1031. 一次連結群ノ定義ニ就テ

岩村　聯（東大學生）

§1. *Topological group* ニ於テハ実数ノ閉區間ノ連續像ニヨッテ二点ガ結バレルコトニヨッテ *connectedness* ガ定義サレテヰル（*Pontrjagin*）。從ッテ一般ノ *Hausdorff space* ニ於ケル *connectedness* ヨリモ條件ガ強イ：*Hausdorff space* H ノ開集合族，閉集合族及ビ任意ノ部分集合ヲ夫々 $\mathfrak{O}_H$, $\mathfrak{F}_H$ 及ビ M トシ，*subspace* M ノ開集合族 $(G \frown M; G \in \mathfrak{O}_H)$，閉集合族 $(F \frown M; F \in \mathfrak{F}_H)$ ヲ夫々 $\mathfrak{O}_M$, $\mathfrak{F}_M$ トスルトキ $\mathfrak{O}_M$ ニモ $\mathfrak{F}_M$ ニモ屬

スル集合ガ M 及ビ空集合 Γ ノミデアル，即チ $\mathcal{O}_M \frown \mathcal{F}_M = \{M, \Gamma\}$ デアルトキ M ハ connected デアルトイフノガ一般ノ定義デアッタ。

一次連結群ニ於テハ単位元ノアル近傍ニ linear order ガツイテ，order topology ヲ以テ始メニ興ヘタ topology ニ置キ換ヘルコトガ出来ルカラ，コノ connectedness ノ條件ヲ一般ノ Hausdorff space ニ於ケル條件デ置キ換ヘテ，一次連結群ノ定義ニ実数ガ表ハレテ来ナイ様ニスルコトガ出来ル。

コレヲ示スノガ次ノ定理ノデアルガ，ソレヲ述ベル前ニ定義ヲ一ツ下シテ置ク。

或ル linear order ガ定義サレタ集合 L ニ於テ $x \in L \longrightarrow x \leqq a$ ナル $a \in L$ ガ存在スレバ a ヲ $\mathrm{Max}\, L$ トシ，$\mathrm{Min}\, L$ モコレニ準ジ，$a < b$ ナル a, b ニ対シテ $a < x < b$ ナルスベテノ x ノ集合 $(x; a < x < b)$ ヲ L ノ開区間 (a, b) トスレバ，$\mathrm{Max}\, L$ モ $\mathrm{Min}\, L$ モ存在シナイトキハ L ノスベテノ開区間ヲ以テ L ノ近傍系トスルト L ガ Hausdorff space ニナル。コレガ L ノ order topology デアル。

定義． Linearly ordered set L ニ於テ $\mathrm{Max}\, L$ モ $\mathrm{Min}\, L$ モ存在セズ，L ガソノ order topology ニツイテ connected，即チ $\mathcal{O}_L \frown \mathcal{F}_L = \{L, \Gamma\}$ ナルトキ L ヲ linear continuum トイフ。

定理1. Linear continuum L が order topology ニ就テノ local group ヲナセバ L ハ実数ノ加法群 R ト locally isomorphic デアリ，特ニ L ガ（topological）group ヲナセバ L ハ R ト isomorphic デアル。

コヽニ local group L ノ定義ハ Pontrjagin: Topological group ニ従フ，特ニ単位元 e ハ右ノ単位元トシテハ，（ソノ近傍ノミナラズ）L 全部ニ對シテ適用スルモノトスル。又右ノ逆元 x^{-1} ノ存在スル x ガ L ノ開集合ヲ作リ，ソレガ e ノ或ル近傍ヲ含ミ，x^{-1} ガ x ノ連続函数デアルコトヲ假定スル。コノ点ヲハッキリサセルタメニ L ヲ<u>右ノ</u> local group トイフコトニスル。

x ノ左ノ逆元 x^* ノ存在ハ假定シナイ。又 x^* ガ存在シテモ x ノ連続函数デアルコトハ假定シナイノデアル。シカシ e ノ十分小サイ近傍デハ，e ハ左ノ単位元デモアリ，x^* ガ存在シテ，x^{-1} ニ等シイコトハ証セラレル。定理1（ノ始メノ部分）デハ単位元 e ノ近傍ダケヲ問題ニスルカラ L ガ<u>右ノ</u> local group デアルコトハ特ニ重要デハナイ。

次ノ定理2デハ L ガ<u>右ノ</u> local group デアルコトノ外ニ x^* ガスベテノ x ニ對シテ存在スルコトヲ假定スル。（x^* ノ連続性ハ假定シナイ）

定理2. Linear continuum L ガ右ノ local

group デアリ，スベテノ $x_0 \in L$ ニ對シテソノ左ノ逆元 x_0^* ガ存在スレバ，L ノ任意ノ開区間ハ separable デアリ，L ハ $\aleph_1$-separable デアル．（即チ，L ノアル濃度 $\aleph_1$ ノ部分集合デ L デ dense ナモノガアル。）

Linearly ordered set L ノ部分集合 M ニ對シテ $x \in M \longrightarrow x \leqq a$ ナル a ガ存在スレバ $M \leqq a$ ト記シ，Min $(x ;\ M \leqq x)$ ガ存在スレバソレヲ sup M ト記シ，$a \leqq M$ 及ビ inf M モコレニ準ズル。

Linear continuum L ニ於テハ R ト同様ニ次ノ 1) 〜 5) ガ成立スル。但シ $L \neq \Gamma$ トスル。

1) L ハ dense デアル，即チ $L \ni a < b \in L \longrightarrow (a, b) \neq \Gamma$

2) L ノ上ニ有界ナ部分集合 M ガ空デナケレバ sup M ガ存在スル。

即チ $L \supseteqq M \neq \Gamma$ デ，$M \leqq a$ ナル a ガ存在スレバ sup M ガ存在スル．inf ニツイテモ同様。

3) $L \supseteqq M \ni a < b \in M$ デ M ガ connected ナラ $(a, b) \subset M$.

4) $L \ni a < b \in L$ ナラ (a, b) ハ connected デアル。

5) L^* ガ linear continuum，$f(x)$, $g(x)$ ガ L デ continuous デ常ニ $L^* \ni f(x) \neq g(x) \in L^*$ ナラ，常ニ $f(x) < g(x)$ 又ハ常ニ $f(x) > g(x)$

1)〜5)ノ證明.

$$
\text{定義}\begin{cases}
(a, +\infty) = (x;\ a < x),\ (-\infty, a) = (x;\ x < a), \\
(a, +\infty) = (x;\ a \leqq x), \\
(-\infty, a) = (x;\ x \leqq a),\ [a, b] = (x;\ a \leqq x \\
\leqq b)
\end{cases}
$$

明カニ　$(a, +\infty) \in \mathcal{O}_L \ni (-\infty, a)$

故ニ　$(-\infty, a] \in \mathfrak{F}_L \ni [a, +\infty)$

従ッテ　$[a, b] \in \mathfrak{F}_L$.

1), 3) ハコレデ既ニ明カデアル。

2) $\overline{M} = (x;\ M \leqq x)$, $\underline{M} = \bigcup_{x \in M} (-\infty, x)$ トスルト $\overline{M} \cup \underline{M} = L$, $\overline{M} \frown \underline{M} = \Gamma$, $\underline{M} \in \mathcal{O}_L$ 従ッテ $\overline{M} \in \mathfrak{F}_L$. $\sup M$ ガ存在シナケレバ $\operatorname{Min} \overline{M}$ ガ存在シナイ, 従ッテ $\overline{M} = \bigcup_{M \leqq x} (x, +\infty) \in \mathcal{O}_L$. ソレハ, $M \neq \Gamma$, $M \leqq a$ カラ $\overline{M} \neq L$, $\overline{M} \neq \Gamma$ ガ出テ来ルカラ, L ノ connectedness ニ反スル。故ニ $\sup M$ ハ存在スル。

4) $L \ni a_1 < b_1 \in L$ トスル. $[a_1, b_1]$ ガ disconnected デアルト假定スルト F_1, F_2 ガアッテ F_1, $F_2 \in \mathfrak{F}_L$, $F \cup F_2 = [a, b]$, $F_1 \frown F_2 = \Gamma$. ソコデ $\{i, j\} = \{1, 2\}$ トシテ, $a_1 \in F_i$ ナラ $F_i(a_1) = (-\infty, a]$, $a \notin F_i$ ナラ $F_i(a_1) = \Gamma$ トスル.

$F_i(b_1)$ モコレニ準ズル ($F_i \ni b_1$ ナラ $F_i(b_1) = [b_1, +\infty)$).

$F_i(a_i)=\Gamma \rightleftarrows F_j(a)\neq\Gamma$, $F_i(b_1)=\Gamma\rightleftarrows F_i(b_1)\neq\Gamma$. ソコデ $F_i^*=F_i\cup F_i(a_1)\cup F_i(b_1)$ トスルト $F_1^*\cup F_2^*=L$, $F_1^*\cap F_2^*=\Gamma$, $F_1^*\in \mathfrak{F}_L\ni F_2^*$. 所が明カニ $F_1^*\neq\Gamma\neq F_2^*$ダカラ L が disconnected ニナル.

結局 $[a,b]$ ハ connected デナケレバナラナイ。ソコデ $L\ni a<b\in L$ トスルト $a<c<b$ ナル c ガアル.

$(a,b)=\bigcup\limits_{a<a_1<c<b_1<b}[a_1,b_1]$ デアルカラ (a,b) ハ connected デアル。

5) $M_1=(x;\ f(x)<g(x))$, $M_2=(x,\ f(x)<g(x))$ トスルト $M_1\cup M_2=L$, $M_1\cap M_2=\Gamma$. ソコデ例ヘバ $M_1\in\mathfrak{U}_L$ ヲ証明スレバ $M_1=\Gamma$ 又ハ $M_1=L$ トナルカラソレデヨイ。

$x_0\in M_1$ トスルト $f(x_0)<g(x_0)$ 従ッテ $f(x_0)<c<g(x_0)$ ナル $c\in L^*$ ガアル. f, g ガ continuous ダカラ x_0 ノ適当ナ近傍 V ヲ取レバ $x\in V\longrightarrow f(x)<c<g(x)$, 即チ $V\subseteqq M_1$. x_0 ハ M_1 ノ任意ノ element ダカラ結局 $M_1\in\mathfrak{U}_L$.

§3. 定理1ノ証明. Linear continuum L ガ local group ヲナシ, x, y ノ積ガ xy ト書カレテオルトスル。 e ヲ含ム或ル開区間ガ separable ナラ 4) ニヨッテソノ区間ハ R ト同ジ順序型ヲ有スルカラ order topology ニ関シテ R ト homeomorphic ニナル, 従ッテ L ガ普通ノ意味ノ一次局所連結群ニナッ

ヲ定理ガ成立スル。ソノヤウナ開近傍ノ存在ヲ証明シヨウ。

e ノ近傍 U ヲ次ノヤウニ取ルコトガ出来ル。

I) $x, y, z \in U$ ナラ $xy, yz, (xy)z = x(yz)$ ガ定義サレテヰル。

II) $x \in U$ ナラ x^{-1} ガ存在シテ $x^{-1} \in U$.

U ハ開区間，従ッテ 4) ニヨッテ connected デアル。

$x, y, z \in U$ ナラ $(xz)z^{-1} = x$, $(yz)z^{-1} = y$. 従ッテ $x \neq y$ ナラ $xz \neq yz$ デアル。

5) ニ於テ L ノ代リニ U, L^* ノ代リニ $xU \vee yU$. $f(z)$, $g(z)$ ノ代リニ xz, yz ヲオケバ常ニ $xz < yz$ スハ常ニ $xz > yz$ デアル。ソコデ $x < y$ トスルト $xe < ye$ デアルカラ常ニ $xz < yz$ デアル。

$x, y, z, u \in U$ トシテ夫々特殊ノ條件ヲツケルト容易ニ次ノ関係ガ得ラレル。コレヲ演算ノ単調性トイフコトニスル。

$$x < y \text{ ト } z < u \longrightarrow xz < yu$$

$$x^{-1} < e \rightleftarrows e < x \rightleftarrows x < x^2$$

$$x^{-1} < y^{-1} \rightleftarrows y < x \rightleftarrows y^2 < x^2$$

サテ $f(x) = x^2$ トスルト $f(x)$ ハ U デ continuous デアリ，U ハ connected ダカラ $f(U) = (f(x);\ x \in U)$ ハ connected デアル。従ッテ 3) ニヨッテ $f(U) \ni a < b \in f(U) \longrightarrow (a, b) \subset f(U)$.

所ガ $x<e$, $x=e$, $e<x$ ニ従ッテ演算ノ単調性カラ夫々 $f(x)<x<f(e)=e$, $f(x)=x$, $e=f(e)<x<f(x)$ デアルカラ $x\in U \longrightarrow x\in f(U)$.

ソレデ $f(x)<f(y) \rightleftarrows x<y$.

故ニ U ニ於テ逆函数 $f^{-1}(x)$ ガ存在スル. $f^{-1}(U)\subseteqq U$.

$e<a\in U$ トシ $f^{-1}(a)$ ヲ $a(\frac{1}{2})$, a ヲ $a(1)$ ト記スド, $e<a(\frac{1}{2})<a(1)$, $a(\frac{1}{2})\in U$. ソコデ e ヲ $a(0)$ ト記シ, 一般ニ $f^{-1}(a(\frac{1}{2^n}))=a(\frac{1}{2^{n+1}})$ デ $a(\frac{1}{2^n})$ ヲ定義スルト $(n=1,2,\cdots\cdots)$.

$$e=a(0)<\cdots\cdots<a\left(\frac{1}{2^n}\right)<a\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)<\cdots\cdots<a\left(\frac{1}{2}\right)$$

$<a(1)$, $a\left(\frac{1}{2^n}\right)\in U$

従ッテ $\inf\left(a\left(\frac{1}{2^n}\right);\ n=0,1,\cdots\cdots\right)$ ガ存在スル. ((2) ニヨッテ). ソレヲ b トスルト $e\leqq b$ デアルガ, $e<b$ ト假定スレバ $b<b^2$. 従ッテ或ル n ニツイテ $e<a(\frac{1}{2^n})<b^2$, 従ッテ $a\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)<b=f^{-1}(b^2)$. ソレハ b ノ性質ニ反スル. 故ニ $e=b$, $a(0)=\inf a(\frac{1}{2^n})$.

次ニ $n=0,1,2,\cdots\cdots$; $m=0,\pm1,\pm2,\cdots\cdots$ トシ $\left|\frac{m}{2^n}\right|\leqq 1$ ナルスベテノ $\frac{m}{2^n}$ ノ集合ヲ A トスル. 但シ L ガ group ヲナストキハ以下スベテ絶対値ニ関スル條件ヲ除イテ考ヘル. $\frac{m}{2^n}\in A$ ノトキ $\left(a\left(\frac{1}{2^n}\right)\right)^m$ ヲ $a\left(\frac{m}{2^n}\right)$ ト記スト, $(a^{-1},a)\subset U$ デアルカラ, 演算ノ単調性ニヨッテ $a\left(\frac{m}{2^n}\right)$ ハ定義サレテ居テ, $a^{-1}\leqq a\left(\frac{m}{2^n}\right)\leqq a$.

従ッテ $a\left(\frac{m}{2^n}\right) \in U$. ソシテ $a^{-1} = a(-1)$ デアル. 又明カニ, $\frac{m}{2^n} = \frac{k}{2^e} \in A$ ナラ $a\left(\frac{m}{2^n}\right) = a\left(\frac{k}{2^e}\right)$ デアリ, $A \ni \frac{m}{2^n} < \frac{k}{2^e} \in A$ ナラ演算ノ単調性カラ $a\left(\frac{m}{2^n}\right) < a\left(\frac{k}{2^e}\right)$ デアル. 又, $\frac{m}{2^n}$, $\frac{k}{2^e}$, $\frac{m}{2^n} \pm \frac{k}{2^e} \in A$ トスルト,

$$a\left(\frac{m}{2^n}\right) = a\left(\frac{m\,2^e}{2^{n+e}}\right), \quad a\left(\frac{k}{2^e}\right) = a\left(\frac{k\,2^n}{2^{n+e}}\right)$$

カラ $a\left(\frac{m}{2^n}\right) \cdot \left(a\left(\frac{k}{2^e}\right)\right)^{\pm 1} = a\left(\frac{m}{2^n} \pm \frac{k}{2^e}\right)$ トナル。

以上ヲ要約スレバ, $r \in A$ ナラ $a(r)$ ガ一義的ニ決定サレ

$$A \ni r_1 < r_2 \in A \rightleftarrows a(r_1) < a(r_2)$$

$$\{r_1, r_2, r_1 + r_2\} \subset A \rightarrow a(r_1)\,a(r_2) = a(r_1 + r_2)$$

$$\{r_1, r_2, r_2 - r_1\} \subset A \longrightarrow a(r_2)(a(r_1))^{-1} = a(r_2 - r_1)$$

サテ $a^{-1} < b < c < a$ ナル任意ノ b, c ヲ取リ,

$$A_b = (r;\ a(r) < b),$$

$A_c = (r;\ c < a(r))$ トスルト $A_b \neq \Gamma \neq A_c$. ソシテ $r_1 \in A_b$, $r_2 \in A_c$ ナラ $a(r_1) < a(r_2)$ 従ッテ $r_1 < r_2$. 今次ノ二ツノ場合ガ考ヘラレル,

*) $r_1 \in A_b$, $r_2 \in A_c$ ナラ $r_2 - r_1 \notin A$ ノトキ,

コノトキハ $A \neq A_b \cup A_c$.

**) $r_1 \in A_b$, $r_2 \in A_c$, $r_2 - r_1 \in A$ ナル r_1, r_2

ガ存在スル場合。

コノトキハ，コノヤウナ r_1, r_2 ニツイテノミ考ヘレバ $e < cb^{-1} < a(r_2)(a(r_1))^{-1} = a(r_2 - r_1)$ デアルガ $\inf a(\frac{1}{2^n}) = e$ デアルカラ適當ナ n ヲ取ルトコノヤウナスベテノ r_1, r_2 ニ對シテ $e < a(\frac{1}{2^n}) < a(r_2 - r_1)$ 從ッテ $\frac{1}{2^n} < r_2 - r_1$. 一方 $r_2 - r_1 \in A$ ハ $1 < r_2 - r_1$ ヲ意味スルカラ，或ル $r_0 \in A$ ヲ取ルト $r_1 \in A_b$ & $r_2 \in A_c$ $\longrightarrow r_0 < r_2 - r_1$ ソシテ $r_0 > 0$. 結局 $A \neq A_b \cup A_c$.

*), **) ヲ綜合シテモ $A \neq A_b \cup A_c$. 一方 $A \supseteqq A_b \cup A_c$.

ソコデ $A \ni r \notin A_b \cup A_c$ ナル r ガ存在スル。ソノ r ニツイテハ $b < a(r) < c$. 故ニ集合 $a(A)$ ハ (a^{-1}, a) dense デアル。$e \in (a^{-1}, a)$ デアリ，$a(A)$ ノ濃度ハ $\aleph_0$ デアルカラコレデ求メル開區間ガ得ラレタ。A ニ於テ絶對値ニ關スル條件ヲ除キ得ルトキ即チ L ガ group ヲナストキハ上ノ b, c ノ範圍ヲ限定シナクテヨイカラ L ガ separable ニナル。

尚，コヽ迄證明スレバ A ノ上ノ函數 $a(r)$ ガ單調連續函數デアリ，$a(A)$ ガ (a^{-1}, a) 又ハ L デ dense デアルコトカラ直チニ $a(r)$ ガ R 又ハ $[0, 1]$ ノ上ノ連續單調函數ニ迄擴張サレテコレガ L ト R トノ (local) isomorphism トナルコトガワカル。

§4. 定理2ノ證明. $x_0 \in L$ ナラ $x_0 e$ ガ定サレテヰテ $x_0 e = x_0$，又 x_0^* ガ存在シテ $x_0^* x_0 = e$.

従ッテ e ノ或ル近傍 V ト，x_0 ヲ含ム或ル開集合 G トガ $x = x_0 y$, $y = x_0^* x$, $y \in V$, $x \in G$ ニヨッテ homeomorphically ニ對應スル。

4) ニヨッテ V ハ connected，従ッテ G ハ connected ナ開集合デアル。inf G モ sup G モ存在スルト假定シテヨイカラ G ハ 3) ニヨッテ開区間. 又定理 1 ニヨッテ V ハ separable トシテヨイカラ G ハ separable ナ開区間 (inf G, sup G) デアル. 結局任意ノ $x_0 \in L$ ニ対シテ separable ナ開区間 I_{x_0} ガ存在シテ $I_{x_0} \ni x_0$.

$\aleph_1$ ニ對應スル始数ヲ Ω トスル。

0]　$M_0 = I_e$ ト置ク。

ξ]　$1 \leqq \xi < \Omega$ デ，$0 \leqq \eta < \xi$ ナルスベテノ順序数 η ニ対シテ M_η ガ定義サレテヲルトキ $L_\xi = \bigcup_{\eta<\xi} M_\xi$ ト置ク.

sup $L_\xi = a_\xi$ ガ存在スレバ $M_\xi^+ = I_{a_\xi}$，存在シナケレバ $M_\xi^+ = \Gamma$ トスル。inf $L_\xi = b_\xi$ ガ存在スレバ $M_\xi^- = I_{b_\xi}$，存在シナケレバ $M_\xi^- = \Gamma$ トスル。最後ニ $M_\xi = M_\xi^- \cup L_\xi \cup M_\xi^+$ ト置ク。

Ω]　$M = \bigcup_{\xi<\Omega} M_\xi$ ト置ク.

コレデスベテノ ξ ($0 \leqq \xi < \Omega$) ニ対シテ M_ξ ガ定義サレ，M ガ定義サレタ。2) ニヨッテ，a_ξ ガ存在シテ $1 \leqq \eta < \xi$ ナラ，a_η モ存在シテ $a_\eta < a_\xi$ トナル. 従ッ

テ a_ξ ハ L ノ order $<$ ニ関シテ整列集合ヲナス.
$\sup M = x_0$ ガ存在スルト仮定スルト a_ξ ハ x_0 ニ収斂スル Ω 型ノ列ヲナスガ，ソレハ x_0 ノ近傍 I_{x_0} ガ separable デアルコトニ反スル。 故ニ $\sup M$ ハ存在シナイ. 同様ニ $\inf M$ モ存在シナイ。

I_{x_0} ガ開区間デアルカラ 4) ニ注意スレバ，M_ξ ハソノ作リ方カラ見テ e ヲ含ム connected ナ集合デアル. 従ッテ M ハ connected, ソシテ $\sup M$ モ $\inf M$ モ存在シナイカラ 3) ニヨッテ $M = L$ トナル。

M_ξ ハ separable ナ集合ノ高々可附番箇ノ和デアルカラソレ自身 separable デアリ, M ハ M_ξ ノ $\aleph_1$ 箇ノ和デアルカラ $\aleph_0 \cdot \aleph_1 = \aleph_1$ ニヨッテ $\aleph_1$-separable デアル。

サテ L ノ任意ノ開区間 (b, a) ヲ取ルト, $\eta < \xi \longrightarrow M_\eta \subseteqq M_\xi$, $M = \bigcup_{\xi<\Omega} M_\xi = L$ デアルカラ適當ナ $\xi < \Omega$ ニ對シテ $M_\xi \supseteqq (b, a)$, 従ッテ (b, a) ハ separable デアル。

（定理２ノ証明終リ）

（附記） 定理1デ除法ガ e ノ近傍デ一意ニ可能ナコトハ必要デアル. 例ヘバ任意ノ linear continuum L ニ於テ $xy = \mathrm{Max}\{x, y\}$ トスレバ xy ハ x ト y トノ連續函數デアリ L ハコノ乗法ニ関シテ semi-group ヲツクルワケデアルガ, L ノ如何ナル開區間モ R ト homeomorphic ニナラナイヤウニ L ヲ取ルコトガ出来ル（ソレハ Maximoff "a Continuum of power $2^{\aleph_1}$" ニ於テノ命 i トスレバヨイ. Ann. of Math. 41）