ対シテ

$$a \wedge (x \vee y) = x, \quad b \wedge (x \vee y) = y \qquad (1)$$

(証)　(1°) $\longrightarrow$ (2°)　$x \leqq a$, $(b, a)M$ デアルカラ

$$x \leqq a \wedge (x \vee y) \leqq a \wedge (x \vee b) = x$$

故ニ　$a \wedge (x \vee y) = x$　　同様ニ $b \wedge (x \vee y) = y$ デアル。

(2°) $\longrightarrow$ (1°)　(1) ノ第一式ニ於テ $y = b$ トオケバ
$a \wedge (x \vee b) = x$　即チ $(b, a)M$
同様ニ $(a, b)M$

<u>定理1</u>　束 L ガ 0 及ビ 1 ヲ有スルトキ，次ノ三ツノ命題ハ equivalent デアル。

(α)　a ハ L ノ中心ニ属スル。

(β)　a ハ neutral ニシテ complement a' ヲ有スル。

(γ)　a ハ complement a' ヲ有シ，$(a, a')D$, $(a, a')\perp_s$ デアル。(1)

(証)　(i)　(α) $\longrightarrow$ (β)　$L = S\,T$ トアラハストキハ，

---

(1)　(α) ト (β) トガ equivalent デアルコトハ，上記 Birkhoff ノ論文 105 頁 Theorem 6 ニ証明シテアル。

$a=[1,0]$ デアルカラ a ハ complement $a'=[0,1]$ ヲ有スル。 $[1,0]$ ガ ST ノ neutral element ナルコトハ，$1,0$ ガ夫々 S,T ノ neutral element デアルコトカラ容易ニ驗證シ得ル。

例ヘバ　$[1,0]\wedge([x,y]\vee[u,w])=[1,0]\wedge[x\vee u,\ y\vee w]$

$$=[1\wedge(x\vee u),\ 0\wedge(y\vee w)]$$

$$=[(1\wedge x)\vee(1\wedge u),\ (0\wedge y)\vee(0\wedge w)]$$

$$=[1\wedge x,\ 0\wedge y]\vee[1\wedge u,\ 0\wedge w]$$

$$=([1,0]\wedge[x,y])\vee([1,0]\wedge[u,w]).$$

(ii) $(\beta)\to(\gamma)$　a ハ neutral デアルカラ，$(a,a')D$, $(a,a')M$, $(a',a)M$ ガ成立スル。

(iii) $(\gamma)\to(\delta)$　$S=(s;\ s\leqq a)$, $T=(t;\ t\leqq a')$ トオキ，$L=ST$ ナルコトヲ証明スル。

任意ノ $x\in L$ ニ對シテ $x\to[x\wedge a,\ x\wedge a']$ ナル對應ヲ考ヘレバ，$[x\wedge a,\ x\wedge a']\in ST$ デアル。逆ニ $[s,t]$ ヲ ST ノ任意ノ要素トスル。

$x=s\vee t$ トオクトキハ，補助定理ノカラ $x\wedge a=(s\vee t)\wedge a=s$. 同様ニ $x\wedge a'=t$. 即チ x ハ $[s,t]$ ノ原像デアル。而シテ $[x\wedge a,\ x\wedge a']=[y\wedge a,\ y\wedge a']$ ナルトキハ $x\wedge a=y\wedge a$, $x\wedge a'=y\wedge a'$, $(a,a')D$ ナレバ

$$x=x\wedge(a\vee a')=(x\wedge a)\vee(x\wedge a')$$

$$=(y\wedge a)\vee(y\wedge a')=y\wedge(a\vee a')=y$$

故ニ $x\to[x\wedge a,\ x\wedge a']$ ニヨリテ L ト ST トハ一對一ノ對應ヲナス。コノ對應ハ明ラカニ order ヲ変ヘナイ。故ニ

LトSTトハ isomorph デアル. シカシテ $a \to [1, 0]$ デアルカラ, aハLノ enter ニ属スル。

次ニLニ relatively complemented ナル條件ヲ與ヘル. 即チ $a \leqq x \leqq b$ ナルトキハ, $x \vee y = b$, $x \wedge y = a$ ヲ満足スル. xノ relative complement y ガ存在スルト假定スル.

補助定理2. Lヲ relatively complemented lattice トスル. $a \wedge x = 0$ ナルトキハ, $x \leqq a'$ ナルガ如キ aノ complement a' ガ存在スル。(1)

(証) $(a \vee x) \vee y = 1$, $(a \vee x) \wedge y = x$ (1)

ヲ満足スル y ヲトル. (1)ノ第二式カラ $y \geqq x$ デアル. 故ニ(1)ノ第一式ハ $a \vee y = 1$ トナル. 又(1)ノ第二式ヨリ

$a \wedge y = a \wedge (a \vee x) \wedge y = a \wedge x = 0$. 故ニ y ガ求ムル a' デアル。

<u>定理2</u>. Lヲ 1, 0 ヲ有スル relatively complemented lattice トスレバ, 次ノ四ツノ命題ハ equivalent デアル。

(a) aハLノ中心ニ属スル.

---

(1) コノ dual モ成立スル. a' ガ relative complement ノ場合ニモ拡張出来ル. V. Neumann 連続幾何学ノ講義 I, 7頁ニ於テハ, L ガ complemented modular lattice ノ場合ヲ証明シテ居ル. シカシ上ノ如ク modular デナクトモ成立スル。

(β) a ハ neutral element デアル。

(γ) a ノ complement a' ニ對シ，$(a,a')D$，$(a,a')\perp_s$ ガ成立スル。

(δ) a ハ unique complement a' ヲ有シ $(a,a')\perp_s$ デアル。

(証) complement ノ存在ハ假定シテ居ルカラ，定理ノカラ (α), (β), (γ) ハ equivalent デアル。

(α) ⟶ (δ) ヲ証明シヨウ。

$$[1,0]\vee[x,y]=[1,1],\quad [1,0]\wedge[x,y]=[0,0]$$

ガ成立スルノハ $x=0$, $y=1$ ノトキ及ビソノトキニ限ル．故ニ $a=[1,0]$ ハ unique complement $a'=[0,1]$ ヲ有スル．$(a,a')\perp_s$ ハ (γ) カラ出ル。

次ニ (δ) ⟶ (α) ヲ証明シヨウ．任意ノ $x\in L$ ヲトリ，$u=a\wedge x$ トオク．$u\vee v=x$, $u\wedge v=0$ ナル v ヲトル．シカルトキハ $a\wedge v=a\wedge v\wedge x=u\wedge v=0$.

a ハ unique complement a' ヲ有スルカラ補助定理 2 カラ $v\leqq a'$ デアル。

$u\leqq a$, $v\leqq a'$ ニシテ $(a,a')\perp_s$ デアルカラ，補助定理ノカラ $a'\wedge x=a'\wedge(u\vee v)=v$

故ニ $x\wedge(a\vee a')=x=u\vee v=(x\wedge a)\vee(x\wedge a')$

即チ $(a,a')D$ デアル．（証明終）

定理 2 が，始メニ述ベタ complemented modular lattice ノ場合ト operator ring ノ場合ノ両者ヲ包含スル所ノ求ムル定理デアル．コノコトハ complemented modular lattice ノ場合ハ明ラカデアル。ナントナレバコノトキハ relatively complemented デアリ，modularity カラ $(a, a')\perp_s$ ハ常ニ成立スルカラ，(γ) (δ) ニ於テ $(a, a')\perp_s$ ハ不要デアル。

次ニ operator ring ノ場合ヲ考ヘル．$\mathbf{M}$ ヲ Hilbert 空間ニ於テ 1 ヲ含ム operator ring トシ，$\mathbf{M}$ ニ属スル projection ノ全体ヲ $\mathbf{E}$ ニテアラハス．$E, F \in \mathbf{E}$ ナルトキ，$E \leqq F$ ヲ $EF = FE = E$ ニヨッテ定義スルトキ $\mathbf{E}$ ハ束ヲナシテ居ル．$EF = 0$ 或ハ $FE = 0$ ノトキハ $E \vee F = E + F$ デアリ，$EF = FE$ ノトキハ $E \wedge F = EF$ デアル。

先ヅ $\mathbf{E}$ ガ relatively complemented ナルコトヲ示ス．$G \leqq E \leqq F$，E, F, G ハ互ニ可換デアルカラ $E_1 = (F - E) \vee G = (F - E) + G$ トオケバ，E ト E_1 トモ可換デアル。故ニ

$$E \vee E_1 = E \vee (F - E) \vee G = E \vee (F - E) = F,$$

$$E \wedge E_1 = EE_1 = E\{(F - E) + G\} = EG = G$$

故ニ E_1 ガ E ノ relative complement デアル。

従ッテ定理 2 ガ適用出来ル．コノトキニ (γ) ニ於テ $(E, E')\perp_s$ ハ不要デアルコトヲ示サウ．$(E, E')D$ デアルカラ

$$1 - E = (1 - E) \wedge (E \vee E') = \{(1 - E) \wedge E\} \vee \{(1 - E) \wedge E'\}$$
$$= (1 - E) \wedge E'$$

即チ $1 - E \leqq E'$　従ッテ $(1 - E)E' = E'(1 - E) = 1 - E$.

即チ $EE'=E'E$ 故ニ $EE'=E\wedge E'=0$

從ッテ $E'=1-E$ デアル。今 $H\leqq E$ トスルトキハ，E, H, E' ハ互ニ可換デアリ $HE'=0$ デアルカラ

$$E\wedge(H\vee E')=E(H+E')=EH=H.$$

故ニ $(E', E)M$. 同様ニ $(E', E)M$. 故ニ $(E, E')\perp_{\delta}$ デアル。

又 (δ) ニ於テモ $(E, E')\perp_{\delta}$ ハ不要デアル。ソレハ E ハ unique complement E' ヲ有スルノデアルカラ $E'=1-E$ デアルベキデアル。故ニ上述ノ如ク $(E, E')\perp_{\delta}$ デアル。

カクノ如クシテ定理2カラ operator ring ノ場合ノ定理ガ出テ来ル。

以上デ我々ノ目的ハ達セラレタノデアルガ、定理2ニ関聯シテ次ノコトガ云ヘル。束ノ中心ハ Boole 代数ヲ作ルカラ[1] 定理2カラ直ニ次ノ定理ガ成立スル。

<u>定理3</u>　0, 1 ヲ有スル relatively complemented lattice L ガ Boole 代数デアルタメノ必要且ツ充分ナル條件ハ，L ノ任意ノ要素 a ハ唯一ツノ complement a' ヲ有シ，$(a, a')\perp_{\delta}$ ガ成立スルコトデアル。

コノ定理ハ complement ノ単一性カラ Boole 代数ガ云ヘル一ツノ場合ヲ示シテ居ル。Birkhoff ノ本94頁ニ complement ノ単一性ノミカラ Boole 代数ガ云ヘルカドウカハ未解決ノ問題デアルトナシ，次ノ三ツノ場

(1) Birkhoff ノ論文, 705頁 Theorem 5.

合ニハソレガ云ヘルコトヲ述ベテ居ル。

(1°) L ガ modular ナルトキ,

(2°) $a \longrightarrow a'$ ガ dual automorphism ナルトキ,

(3°) L ガ complete atomic lattice ナルトキ.

定理3ハ(1°)ノ場合ヲ更ニ一般化シタモノデアル。

尚定理3ニ於テ, complement ノ単一性ヲ除ケバ, 次ノ定理ガ成立スル.

<u>定理4.</u> 0, 1ヲ有スル relatively complemented lattice L ガ modular デアルタメノ必要且ツ充分ナル條件ハ, 任意ノ要素 a トソノ complement a' トノ間ニ $(a,a')\perp_p$ ガ成立スルコトデアル。

(証明) 必要ナルコトハ明ラカデアル。充分ナルコトヲ証明スルタメニ, $c \leqq a$ ナルトキ $(b \vee c) \wedge a = (b \wedge a) \vee c$ ガ成立スルコトヲ証明シヨウ。 $(a \wedge b) \vee x = b$, $(a \wedge b) \wedge x = 0$ ナル x ヲトレバ, $x \leqq b$ デアルカラ $a \wedge x = 0$. 故ニ補助定理2ヨリ $x \leqq a'$ ナル a ノ complement a' ガ存在スル。 $(a \wedge b) \vee c \leqq a$ ニシテ $(a, a')\perp_p$ デアルカラ補助定理1カラ $(b \vee c) \wedge a = [(a \wedge b) \vee x \vee c] \wedge a = (a \wedge b) \vee c$ デアル。

(終)