1013. 標數pノ準單純リイ環

松島與三（阪大學生）

任意ノ体kノ上ノ準單純リイ環Lヲ考ヘマス。

kノ標數0ノトキハ，Lハ可換ナラザル單純環ノ直和ニナリ、シカモソノderivationハスベテinnerニナルコトハ，ヨク知ラレテヲリマスガ標數$p \neq 0$ノ場合ニハ、一般ニ單純環ノ直和ニナラズ、又derivationハinnerデアルトハ限ラナイノデ，單純環ノコトガワカッタトシテモ、準單純環ノ構造ハ一般ニハ分ラナイシ、derivation algebraノ構造モ複雜ニナッテ來マスガ、Lノidealガ準單純デアルヤウナ場合ハ、割合簡單ニナリマスノデ、ソノヤウナ場合ニツイテ、準單純環ガ單純環カラ、ドノヤウニシテ得ラレルカヲ少シシラベテ見ルコトニシマス。

§1. 体kノ上ノLie環Lヲ考ヘル。ソノ積ヲ$a \circ b$ $(a, b \in L)$デ表スコトニシマス。

$$\sigma(\alpha x + \beta y) = \alpha \sigma x + \beta \sigma y$$

$$\sigma(x \circ y) = (\sigma x) \circ y + x \circ (\sigma y)$$

$x, y \in L,\ \alpha, \beta \in k$

ヲ満スLノ linear transformation ヲ derivation トヨブ。

$a \in L$ トスレバ、Jacobi ノ恒等式ヨリ

$$a \circ (x \circ y) = (a \circ x) \circ y + x \circ (a \circ y)$$

トナルカラ，$x \to a \circ x$ ナル linear transformation ハ derivation トナル。コレヲ L ノ inner derivation トヨビ、Zassenhaus ニナラッテ、$\underline{a}$ デ表スコトニスル。

二ツノ derivation σ, τ ガアッタトキ，$\sigma \circ \tau = \sigma\tau - \tau\sigma$ ト定義スレバ，コレニヨッテ derivation ノ全体 D(L) ハ k ノ上ノ Lie 環ヲツクリ、inner derivation ノ全体 I(L) ハソノ ideal ニナル。[1]

初メニ準単純環ノ derivation algebra ノコトヲシラベテ見マス。

（定理1） L ヲ準単純ナ Lie 環トスレバ，ソノ derivation algebra D(L) ノ subalgebra R

---

1) 吉田先生: A characterisation of the adjoint representation of the semi-simple Lie rings (Jap. Journ. 1938)

Zassenhaus: Über Liesche Ringe mit Primzahlcharakteristik (Abh. Hamburg Bd. 13. 1939)

デ、$I(L)$ヲフクムモノハ、スベテ準單純デアル。特ニ$D(L)$ハ準單純デアル。

(證) Rヲ$D(L)$ノ subalgebra, $R \supseteq I(L)$トスル。Rノ solvable ideal Aヲトル。$A \cap I(L)$ハ$I(L)$ノ solvable ideal デアリ, $L \cong I(L)$デアルカラ、$A \cap I(L) = 0$. $A \circ I(L) \subseteq A \cap I(L)$ナル故 $A \circ I(L) = 0$.

從ッテ$\sigma \in A$トスレバ、任意ノ$\underline{x} \in I(L)$ニ對シテ $\sigma \circ \underline{x} = 0$, シカルニ $\sigma \circ \underline{x} = \underline{\sigma x}$ デアルカラ[2]、スベテノ$x \in L$ニ對シ、$\underline{\sigma x} = 0$トナルカラ、$\sigma x = 0$. $\sigma = 0$ コレハ $A = 0$ ナルコトヲ示ス。從ッテRハ準單純デアル。

q. e. d.

(定義) スベテノ derivation σ ニ對シ、invariant ナLノ submodule ヲLノ characteristic ideal トヨブ。

Lie 環Lガ$L \circ L = L$ヲ滿足スルトキ vollkommen トイフ。

(定理2) Lガ vollkommen デ、且ツソノ centrum $= 0$ トスレバ、ソノ derivation algebra $D(L)$ニ於テハ、$I(L)$ヲフクム subalgebra ノ derivation ハ$D(L)$ノ inner derivation ニ擴張出來ル。特ニ$D(L)$ノ derivation ハスベテ

---

2) cf. 1)

inner デアル。

(證)

$R \supseteq I(L)$ ヲ $D(L)$ ノ subalgebra トスル。R ノ任意ノ derivation E ヲトル。L ノ centrum $= 0$ ナル故、$L \cong I(L)$ デ、$I(L)$ ハ R ノ vollkommen ナ Ideal ニナルカラ characteristic デアル。[4)]

故ニ E ハ $I(L)$ ノ de　　　n $\bar{\varepsilon}$ ヲ induce スル。

$L \cong I(L)$ ナルコトヨリ、任意ノ $x \in L$ ニ對シ

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, dash] & I(L) \\ x \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d, "\varepsilon"'] & \underline{x} \arrow[d, "\bar{\varepsilon}"] \\ \varepsilon x \arrow[r, leftrightarrow] & \bar{\varepsilon}\underline{x} \end{tikzcd}$$

$\underline{\varepsilon x} = \bar{\varepsilon}\underline{x}$ トナル様ナ εx ガ一意的ニ存在スル。

ソウスレバ、$x \longrightarrow \varepsilon x$ ナル對應ハ L ノ derivation ニナル。スナハテ $\varepsilon \in D(L)$

ε ガ $D(L)$ ニ於テ induce スル inner derivation ヲ $\underline{\varepsilon}$ トシ $E - \underline{\varepsilon} = \widetilde{E}$ トオク。

$$(E - \underline{\varepsilon})\underline{x} = E\underline{x} - \underline{\varepsilon}\underline{x} = \bar{\varepsilon}\underline{x} - \varepsilon \circ x$$
$$= \underline{\varepsilon x} - \underline{\varepsilon}\underline{x} = 0$$

故ニスベテノ $\underline{x} \in I(L)$ ニ對シ $\widetilde{E}\underline{x} = 0$

$\eta \in R$ トスル。

$$0 = \widetilde{E}(\eta\underline{x}) = \widetilde{E}(\eta \circ \underline{x}) = (\widetilde{E}\eta) \circ \underline{x} + \eta \circ (\widetilde{E}\underline{x})$$

---

3) Zassenhaus P. 52 ニハ $D(L)$ ノ derivation ガスベテ inner ニナルコトダケガ書イテアル。

4) Zassenhaus P. 52.

$$=(\widetilde{E}\eta)\circ \underline{x}=(\underline{\widetilde{E}\eta})x$$

ダカラ、スベテノxニ對シ$(\widetilde{E}\eta)x=0$ 從ッテ$\widetilde{E}\eta=0$ スナハチ Kデハ$\widetilde{E}=\underline{E}$ トナッテヰル。 q. e. d.

（定理3） L ヲ準單純デ、單純環ノ直和ニナッテヰルトスル。ソウスレバ $R\supseteq I(L)$ ナル $D(L)$ ノ *subalgebra* R ハ定理ノコリ準單純デハアルガ、$I(L)$ ハ R ノ *maximal fullreducible*[5] *ideal* デ、R ガ $I(L)$ ヨリ、本當ニ大キイ場合ハ *fullred.* ニナラヌ。シカシ、R ノ *ideal* ハスベテ準單純デアル。

（証）

$L\cong I(L)$ ナル故、$I(L)$ ガ *fullred.* ナルコトハ明カデアル。$I(L)$ ヲ含ム R ノ *fullred. ideal* A ガアルトスレバ、$I(L)$ ハ A ノ直和因子トナル。 ∴ $A=B+I(L)$.
$B\circ I(L)=0$ ナル故、前ト同様ニシテ、$B=0$ 從ッテ
$A=I(L)$ トナル。

次ニ R ノ *ideal* ガスベテ準單純ナルコトヲイフ。A ヲ任意ノ R ノ *ideal* トスル。$I(L)\supseteq A$ ノトキハ $I(L)$ ガ *fullred.* ナルコトヨリ明カデ、又 $I(L)\frown A=D=0$ ノトキハ、$A=0$ トナルカラ、$D\neq 0$, $A\not\subset I(L)$ トシテ証明スル。$I(L)$ ハ *fullred* ナル故、D ハ $I(L)$ ノ直和因子トナル。

---

5) 以後可換ナラザル單純環ノ直和ニナル環ノコトヲ *full-red* トヨブコトニスル。

$I(L) = B + D$ シカルニBハ明カニ vollkommen ダカラ $I(L)$ ノ ch. ideal デ，$I(L)$ ガ ideal ダカラ，R ノ ideal トナル。

D ノ centralisater[6)] ヲ $Z(D)$ トスル。$B \circ D = 0$ ダカラ $B \subseteq Z(D)$ デアルカラ

$$B \subseteq Z(D) \cap I(L)$$

シカルニ $D \cap Z(D)$ ハ R ノ可換ナ ideal デアルカラ，

$D \cap Z(D) = 0$

従ッテ $(I(L) \cap Z(D)) \cap D = 0$ 故ニ

$$(I(L) \cap Z(D),\ D) = (I(L) \cap Z(D)) + D$$

$$(I(L) \cap Z(D),\ D) \leq I(L) = B + D$$
$$\leq (I(L) \cap Z(D)) + D$$

ナル故

$$I(L) = (I(L) \cap Z(D)) + D \qquad B \subseteq I(L) \cap Z(D)$$

ヨリ

$$B = I(L) \cap Z(D)$$

トナル。

$$B \cap A = I(L) \cap Z(D) \cap A = (I(L) \cap A) \cap Z(D)$$
$$= D \cap Z(D) = 0$$

ナル故 $(B, A) = B + A$，$(B, A) \subseteq (I(L), A)$ ダガ

$$I(L) = B + D \leq B + A,\ A = B + A$$

ナル故

$$(I(L), A) = B + A \text{ トナル。}$$

---

6) $x \circ D = 0$ ナル x ノ全体ヲイフ。ソレハ又 R ノ ideal ニナル。

故ニ、Aノ ideal ハ ($I(L)$, A) ノ ideal トナルガ、($I(L)$, A) ≠ $I(L)$ ハ定理1ニヨリ、準單純ナル故、A モ準單純デナケレバナラナイ。 q. e. d.

§2. 次ニ、上ニヤッタコトノ逆ヲ考ヘテ行クコトニシマス。

group ノ場合ニ、Fitting ガ同ジヤウナコトヲヤッテ居リマスガ (Fitting: Beiträge zur Theorie der Gruppen von endlichen Ordnung, Jahresbericht D. M. V. Bd. 48) Lie 環ノ場合ニハ、準單純環ノ ideal ハ準單純ニナラナイカモシレナイノデ、假定ニ入レテヤラネバナリマセン。

先ヅ、初メニ準單純ナ L ノ minimal ideal ガスベテ準單純デアルト假定シマス。コノ假定ナシニ次ノ Lemma ガ成立ツ。

(Lemma 1)

任意ノ準單純環 L ノ二ツノ ideal A, B ガ fullreducible ナラ、ソノ和 (A, B) モ fullred. デアル。

(證)

定理3ノ證明ノトキト同樣ニシテ、$A \wedge B = D$, $A = A_1 + D$ トスレバ、$(A, B) = A_1 + B$ ナルコトガ證明出來ル。

A_1 モ、B モ fullred. デアルカラ、(A, B) モ fullred. デアル。

(定理4) minimal ideal ガ準単純デアルヤウナ準単純環 L ハ唯一ツノ 0 デナイ、maximal fullred. ideal S ヲモチ、ソレハ characteristic ideal デアル。

(証) Max. fullred. ideal ガニツアッタトシ、コレヲ A, B トスレバ、ソノ和モ Lemma 1 ニヨリ fullred. ニナルカラ、唯一ツニ限ルコトガワカル。且ツソレハ、勿論 vollkommen デアルカラ、Characteristic デアル。次ニ 0 デナイコトヲイフ。

L ノ min. ideal A ヲトル。(A ハ vollkommen トナルコトハスグイヘル)。

A ノ任意ノ ideal B ヲトレバ、$B\circ B = B$ トナルナラ、B ハ vollkommen デ、故ニ A ノ ch. ideal デ、A ガ ideal ナル故、L ノ ideal トナルカラ、
$B \neq B\circ B$。同様ニシテ $B\circ B \neq (B\circ B)\circ(B\circ B)$……
シタガッテ、B ハ可解デアルカラ、A ガ準単純ナコトヨリ $B=0$。従ッテ A ハ単純デアル。$A \subseteq S$ ダカラ、$S \neq 0$.

q. e. d.

$S = S_1 + \cdots\cdots + S_n$ ト単純環ノ直和ニナッタトスレバ S_i ガ可換デナイコトヨリ vollkommen デアルカラ、前ノヤウニ S_i ハ L ノ minimal ideal ニナルコトガワカル。逆ニ Min. ideal ハ上ニ証明シタ如ク単純デアルカラ、S ハ実ハ min. ideal ノ sum トナリ、従ッテ L ノ Sockel (Loewy ノ Kompositionsreihe

ノ一番最後ノモノ）ト一致スルコトガワカル。故ニコレカラ上ノ S ヲ L ノ Sockel トヨブコトニスル。

定理4ノ條件ノ下ニ

(Lemma 2) L ノ Sockel S ノ centralisater $Z(S)$ ガ準単純デアルト假定スル。ソウスレバ $Z(S)=0$ トナルコトガイヘル。

(証)

$S \cap Z(S)$ ハ可換ナ ideal ダカラ、$S \cap Z(S)=0$.

故ニ $(S, Z(S)) = S+Z(S)$

$Z(S)$ ノ min. ideal A ヲ考ヘルト、$Z(S)$ ガ準単純トイフコトカラ、A ハ vollkommen. 從ッテ $Z(S)$ ノ ch. ideal デ、從ッテ L ノ ideal ニナル. 勿論 A ハ L ノ min. ideal ダカラ、假定ヨリ準単純トナル。

定理4ヲ $Z(S)$ ニツカヘバ、$Z(S) \neq 0$ ナラ、0 デナイ Sockel S' ガアル。$S+S'$ ハ fullred. ニナルカラ、$S+S'=S$, $S'=0$ トナラネバナラナイ。從ッテ $Z(S)=0$ トナラネバナラナイ。

（定理5） L ガ準単純トシ、L ノ min. ideal 及ビ Sockel centralisater ガ準単純トスル。ソウスレバ、L ハ fullreducible ナ Lie 環ノ derivation algebra ノ inner derivation ヲスベテフクム様ナ subalgebra ト isomorph デアル。

(証) L ノ Sockel S ハ 0 デナリ、fullred.デ

アル。

$a \in L$ ニ對シ、S ノ derivation $\bar{a}: x \to a \circ x$ ($x \in S$) ヲ對應セシメルト、コレニヨリ L ハ $D(S)$ ノ $I(S)$ ヲフクムヌヲナ subalgebra $\bar{L}$ ニ homomorph ニ abbilden サレルガ、Lemma 2ヨリ実ハ isomorph ニナルコトガワカル。

定理3ト組合セテ

(系1) L ノ min. ideal 及ビ Sockel, centralisator ガ準單純デアレバ、L ノスベテノ ideal ハ準單純デアル。

(系2) 準單純環 L デ、ソノ ideal ガスベテ準單純デアルタメノ必要且ツ十分ナル條件ハ、L ガ fullred. ナ環ノ derivation algebra ノ inner ヲスベテフクム subalgebra ト isomorph トナルコトデアル。

今ト公様ニ、L ノ min. ideal 及ビ Sockel ノ centralisator ガ準單純ト假定スル。Sockel S ハ ch. ideal デアルカラ、L ノ任意ノ derivation σ ニ対シ、$\sigma S \subseteq S$ トナルカラ、定理5ノ証明ニ於ケルト同様ニ、σ ニ對シ σ ガ S ニ於テ induce スル derivation $\bar{\sigma}$ ヲ對應サセルト、$D(L)$ ハ $D(S)$ ノ subalgebra ニ homomorph ニウツルガ、実ハ isomorph ニナル。何者、0ニ對應スル $D(L)$ ノ ideal ヲ A トスレバ定理5ノ對應ガ isomorph ナルコトヨリ $A \cap I(L) = 0$ コレヨリ $A = 0$ ガ出ル。$D(L)$ ノ Bild ヲ $\overline{D(L)}$ デ表ハス。

$\bar{\sigma} \in \overline{D(L)}$, $\bar{a} \in \bar{L} = \overline{I(L)}$ トスレバ,

$$(\bar{\sigma} \circ \bar{a})x = \bar{\sigma}(\bar{a}x) - \bar{a}(\bar{\sigma}x) = \sigma(a \circ x) - a \circ (\sigma x)$$
$$= (\sigma a) \circ x = (\overline{\sigma a})x$$

ナル故

$$\bar{\sigma} \circ \bar{a} = \overline{\sigma a} \in \bar{L}$$

スナハチ $\bar{\sigma}$ ハ $\bar{L}$ ノ normalisater[7] $N(\bar{L})$ ニ属スル。

逆ニ、$\varepsilon \in N(\bar{L})$ トスレバ、任意ノ $\bar{a} \in \bar{L}$ ニ對シ、$\varepsilon \circ \bar{a} \in \bar{L}$ ダカラ $\bar{b} = \varepsilon \circ \bar{a}$ ナル $b \in L$ ガ一意的ニ存在スル。$b = \varepsilon' a$ トオク。

スナハチ $\overline{\varepsilon' a} = \varepsilon \circ \bar{a}$ ソウスレバ

$$\overline{\varepsilon'(a \circ b)} = \varepsilon \circ \overline{(a \circ b)} = \varepsilon \circ (\bar{a} \circ \bar{b})$$
$$= (\varepsilon \circ \bar{a}) \circ \bar{b} + \bar{a} \circ (\varepsilon \circ \bar{b})$$
$$= \overline{\varepsilon' a} \circ \bar{b} + \bar{a} \circ \overline{\varepsilon' b} = \overline{\varepsilon' a \circ b + a \circ \varepsilon' b}$$

ナル故

$$\varepsilon'(a \circ b) = (\varepsilon' a) \circ b + a \circ (\varepsilon' b)$$

スナハチ ε' ハ L ノ derivation デアリ、$x \in S$ ニ対シテハ $\bar{x} = \underline{x}$ (スナハチ $\bar{x}$ ハ S ノ inner derivation) ナルコトハ定義ヨリ明デアルカラ。

$$\overline{\varepsilon' x} = \varepsilon \circ \bar{x} = \varepsilon \circ \underline{x} = \varepsilon \underline{x} = \overline{\varepsilon x} \longrightarrow \varepsilon' x = \varepsilon x$$

スナハチ $\overline{\varepsilon'} = \varepsilon$ デアル。故ニ $\varepsilon \in \overline{D(L)}$.

スナハチ $\overline{D(L)}$ ハ $\bar{L}$ ノ normalisater ト一致スル。

従ッテ

---

7) $x \circ \bar{L} \leq \bar{L}$ ナル x ノ全体ヲ $\bar{L}$ ノ normalisater トヨブ。

(定理6)

準単純環 L ノ min. ideal, 及ビ Sockel ノ centralisater ガ準単純デアルト假定スル。ソウスレバ, L ハ fullreducible ナ Lie 環 S ノ derivation algebra $D(S)$ ノ $R \supseteq I(S)$ ナル subalgebra ト isomorph ニナルガ、コノトキ $D(L)$ ハ R ノ $D(S)$ ニ於ケル normalisater $N(R)$ ト isomorph ニナル。

上ノ証明ノ系トシマシテ

(系) 上ノ同ジ條件ノ下デ、L ノ二ツノ derivation σ, τ ガソノ Sockel S ノスベテノ元 x ニ対シ $\sigma x = \tau x$ ナラ $\sigma \equiv \tau$ デアル。

次ニ Sockel ノ derivation ガスベテ L ノ derivation ニ拡張出来ルトスレバ、$\overline{D(L)} = D(S)$, スナハチ $\overline{L}$ ハ $D(S)$ ノ ideal ニナリ、更ニ L ノ inner derivation ニ拡張出来ルトスレバ、上ノ系ヨリ、L ノ derivation ハスベテ inner デアルコトガワカル。

従ッテ、$\overline{L} = D(S)$ トナル。

前ニ述ベタコトト一緒ニスレバ

(定理7)

準単純環 L ガ fullreducible ナ環ノ derivation algebra ト isomorph ニナルタメノ必要且ツ十分ナル條件ハ

1) L ノ ideal ハスベテ準単純デ,

2) L ノ Sockel ノ derivation ガスベテ L ノ

inner derivation ニ拡張出来ルコトデアル。

§3. Zassenhaus ハ上記論文 80 頁デ次ノ三ツノ Vermutung ヲ述ベテ居リマス。

1) 可換デナイ単純環 L ノ outer derivation algebra D(L)/I(L) ハ可解デアル。

2) スベテノ可換デナイ charakteristisch einfach ナ Ring ハ Charakteristik p ノトキ、einfach ナ algebra ノ p-Potenz ring ニナル。

3) L ヲ可換デナイ、charakteristisch einfach ナ環トスレバ D(L)/I(L) ハ可解デアル。

(実ハ 1) 2) ヨリ 3) ガ出ルコトガ書イテアリマス)

更ニ 2) 3) ヨリ次ノコトヲ結論シテ居リマス。

4) vollkommen ナ準単純環ハ可換デナイ単純環ノ直和ニナル。(P.80, Satz 8)

トコロガ Jacobson ハ Classes of restricted Lie algebras of characteristic p. I (American Journal Vol. LXIII 1941) デ 1) ニ対スル反例ヲ示シテ居リマス。ソウスレバ勿論 3) モ一般ニ成立タヌワケデスガ、コゝデ 4) モ実ハ一般ニ成立タヌコトヲ言ヒマス。

ソノタメニハ 4) ガ正シイトスレバ 1) モ正シイコトヲ証明スレバ十分ナワケデス。4) ガ成立シテ 1) ガ成立シナ

イトスル。ソウスレバ可換デナイ単純環Lガアッテ、

$D(L)/I(L)=K$ ガ *solvable* デナイ。

$$A^0K=K,\quad AK=K\circ K,\quad A^2K=A(AK)=(K\circ K)\circ(K\circ K)\cdots\cdots$$

$$A^iK=A(A^{i-1}K)=A^{i-1}K\circ A^{i-1}K$$

トオク。(A: *Ableitung*)

$K\supseteq AK\supseteq A^2K\supseteq\cdots\cdots$ デ、K ハ *solvable* デナイ

カラ、i ガアッテ

$$A^iK=A^{i+1}K=\cdots\cdots\neq 0$$

トナル。

シカルニ $A^iK=A^i\left(D(L)/I(L)\right)=A^iD(L)+I(L)/I(L)$

デアルカラ

$$N=A^iD(L)+I(L)=A^{i+1}D(L)+I(L)=\cdots\cdots$$

$N\neq I(L)$ デアル。

$$AN=A(A^iD(L)+I(L))\supseteq A^{i+1}D(L)+AI(L)$$

$$=A^{i+1}D(L)+I(L)=N\qquad(\because\ AI(L)=I(L))$$

ナル故、$AN=N$ スナハチ N ハ *vollkommen* デアル

ガ $N\neq I(L)$ ダカラ、定理3ニヨリ準単純デシカモ、単純

環ノ直和ニナラナイ。コレハ矛盾デアル。