# 1023. 代数方程式ニ就イテ

春木　博（神高商船）

$n$次ノ代数方程式 $(a_0+ib_0)x^n+\cdots\cdots+(a_k+ib_k)x^{n-k}+\cdots\cdots+(a_n+ib_n)=0$ ニ於テ $a_0\geqq a_1\geqq a_2\geqq\cdots\cdots\geqq a_n>0$, $b_0\geqq b_1\geqq b_2\geqq\cdots\cdots\geqq b_n>0$ ナラバ任意ノ根ヲ$\alpha$トスルトキ $|\alpha|\leqq\rho$ $(1<\rho<\sqrt{2})$ ナルコトガ証明サレテヰルガ、今如何ナル條件ヲ係数 $a_k$, $b_k$ ニ與ヘタナラバ単位円内ニ$n$ケノ根ヲ持ツカ？

次ニ簡単ナル一定理ヲ述ベヨウ。

（定理）　$f(x)=(a_0+ib_0)x^n+\cdots\cdots+(a_k+ib_k)x^{n-k}$

$+\cdots\cdots+(a_n+i\,b_n)=0$

ニ於テ $a_0>a_1>a_2>\cdots\cdots>a_n>0$, $b_k=\lambda a_{n-k}$ ($k=0, 1, 2, \cdots\cdots, n$)。$|\lambda|<1$ ナラバ $f(x)=0$ ノ任意ノ根ハ単位円内ニアル。

(証明) $f(x)=(a_0x^n+\cdots\cdots+a_kx^{n-k}+\cdots\cdots+a_n)$

$+i(b_0x^n+\cdots\cdots+b_kx^{n-k}+\cdots\cdots+b_n)$

シカルニ $b_k=\lambda a_{n-k}$ ナルニヨリ

$$b_0x^n+\cdots\cdots+b_kx^{n-k}+\cdots\cdots+b_n$$

$$=\lambda x^n\left(\frac{a_0}{x^n}+\cdots\cdots+\frac{a_{n-k}}{x^k}+\cdots\cdots+a_n\right)$$

故ニ $|x|=1$ デハ

$$|i(b_0x^n+\cdots\cdots+b_kx^{n-k}+\cdots\cdots+b_n)|$$

$$=|\lambda|\left|\frac{a_0}{x^n}+\cdots\cdots+\frac{a_{n-k}}{x^k}+\cdots\cdots+a_n\right|$$

$$=|\lambda|\left|a_0x^n+\cdots\cdots+a_{n-k}x^k+\cdots\cdots+a_n\right|$$

$$<\left|a_0x^n+\cdots\cdots+a_{n-k}x^k+\cdots\cdots+a_n\right|$$

故ニるーしぇーノ定理ニヨリ $f(x)=0$ ト $a_0x^n+\cdots+a_n=0$ トノ二ツノ方程式ハ $|x|<1$ デ同数ノ根ヲモツ。シカモ $a_0x^n+\cdots\cdots+a_n=0$ ノ根ハスベテ $|x|<1$ ニアルカラ(掛谷ノ定理)、$f(x)=0$ ハ $|x|<1$ デ $n$ 箇ノ根ヲ持ツ。

(完)