1040. Vector lattice ニ於ケル積分論 II

小笠原 藤次郎（広島文理大）

vector lattice ヲ値域トスル集合函数ノ Radon-Nikodym 型定理ヲ論ズル. Banach 空間ヲ値域トスルモノニツイテハ別ノ題目ノ下デ論ズルコトニシタ（紙數誌 "vector 値集合函數ノ Radon-Nikodym 型定理ニツイテ" 参照）. 問題説明ノタメ §7 ヲ更ニ続ケル。

§7. 以下コノ § デハ X ヲ E_2 空間トスル. $x(t)$, $a \leqq t \leqq b$ ヲ X ヲ値域トスル可測函數（Bochner ノモノト對

等ニナルコトニ注意ノトシテ次ノ定義ヲ想ヒ出ス。

定義. 任意ノ可測集合Eニ對シXヲ値域トスル集合函數$F(E)$ガ定マリ如何ナル$f\in\overline{X}$ニ対シテモ常ニ

$$f(F(E))=\int f(x(t))\,dt$$ ガ成立スルトキ$x(t)$ハDunfordノ意味デ可積分トイヒ、$F(E)$ヲE上ノ$x(t)$ノ積分トイフ。

可測函數ニ対シテハDunford, Birkhoffノ積分定義ハ對等ナルコト又Bochner積分ハ上ノ不定積分$F(E)$ガ強有界変動或ハ$\|x(t)\|$ノ可積分ナルコトニヨリ特性ヅケラレル。我々ノ積分ハR_2空間デハコノ中間ニアル。即チ次ノ定理カラ$F(E)$ガorder senseデ有界変動或ハ$|x(t)|$ノDunfordノ意味デノ可積分云ハバ彼ノ意味デ絶對可積分ト同義ニナルコトガ知ラレル。

定理. R_2空間ヲ値域トスル可測函数$x(t)$, $a\leqq t\leqq b$ノ可積分條件ハ$x(t)$ト共ニ$|x(t)|$ガDunfordノ意味デ可積分デアルコト且ツコノトキ両定義ノ積分ノ値ハ一致スル。

(証) $x(t)$ガ可積分ノトキ積分定義列ノ存在カラ$x(t)$, $|x(t)|$ハDunfordノ意味デ可積分ナルコトガ分ル. コノ逆ヲ考ヘル. $x(t)$ガ本質的ニ可分値ナルコト及ビ

$$\left\|\int_E \overline{x}(t)\,dt\right\|$$ ガ$|E|$ト共ニ0ニ收斂スルコトカラ次ノ性質(1), (2)ヲモツ單函数列$\{s_n(t)\}$ノ存在ヲ確メルコト

ハ困難デナイ。

(1) 高々測度 $\frac{1}{2^n}$ ノ集合ヲ除イテ $\|x(t)-s_n(t)\| \leqq \frac{1}{2^n}$

(2) $\left\|\int_a^b |x(t)-s_n(t)|dt\right\| \leqq \frac{1}{2^n}$ （積分ハ Dunford ノ意味）

コレヨリ $\{s_n(t)\}$ ガ積分定義列ナルコト両定義ノ積分値ノ一致ガ分ル。

$[0,1]$ 上ノ L_2 空間ヲ X トスルトキ $x(t)$ ハ Dunford ノ意味デ可積分ナルモ $|x(t)|$ ハ然ラザルモノヲ容易ニ作ルコトガ出来ル。

$x(t)$ ガ可積分ノトキ不定積分 $F(E)$ ハ $|E| \to 0$ ノトキ $F(E) \to 0\ (o)$ ガ成立スル，或ハコノ條件ハ正要素 e ガ存在シテ任意ノ正数 ε ニ対シテ正数 δ ガ定マリ $|E| \leqq \delta$ ノトキ $F(E) \leqq \varepsilon e$ トシテモヨイ。何レニシテモコノトキ $F(E)$ ハ (o)-全連続（或ハ (o)-絶対連続）トイフ。(o)-全連続加法的集合函数ハ不定積分ナリヤノ問題ガ起ル。例1ハ否定的答ヲ，例2ハ不定積分必ズシモ可微分ナラザルコトヲ示ス。

例1.（Pettis, Trans. Amer. Math. Soc. 44 (1938) 303 例9.4 ノ modification）。$X = L^2$ トシ $\{x_{ij}\}$ ヲ正要素ヨリナル完全正規直交系トシ $0 \leqq t \leqq 1$ デ $x_n(t)$ ヲ次ノ如ク定メル。

$\frac{i-1}{2^n} \leqq t < \frac{i}{2^n}$ $(i=1,2,\cdots\cdots,2^n)$ ノトキ $x_n(t)=x_{ni}$,

$x(1)=0$. 各々ノ $x_n(t)$ ハ単函数デ可積分 $\int_E x_n dt$ ガ存在スル。$F(E)=\sum_1^\infty \int_E x_n dt$ ト置クトキ $F(E)$ ハ正ノ (o)―全連続加法的集合函数ナルモ不定積分デナイ。

例2.（Birkhoff Trans. Amer. Math. Soc. 38 (1935) 375 例2ノ modification）. $X=l^2$ トシ $\{x_{ij}\}$ ヲ例1ノ如クトル。

$0\leqq t\leqq 1$ 上デ $x_n(t)$ ヲ $\frac{i}{2^n}\leqq t<\frac{i}{2^n}+\frac{1}{2^{2n}}$ ノトキ

$x_n(t)=2^n x_{ni}$ $(i=0,1,2,\cdots\cdots,2^n-1)$, $x_n(1)=0$

ト定メルトキ $\sum x_n(t)$ ハ殆ンド到ル処デ収斂スル。コレヲ $x(t)$ ト置ク。コノトキ $\sum_{i=1}^{n} x_i(t)$ ガ積分定義列トナリ $x(t)$ ハ可積分ナルモ $F(E)$ ハ各点デ強可微分デナイ。

此等ノ例カラ $F(E)$ ニ條件ヲ設ケテ不定積分トノ関係ヲ調ベナケレバナラヌ。茲デハ簡単ナ場合即チ $F(E)$ ガ強有界変動ノ場合ヲ主トシテ取扱フ。

IV. Radon-Nikodym 型定理（其一）

§8. X ヲ σ-complete vector lattice トシ次ノ條件ヲ満足スルモノトスル。

高々可附番個ノ (o)―連続正線型汎函数列 $\{f_n\}$ ガ存在シ正要素ハイヅレカノ f_n デ正値ガ與ヘラレル。

從ッテ $x\geqq 0$ ノトキスベテノ n ニツイテ $f_n(x)=0$ ナラバ $x=0$ トナル。可分 E_2 空間ハ常ニコノ條件ヲ満足シ且 $n=1$ トシテヨイ。

$F(E)$ヲXヲ値域トスル$[0,1]$上ノ可測集合Eノ(0)ー全連續正ノ加法的集合函数即チ正要素eガ存在シ正数ϵニ対シδガ定マリ$|E| \leqq \delta$ノトキ$F(E) \leqq \epsilon e$ガ成立スルトスル(Xガ regular ノトキ$|E| \to 0$ノトキ$F(E) \to 0$ (0)トシテヨイ) $F(t) = F([0,t])$ト定義シ$F(1) \leqq e$トシテ一般性ヲ失ハナイ。

又以下ノ議論デeヲXノ単位トシテヨイ. 何者然ラザルトキハeヲ生成要素トスル主 ideal ヲ考ヘレバヨイ. Xノ主 ideal ノ作ル Boole 代数ノ表現 Boole 空間Ωヲ考ヘxニ應ズル連続函数ハ$x(\mathfrak{z}^*)$デ表ス. 但シeハ恒等的ニ1ナル様ニ表現スルモノトスル。$F(t)_{(\mathfrak{z}^*)}$ハ$(t, \mathfrak{z}^*)$ノ連續函数デアル。次ノ如ク置ク。

$$F(t, h, \mathfrak{z}^*) = \frac{F(t+h)_{(\mathfrak{z}^*)} - F(t)_{(\mathfrak{z}^*)}}{h} \quad \overline{D}F(t, \mathfrak{z}^*)$$
$$= \varlimsup_{h \to 0} F(t, h, \mathfrak{z}^*), \quad \underline{D}F(t, \mathfrak{z}^*) = \varliminf_{h \to 0} F(t, h, \mathfrak{z}^*)$$

但シ$t=0$, 1ノ点デハ$F(t)$ノ定義ヲ区間外ヘ適當ニ延メタモノトスル。

何レモ$(t, \mathfrak{z}^*)$ニツイテ Baire ノ函数デアル. 各$\mathfrak{z}^*$ニ對シ殆ンドスベテノtニツイテ$\overline{D}F(t, \mathfrak{z}^*) = \underline{D}F(t, \mathfrak{z}^*)$ガ成立スル。

$f_n(x)$ニヨリ導入サレル測度函数デμ_nトスレバ Fubini ノ定理ニヨッテ殆ンドスベテノ点tデμ_n測度0ノ集合ヲ除イテ上ノ等式ガ成立スル。Xニ関スル假定カラ第一種集合ヲ除イテトシテヨイ。従ッテカヽルtニ於テ

$\left\{\dfrac{F(t+h)-F(t)}{h}\right\}$ ガ (o)－有界ノトキ (o)－可微分トナル。F(E) ガ正トハ記述ノ便宜上ノ制限デアルコトハ容易ニ分ルカラ次ノ定理ヲ得。

定理。F(E) ヲ X ヲ値域トスル Lipschitz 條件ヲ満足スル加法的集合函数即チ正要素 e ガ存在シテ $|F(E)| \leqq |E|\, e$ ガ成立スルトスル。

F(E) ハ殆ンドスベテノ t ニ於テ (o)－可微分且ツコノ導函数ノ不定積分デアル。

(証) 定理ノ前半ハ上ノ所論カラ自明。後半ハ $\Delta_n(t)$ ヲ $\frac{i-1}{2^n} \leqq t < \frac{i}{2^n}$ $(i=1,2,\cdots 2^n)$ ノトキ $2^n\left\{F\left(\frac{i}{2^n}\right)-F\left(\frac{i-1}{2^n}\right)\right\}$ トスレバ導函数ノ積分定義列トナルコトノ証明ハ困難デナイ。

定理。前定理ニ於テ殆ンドスベテノ点デ Lipschitz 條件ヲ満足スル (o)－全連続加法的集合函数トシテノ結果ガ成立スル。従ッテ殆ドスベテノ点デ可微分ナ (o)－全連続加法的集合函数ハ不定積分デアル。

§9. コノ§デハ X ヲ $\mathcal{L}_2$ 空間トシテ論ズル。

定理 (o)－全連続加法的集合函数 F(E) ガ Bochner 積分ノ意味デ不定積分ナルタメノ條件ハ強有界変動ナルコトナリ。

(証) 定理ノ前半ハ自明。F(E) ガ強有界変動ノトキソノ絶対部分（集合函数トシテノ）ハ強有界変動デ且ツ

定理ノ假定ヲ満足スル。從ッテ最初カラ $F(E)$ ヲ正トシテ論ズレバ充分デアル。e ヲ $F(E)$ ノ (o)—全連續ノ定義ニ表ハレル正要素トシ $F(E)$ ト $n|E|e$ ノ集合函數トシテノ meet ヲ $F_n(E)$ トスレバ"表現論"ヲ使ッテ次ノコトガ分ル。

$F_n(E) \leqq F_{n+1}(E)$, $\lim F_n(E) = F(E)$. $F_n(E) \leqq n|E|e$

最後ノ式カラ $F_n(E) = \int_E x_n(t)\,dt$ (Bochner 積分)

最初ノ式カラ殆ンドスベテノ点デ $0 \leqq x_n(t) \leqq x_{n+1}(t)$

殘リノ式カラ $\{\|x_n(t)\|\}$ ハ殆ンドスベテノ t デ t ヲ固定シタトキ有界. 從ッテ $\lim\limits_n x_n(t)$ ガ殆ンドスベテノ t デ存在スルカラ之ヲ (t) トスルトキ $\int_F x(t)\,dt$ ナルコトガ分ル。

定理. (o)—全連續加法的集合函數 $F(E)$ ガ不定積分 (Dunford ノ意味ノ積分トナルコトニ注意) ナルタメノ條件ハ任意ノ正数 ε ニ對シ高々測度 ε ノ可測集合ガ存在シテソノ補集合ノ上デ $F(E)$ ガ強有界変動トナルコトデアル。

(証) 前定理ヲ使フ。

Bochner 積分ト可微分。 Dunford 積分ト弱可微分ノ關係ニツイテハ Bochner 空間ヲ値域トスル場合ニ論ゼラレテヰルカラ茲ニハ述ベナイ。

§10. X ヲ Bochner ノ條件即チ §8ノ條件ヲ強メタ次ノ條件ヲ満足スル vector lattice トスル。

(o)—連續正線型汎函数列 f_n ガ存在シ X ノ単調増加要素列 $\{x_n\}$ ガ各 f_n ニツイテ $\{f_n(x_m)\}$ ガ有界ノトキ $\bigvee\limits_m x_m$ ガ存在スル。

カンル vector lattice ハ regular デアル. k_2 空間デハ X ハ抽象 L 空間ト isomorphic ナモノトナル. コノトキハ F(E) ノ強有界変動ニ相当スルモノヲ仮定スル必要ハナク次ノ定理ガ成立スル。

定理. Bochner 條件ヲ満足スル vector lattice X ヲ値域トスル (o)-全連続加法的集合函数 F(E) ハ不定積分デアル。

(証) F(E) ヲ正トシテ論ジテ一般性ヲ失ハナイ. §9 ノ定理ノ証明ト同様ノ方法デ証明サレル。

V. Radon-Nikodym 型定理 (其二)

抽象集合 S, S ヲ含ム Borel 族 Γ = 非負ノ有限ナ実数値ヲトル完全加法的測度 α(E) ノ存在ヲ仮定スル。(α(E) ガ有限値ヲトラナクトモ S ガ可附番個ノ可測集合ニ分解サレソノ各々ノ上デ α ガ有限値ヲトル場合ハ上ノ場合ニハ本質的ニハ上ノ場合ヲ考ヘレバ充分デアルカラ記述ヲ簡単ニスルタメ α(S) = 有限トシタ)

F(E) ヲ (o)-全連続加法的集合函数トシタトキ如何ナルトキ不定積分トナルカヲ問題トスル。(積分ノ定義ハ今マデ区間デ考ヘタガコレヲ一般化スルコトハ trivial ダカラ繰返シテ述ベナイコトニスル)。Γ ガ測度 α ニ関シテ可分距離空間ヲ作ルトキ Radon 以来ノ方法ニヨッテ atomic element ヲ除外シタモノハ実区間ノ Lebesgue 測度ニ関スルモノト metric lattice isomorphic トナル. 從ッテ Bochner 條件ヲ満足スル vector lattice

或ハ $\tilde{R}_2$ 空間デハ前章ノ定理カラ直ニ結果ヲ引キ出スコトガ出来ル．從ッテ茲デハコノ方法ニ依ラナイデ述ベルコトニスル。

§11. X ヲ $\tilde{R}_2$ 空間トスル．$|F(E)| \leqq \alpha(E)e$ ヲ満足スル正要素 e ガ存在スル場合 $F(E)$ ハ *Lipschitz* 條件（*order sense* デ）ヲ満足スルトイフ。

定理．$\tilde{R}_2$ 空間 X ヲ値域トスル *Lipschitz* 條件ヲ満足スル加法的集合函數 $F(E)$ ノトル値ノ集合 $\{F(E)\}$ ハ *norm topology* デ *conditionally compact* 從テ $F(E)$ ハ可分値函數デアル。

（証）$F(E)$ ヲ正トシテ論ズレバ充分．$\alpha(E)$ ニ関シ可積分実函數空間ヲ $L(\alpha)$ ト書クコトヽスル．$L(\alpha)$ ヨリ X ヘノ作用素 U ヲ次式デ定義スル。

$$U\varphi = \int_S \varphi(\lambda)\, dF, \qquad \varphi \in L(\alpha)$$

U ハ H_6° 型作用素トナル．從ッテ $L(\alpha)$ ノ *conditionally weakly compact set* ヲ X ノ *conditionally compact set* ニ移ス．一方可測集合ノ特性函數ハ *conditionally weakly compact* デアル．從テ定理ノ成理ヲ知ル。

定理．$\tilde{R}_2$ 空間 X ヲ値域トスル (o)－全連續加法的集合函數 $F(E)$ ハ可分値集合函數デアル。

（証）$F(E)$ ヲ正トシテ論ジテ充分．§9 ノ定理ノ証明中ノ $F_n(E)$ ヲ考ヘ前定理ヲ使フ。

定理. F(E) ガ Lipschitz 條件ヲ滿足スル加法的集合函數ノトキ F(E) ハ不定積分デアル。

(證) F(E) ハ可分値ナルコトト X ノ各區間ガ weakly compact ナルコトカラ Phillips (Trans. Amer. Math Soc. 48 (1940) 534−535) ノ方法ニヨッテ F(E) ガ不定積分ナルコトヲ知ル。

コノ定理ハ更ニ次ノ定理ニ含マレテ井ル。

定理. F(E) ガ (0)−全連續加法的集合函數ノトキ Bochner 積分ノ意味デ不定積分トナル條件ハ強有界變動ナルコトナリ。

(證) 前定理ヲ使ッテ §9 ノ定理ト同論法。

定理. F(E) ガ (0)−全連續加法的集合函數ノトキ不定積分 (Dunford ノ意味ノモノニナルコトニ注意) ナルタメノ條件ハ任意ノ正數 ε ヲ與ヘタトキ測度ガ高々 ε ノ可測集合ガ存在シテソノ補集合ノ上デ強有界變動トナルコトデアル。

(證) 略

X ガ locally weakly compact ノトキ強有界變動全連續加法的集合函數ハ常ニ (0)−全連續デアル。(紙數誌 "vector 値集合函數ノ Radon−Nikodym 型定理ニ就テ" ヨリ)

§12. X ヲ Bochner 條件ヲ滿足スル vector lattice トスル。

定理. Bochner 條件ヲ滿足スル vector lattice X

ヲ値域トスル（0）－全連続加法的集合函数F(E)ハ不定積分デアル。

（証）F(E)ヲ且ツLipschitz條件ヲ満足スルトキノ証明ヲ行ヘバ充分デアル。（§10ノ証明法カラ）。eヲLipschitz條件ニ表ハレル正要素トスル。Xハeヲ単位トスルvector latticeト考ヘテヨイ。Xヲ表現Boole空間ノ連続函数デ表現シヌニハ$x(\mathfrak{p})$ガ應ズルモノトスル。f_nニ依ッテ導入サレル測度函数ヲμ_nトシ正数c_nヲ適當ニトッテ$\sum c_n \mu_n$ガ収斂スル様ニトリコレヲμト定義スルμ測度0ノ集合ト第一種集合トガ一致スル。μニ關シテ可積分函数ノ空間ヲ$L(\mu)$トシ$X=L(\mu)$トシテコノ定理ヲ証明シコレヲXニ還元シテ定理ノ証明ヲ得。

§13. Xヲ§8ノ條件ヲ満足スルcomplete vector latticeトスル。（σ-completeトシテモcompleteトナル§8デハ書キ忘レマシタ）

定理. Lipschitz條件ヲ満足スル加法的集合函数ハ不定積分デアル。

（証）§12ノ定理ノ証明ト同論法。

以上ノ理論ノ作用素ノ積分作用素ノ核表現ニ関スル問題ヘノ應用ハ他ノ機會ニ譲ル。又積分論（I）デノベタ考ヘ方ニ從ッテ積分ノ基本的性質ニ充分注意ヲ向ケナカッタ。此ニツイテハ他ノ積分論ト比較研究シテ補ヒタイト思フ。（ツヅク）

〔補正〕紙数誌1004．定理3．系，weakly

complete ハ不要. 抽象 L, 空間ガ廣義ノ列空間(座標ノ數ガ可附番トハ限ラナイ)ナルタメノ條件ハ弱收斂即チ强收斂トナルコト. 抽象 L_2 空間デハコノ條件ハ正要素ヨリナル完全正規直交系ノ存在. マタ $x>0$, $y>0$, $x \frown y=0$ ノトキ $\|x+y\|=\max(\|x\|, \|y\|)$ ヲ滿足スル §1 ノ normed space ハ bicompact 空間ノ連續函數デ表現シ norm ガ連續函數ノ norm デ實現サレル(L_p 空間ノ表現ニツイテハ中野氏, 學士院記事 1941 ヲ參照サレタイ)。