1034. ヒルベルトノ既約定理ニ就テ

稲葉　榮次（海兵）

係数体ヲ種々変ズルコトハ Van der Waerden 流ノ代数幾何ノ特色ノ一ツデアル。與ヘラレタ係数体ニ不定元ヲイクツカ添加シテ代数的ニ拡大シ、ソノ後 relationstreue Spezialisierung ヲ行フコトハ代数函数体ニ就テ常数体擴大ヲ行ッタ後 Restbildung ヲ行フコトニ相當スル。

サテ「ヒルベルト」ノ既約定理ハ代数幾何ニ於テ或ル役割ヲ演ズルガ，ソレハ後日ニ述ベルコトニシテ，ココデハコノ定理ノ純代数的ナ証明ニ就テ述ベル。

Eichler ハソノ特別ナ場合ニ純代数的ナ証明ヲ與ヘテヰルガ（Math. Ann. 116）ソノ Lemma ハ小生ノ本紙第22号ニ述ベタ定理8ノ特別ナ場合ニ他ナラヌ。コノ証明ハ私ノモ Eichler ノモ稍々面倒デアッタガ、ココデハ Eliminationstheorie ヲ用ヒテ簡単ナ証明ヲ述ベル。同時ニ「ヒルベルト」ノ既約定理ノ Eichler ノ証明ヲモット簡易化シ結果ヲ一般ニシテミル。

〔Lemma〕 Λ ガ代数数体或ハ代数函数体ニシテ $f(x,y)=0$ ガ係数体 Λ ニ於ケル絶対既約方程式ナルトキ，Λ ノ Hauptordnung ニ於ケル Primideal $\mathfrak{P}$ ニヨル Restbildung ニヨッテ $\overline{f(x,y)}=0$ ガ $\overline{\Lambda}$ ニ於テ絶對既約トナル。（但シ有限個ノ $\mathfrak{P}$ ヲ除ク）

（証） $f(x,y)$ ヲ y ノ多項式ト考ヘタトキ，ソノ最高冪ノ係数ハ 1 ニシテ他ノ係数ハ $\Lambda[x]$ ニ属スルトシテモ一般性ヲ失ハヌ。$f(x,y)$ ノ y ニ関スル次数ヲ n，係数ノウチデ x ニ関スル次数ノ最大ナルモノ M 次トス。

サテ $f(x,y)$ ガ可約ナラバ，ソノ既約因子ハ y ノ多項式トシテ係数ハ $\Lambda[x]$ ニ屬シ，ソノ x ニ関スル次数ハ M ヨリ

大デナイ．何トナレバ

$$f(x,y)=\varphi(x,y)\psi(x,y)$$

トシ $\varphi(x,y)$ ヲ y ノ多項式トシテソノ係数ノ x ニ関スル次数最大ナルモノハ M_1 次デ，カヽル係数ヲ有スル y ノ最高羃ヲ y^{λ}，同様ニ $\psi(x,y)$ ノ x ニ関スル最大次数 M_2 ナル係数ヲ有スル y ノ最高羃ヲ y^{μ} トスル。

シカラバ $f(x,y)$ ニ於ケル $y^{\lambda+\mu}$ ノ係数ノ x ニ関スル次数ハ M_1+M_2 デアッテ

$$M_1+M_2\leqq M, \quad \therefore\ M_1\leqq M, \quad M_2\leqq M$$

デアルカラデアル。

サテ u_{is}, v_{jt} ハスベテ不定元デアルトシテ

$$\Phi(x,y)=k_0(u,x)+k_1(u,x)y+\cdots\cdots+k_{n-1}(u,x)y^{n-1}$$

$$k_i(u,x)=u_{i0}+u_{i1}x+\cdots\cdots+u_{iM}x^M$$

$$\Psi(x,y)=l_0(v,x)+l_1(v,x)y+\cdots\cdots+l_{n-1}(v,x)y^{n-1}$$

$$l_j(v,x)=v_{j0}+v_{j1}+\cdots\cdots+v_{jM}x^M$$

トオク．

$$\Phi(x,y)\cdot\Psi(x,y)=f(x,y)$$

トオケバ u, v ニ関スル代数方程式ノ system ガ得ラレル．コレラヲ

$$Z_i(u,v)=0 \qquad (i=1,2,\cdots\cdots k)$$

トスル。

$f(x,y)$ ガ絶対既約ナルトキハコノ system ハ解ヲ有セヌカラ

$$\sum_{i=1}^{k} A_i(u,v)\,z_i(u,v) = 1 \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

ナル関係ガ成立ツ。但シ $A_i(u,v)$ ハ u, v ノ多項式デアル。サテ Primideal $\mathfrak{p}$ ヲ $z_i(u,v)$ ノ係数スベテ $\mathfrak{p}$-ganz ナル如ク且ツ(1)ノ係数スベテ $\mathfrak{p}$-ganz ナル如ク撰ベバ mod. $\mathfrak{p}$ ニ於テ

$$\sum_{i=1}^{k} \overline{A_i(u,v)}\,\overline{z_i(u,v)} = 1$$

トナリ $\overline{z_i(u,v)} = 0 \quad (i=1,2,\cdots\cdots k)$ ハ $\overline{\Lambda}$ ノ代数的拡大ニ於テ解ヲ有スコトニナルカラ $f(x,y)$ ハ $\overline{\Lambda}$ ノ代数的拡大ニ於テ既約デアル。

——（証終）——

［ヒルベルトノ既約定理］

Λ ハ任意ノ有限次代数数体トシ

$$f_i(x_1, x_2, \cdots\cdots x_m,\ z_1, z_2, \cdots\cdots z_\nu)$$

$(i=1,2,\cdots\cdots \lambda)$ ガスベテ係数体 Λ ニ於ケル $x_1, x_2, \cdots\cdots x_m,\ z_1, z_2, \cdots\cdots z_\nu$ ノ既約多項式ナルトキ $z_1, z_2, \cdots\cdots z_\nu$ ニ適当ナ Λ ニ於ケル値 $a_1, a_2, \cdots\cdots a_\nu$ ヲ与ヘテ

$$f_i(x_1, x_2, \cdots\cdots x_m,\ a_1, a_2, \cdots\cdots a_\nu)$$

ガスベテ Λ ニ於テ既約ナル如クシ得ル。カヽル a_i ノ撰ビ方独立ニ無数ニアル。

（コヽニ独立ニ無数ニアリトハ

$$f_i(x_1, x_2, \cdots\cdots x_m;\ a_1, a_2, \cdots\cdots a_\nu)$$

ガスベテ既約ナルトキ $a_1, a_2, \cdots a_\nu$ ノウチノ任意ノ$\nu-1$ 個ヲ変ゼズシテ残リノ一個ヲ無数ニ値ヲ変ゼシメテ f_i ガ常ニスベテ既約ナル如クシ得ルコトヲ意味ス)

(証) f_i ハスベテ x_1 ヲ含ミ、x_1 ノ最高冪ノ係数ガ1デ他ノ係数ハ

$$\Lambda[x_2, \cdots x_m ; Z_1, Z_2, \cdots Z_\nu]$$

ニ属ストシテモ一般性ヲ失ハヌコトハ容易ニワカル.

$m>1$ ナル場合ハ $x_2, \cdots x_m$ ヲ $Z_1, Z_2, \cdots$ ノウチニ含メテ考ヘレバ $m=1$ ナル場合ニ帰着スルコトモスグワカル.

次ニ $m=1$, $\nu>1$ ナル場合ハ $m=1$, $\nu=1$ ナル場合ニ帰着スル. 何トナレバ $\Lambda(Z_1, Z_2, \cdots Z_{\nu-1})$ ナル体ヲ k_1 トオケバ $f_i(x, Z_1, Z_2, \cdots Z_\nu) \equiv F_i(x, Z_\nu)$ ハ係数体 k_1 ニ於テ既約デアルガ k_1 ノ代数的閉拡大ニ於テ $\Theta(x, Z_\nu)$ ナル既約因子ヲ有スルトスルト

$$F_i(x, Z_\nu) = \prod_\sigma \Theta^\sigma(x, Z_\nu)$$

但シ σ ハ $\Theta(x, Z_\nu)$ ノ係数ヲスベテ k_1 ニ添加シタ体 Ω ノ k_1 ノ上ノ Automorphism ヲ示ストス. シカラバ $Z_i = a_i$ $(i=1, 2, \cdots, \nu-1)$ トシタトキ $\overline{\Theta(x, Z_\nu)}$ ガ Λ ニ於テ既約デ $\overline{\Theta^\sigma(x, Z_\nu)}$ スベテ異ル如クシテ得ルカラ $\overline{F_i(x, Z_\nu)}$ ガ Λ ニ於テ既約トナルカラデアル。

$m=1$, $\nu=1$ ナル場合ノ証明ハ次ノ如クスル。

$f_i(x, Z)$ ガスベテ galoissch ト假定シテモ一般性ヲ失ハヌ。何トナレバ $f_i(x, Z)=0$ ニヨッテ定義サレル $\Lambda(Z)$ ノ上ノ代数函数体ヲ含ム $\Lambda(Z)$ ノ上ノ最小ガロア体ヲ定義スルガロア方程式ガ $G_i(x, Z)=0$ デアルトスレバ $f_i(x, Z)=0$ ノ根 B ハ $G_i(x, Z)=0$ ノ根 A ニヨッテ $\Lambda(Z)$ ニ於テ linear ニ表ハサレル。

$$B = a_{10} + a_{11}A + a_{12}A^2 + \cdots\cdots$$
$$B^2 = a_{20} + a_{21}A + a_{22}A^2 + \cdots\cdots$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$Z=\Lambda$ ノ値 a ヲ與ヘテ Matrix (a_{ij}) ノ Rang ガ変ラヌ如ク且ツ $G_i(x, a)$ 既約ナルヤウニスレバ $f_i(x, a)$ Λ ニ於テ既約トナルカラ。（コノ際 Relationstreue Spezialisierung ナルコトニ注意）.

サテ $f_i(x, Z)$ スベテ galoissch トシ、Λ ヲ代数的ニ拡大シテ $f_i(x, Z)$ ガ $\varphi_i(x, Z)$ ナル絶対既約因子ヲ有ストス。$\varphi_i(x, Z)$ ニ於ケル係数ヲスベテ Λ ニ添加シタ体ヲ Λ'_i トスル。

Λ'_i ハ Λ ノ上ノ代数的拡大、ソノ任意ノ Automorphism ヲ σ_i デ示セバ

$$f_i(x, Z) = \prod_{\sigma_i} \varphi_i^{\sigma_i}(x, Z)$$

$\varphi_i(x, Z)$ ハ勿論 galoissch デアル。

$\varphi_i(x, Z)=0$ ノ x ノ一根 A_i ヲ $\Lambda'_i(Z)$ ニ添加

シメ体ヲ K_i トス。K_i ハ $A_i'(z)$ ノ上ノ「ガロア」体デ、ソノ「ガロア」群ヲ G_i トス。

$$\varphi_i(x, z) = \prod_{S_i \subset G_i} (x - A_i^{S_i})$$

G_i ノ任意ノ元 T_i デ生ズル群ヲ $\{T_i\}$ デ示ス。

$\{T_i\}$ ニ對應スル K_i ノ部分体ヲ $K_i^{(T_i)}$ トスル。

T_i ノ Ordnung ヲ λ_i トスルトキ

$$\varphi_i^{(T_i)}(x, z) = \prod_{\nu=0}^{\lambda_i - 1} (x - A_i^{T_i^\nu})$$

トオケバ、コレハ $K_i^{(T_i)}$ ニ屬スル係數ヲ有スル x ノ既約多項式デアル。

サラスベテノ A_i' ($i = 1, 2, \cdots\cdots \lambda$) ノ合成体ヲ Λ_0 トスルトキ、Λ ニ關スル相對次數 1 ナル Λ_0 ニ於ケル Primideal 無數ニ多クアルガ、ソノウチデ Lemma ニヨリ $\overline{\varphi_i(x, z)}$ 盡ク $\overline{\Lambda_0}$ ニ於テ絶對既約トナル如キ $\mathfrak{P}$ 無數ニ多クアル。且ツ $\overline{\varphi_i^{(T_i)}(x, z)}$ スベテ $\overline{K_i^{(T_i)}}$ ニ於テ既約ナラシメ得ル。

（ソレニハ $\overline{K_i^{(T_i)}}$ ガ体トナル如ク擇ベバイ　）

サラコノ際 i, T_i 異ルトキ $\mathfrak{P}_{T_i}$ 異ル如ク擇ビ $\varphi_i^{(T_i)}(x, z)$ ハ mod $\mathfrak{P}_{T_i}$ $\overline{K_i^{(T_i)}}$ ノ上ニ於テ既約トス。

$\overline{\varphi_i^{(T_i)}(x, z)} = 0$ ノ根 $\overline{A_i}$ ハ $\overline{K_i^{(T_i)}}$ ノ上ノ cyclic 体 $\overline{K_i}$ ヲ生ゼシムルカラ，類体論ニ於ケル定理ニヨリ $\overline{K_i^{(T_i)}}$ ニ於ケル一次ノ素因子ニシテ $\overline{K_i}$ デ素因子

ノマヽトナルモノ無数ニ多クアル。カヽル素因子デ Z ノ分母及ビ $\overline{\varphi_i(x, Z)}$ ノ判別式ニ素ナルモノヲ $\mathfrak{p}_i^{(T_i)}$ トスル。シカラバ $\overline{\varphi_i^{(T_i)}(x, Z)}$ ハ mod $\mathfrak{p}_{iZ}^{(T_i)}$ ニツイテ $\overline{K_i^{(T_i)}}$ ノ上デ既約トナル。（$\mathfrak{p}_{iZ}^{(T_i)}$ ハ $\mathfrak{p}_i^{(T_i)}$ ニ對應スル Ideal デアル）。

$\mathfrak{p}_i^{(T_i)}$ ハ $Z-\overline{a_i^{(T_i)}}$ $\left(\overline{a_i^{(T_i)}} \subset \overline{\Lambda_0}\right)$ ノ分子ニ含マレルトスルト，スベテノ i 及ビ T_i ニツイテ $a \equiv a_i^{(T_i)}$ mod $\mathfrak{P}_{T_i}$ トナル如キ Λ ノ元 a ガ無数ニ存在スル。カクノ如ク a ヲ撰ベバ $\varphi_i(x, a)$ スベテ Λ_i' ニ於テ既約ナルコトガ証セラレル。

モシ $\varphi_i(x, a)$ 何レカ一ツ可約ナラバ $\varphi_i(x, Z)$ ノ既約因数デ $x-A_i$ ヲ含ム $\varphi_i^*(x, Z)$ ガ $Z=a$ トシタトキ $\varphi_i^*(x, a)$ ガ Λ_i' ニ於ケル式トナル。

$$\varphi_i^*(x, Z)=\prod_{S_i}{}'(x-A_i^{S_i})$$

コヽニ S_i ハ G_i ノ一部 C_i ヲ durchlaufen スル。C_i ニ屬セヌ G_i ノ元ノ一ツ T_i ヲトレバ $\mathfrak{P}_{T_i}$ ニツイテノ Restbildung ニヨッテ $\overline{\varphi_i^{(T_i)}(x, Z)}$ ハ mod $\mathfrak{p}_{iZ}^{(T_i)}$ ニツイテ $\overline{K_i^{(T_i)}}$ ノ上デ既約デアル。シカルニ $\varphi_i^*(x, Z)$ ハ mod $(Z-a)$ Λ_i' ノ上ノ式デアルカラ $\overline{\varphi_i^*(x, Z)}$ ハ mod $\mathfrak{p}_{iZ}^{(T_i)}$. $\overline{K_i^{(T_i)}}$ ノ上ノ式デアル。

$\overline{\varphi_i^*(x, Z)}$ ハ $\overline{\varphi_i^{(T_i)}(x, Z)}$ ト $x-\overline{A_i}$ ナル共通因子ヲ有スルカラ $\overline{\varphi_i^*(x, Z)}$ ハ mod $\mathfrak{p}_{iZ}^{(T_i)}$ ニツイテ

$\overline{\varphi_i^{(T_i)}(x, Z)}$ デ割レルコトニナルガ $\mathfrak{p}_{iZ}^{(T_i)}$ ハ $\overline{A_i}$ ノ判別式ニ素デアルカラ

$$\overline{A_i}^{T_i} \equiv \overline{A_i}^{S_i} \quad mod\ \mathfrak{p}_{iZ}^{(T_i)}$$

$$s_i < C_i$$

トナルコトハナク，不合理トナル．カクシテ $\varphi_i(x, a)$ ハスベテ Λ_i' ニ於テ既約デカツ a ハ無数ニ多クアルガ，$\varphi_i^{\sigma_i}(x, Z)$ ハ i ガ同一ナルトキ σ_i ガ異レバ異ナル式デアルカラ，有限個ノ a ヲ除キ $\varphi_i^{\sigma_i}(x, a)$ ハ i ガ同ジナルトキ σ_i ガ異レバスベテ異ル。ソコデカク a ヲ撰ベバ $f_i(x, a)$ ノ Λ ニ於ケル既約因子ハ $\prod_{\sigma_i} \varphi_i^{\sigma_i}(x, a)$ デ割レネバナラヌカラ，$f_i(x, a)$ ハ Λ ニ於テ既約デアル。 （証終）

〔附記〕 $m=1,\ \nu>1$ ナル場合ガ $m=1,\ \nu=1$ ナル場合ニ帰着スル証明ニ於テ Ω ヲ生ズル元ノ k_1 ノ上ノ方程式 $S(u;\ Z_1, Z_2, \cdots\cdots Z_{\nu-1})=0$ トシタトキ $Z_i=a_i$ トシテ $S(u;\ a_1, a_2, \cdots\cdots a_{\nu-1})$ ガ Λ ニ於テ既約ナル如クセネバナラヌコトヲ言ヒ落シタ。