1025. 一般ニ元複素変數函數ノ Categories ニ就テ

高須 鶴三郎(東北大)

$\zeta = x + jy$ ($j^2 = \mu + \nu j$; μ, ν, x, y ハ實數) ノ函數論ハ之ヲ一段高イ所ニ跳ビ上ッテ, $\zeta = x + jy + ijz + iu$ ノ函數論ノ見地カラ眺メテ見ルト, ソノ category ガハッキリシマス。此ノ ζ ハ四次元ノ Euclid 若シクハ非 Euclid parabolic ナ空間ノ直交系 $xyzu$ ニ refer シテ表現ガ出來マス. ソノ際 xy-平面及ビ zu 平面上デハ Winkelmass ガ hyperbolisch ナ N.E. parabolic geometry ガ成立シ, yz-平面及ビ xu-平面デハ Euclid 幾何ガ成立シマス。私ガヤッテ居ル $\zeta = x + jy$ ノ函數論ハコノ bicomplex ノ場合ニ於テ, ζ ノ domain ヲ xy-平面 ($z = 0$, $u = 0$) ニ限ッタ場合ノ bicomplex ノ函數論デアリマスカラ, $\zeta = x + jy$ ノ変域ハ二次元デアリマスガ, $f(\zeta), = X(x, y, z, u) + jY(x, y, z, u) + ijZ(x, y, z, u) + iU(x, y, z, u)$ ノ変域ハ一般ニハ $f(\zeta) = X(x, y, 0, 0) + jY(x, y, 0, 0) + ijZ(x, y, 0, 0) + U(x, y, 0, 0)$ ノ示ス様ニ, 依然トシテ四次元ナノデアリマス. 例ヘバ

$$f(\zeta) = \log \zeta + i\zeta, \quad \zeta = \rho e^{j\theta},$$
$$\rho = (x^2 + \nu xy - \mu y^2)^{\frac{1}{2}} > 0$$

トシマスト，

$$f(x+jy)=\mathrm{Log}\,\rho+j\theta+2\pi nji+ix+ijy$$
$$=\mathrm{Log}\,\rho+j\theta+ij(2\pi n+y)+ix$$

トナルが如クデアリマス。

ソレヲ，今迄ノ人ハstepヲ下ゲテζノ変域モ

$$f(\zeta)=X(x,y,0,0)+jY(x,y,0,0).$$
$$Z(x,y,0,0)\equiv 0,\quad U(x,y,0,0)\equiv 0$$

ノ変域モ二次元ノ場合ダケ考ヘタタメニCauchyノintegral formula等ガ出テ来ズ，従ッテ全函数論ノ拡大統一ニ成功シナカッタノデアリマス。其ノタメニ，今迄私ノ受ケタdiscussionハ別ノCategories間ノコトニナリマシテ，全然non-senseデアリマシタ。

前回述ベマシタ$\oint\frac{d\zeta}{\zeta}=\oint d\theta=2\pi i\ (\rho=\mathrm{konst})$ノ証明モ，私ハハジメハ異ッタangular domainsノradiusvectors間ノ対應ハconventionデアッテ，analysisトシテハcriticalカト思ッタノデシタが，ヨク考ヘテ見レバ，NullteilerノN軌跡タルisotropes OA, OA′ガアレバ，j-OrthogonalinvolutionガN存在シテradiusvectors OP, $O\bar{P}$間ノ對應ガツキ，$\angle(Ox,OP)+\angle(O\bar{P},Oy)=0$ガ必然ニ生レ，之レヲanalysis型ニカケバ，$G+(-G)=0$型トナリ，$OP\to OA$（従テ$O\bar{P}\to OA$）ニ際シテハ$\lim\limits_{G\to\infty}(G+(-G))=0$ガ利イテ，少シモanalysisトシテcriticalデナク，conventionハ毎ノLaguerre型ノ定義（之レハ

普通ノ函数論デモ通用シテ居ル。ソノ外ニ何物ニモナイノデアリマス。即チ私ノ函数論ト普通ノ函数論トハ何カラ何迄同功同罪デアリマス。

N.B. (i) *bicomplex* ノ $\zeta = x+jy+jj'z+ju$ ノ函数論モ亦更ニ一段高イ *tricomplex* ノ $\zeta = x+jy+j'z+j''u+jj'v+jj''w+j'j''t$ ノ場合ニ跳ビ上ッテ見下シタナラ又色々今迄見エナカッタコトガ見エルコトデセウ。両理論共共今手許デ美シク展ビツツアリマス。

(ii) 平面ノ *conformal geometry* ハ *Möbius* 即チ *bilinear transformations* ノ *step* ト *analytic functions* $f(z)$ ノ *step* トガアリマスガ、R_3 デハ *Möbius* シカアリマセン。然ルニ $\zeta = x+iy+i'z$, $(i^2=-1,\ i'^2=-1)$ 或ハ更ニ一般ニ $\zeta = x+jy+j'z$, $(j^2=\mu+\nu j,\ j'^2=\mu'+\nu' j')$ ヲ用ヒマスト、例ヘバ、前者ノ場合ニハ円壔ノ相貫ノ時ノ空間四次曲線ガ z-平面ノ *circle* ノ *Analogon* ニナッタ、*Möbius* 型モ *analytic* $f(\zeta)$ 型モ両方ノ *steps* ノアル面白イモノガ得ラレマシタ、イヅレ又マトメマシテカラ発表シマス。

(iii) 通常ノ函数論ヲ *bicomplex* ノ見地カラ眺メテ見マスト、$\zeta = x+iu$, $(y=0,\ z=0)$ 即チ ζ ノ *domain* ヲ xu-平面ニ局限シタ場合デ、$f(\zeta)$ ノ *domain* ハ原則トシテハ依然トシテ四次元デス。

$$f(\zeta) = X(x,0,0,u) + jY(x,0,0,u) + j'iZ$$

$(x, 0, 0, u) + i\,\mho(x, 0, 0, u)$

例ヘバ

$$f(x+iu) = \log \zeta, \quad (\zeta = x+iu = re^{i\theta})$$
$$= \mathrm{Log}\, r + i\theta + 2\pi n i j, \quad (j^2 = +1)$$

ハ $X = \mathrm{Log}\, r$, $\mho = 0$, $Z = 2\pi n$, $Y = 0$ ナル場合デス、ソレヲ、j ノ j ト $\bar{j}$ トノ二価性ヲヤメレバ、$f(\zeta)$ ノ *domain* ガ二次元ニナルノデス。

又 $f(x+iu) = \sqrt{\zeta^2} = j\zeta = jx + iju$

此ノコトハ *Riemann* 面ノ新表示ヲ暗示スルモノデハアリマスマイカ。

(iv) *modulus* ト *absolute value* トヲ原則トシテ区別スルコトニナルノデスガ、其ノ中 *absolute value* ト *modulus* ト一致スル $v^2+u^2 < 0$ ノ場合デモ、*absolute value* ハ、「x, y ヲ過ギル *isotrope* ガ x 軸ヲ截ル点ガ x 軸カラ切リトル長サノ絶対値」ト云フコトハアテハマリ。実質ハ在来ノモノト一致シマス、即チ

$$(X - x) + i(Y - y) = 0, \quad Y = 0$$

カラ $\quad X = x + iy, \quad |X| = |x + iy|$