1043. 確率過程ノ differentiation

伊藤　清（内閣統計局）

§1. P－可測性ニ就テ．　（Ω, F, P）ヲ確率ノ場トシ、$x(\omega)$ヲコノ上デ定義セラレタXノ上ノ値ヲトル函數トスル。$x(\omega)$ガ確率変數ト云ハレルタメニハ，ソレガP－可測デアルコトガ必要デアルガ、P－可測性ノ定義ノタメニ普通行ハレル方法ハ次ノ如キモノデアル。即チXノ部分集合ノ系σヲ考ヘ、σニ属スル任意ノ集合ノxニヨル Urbild ガ P－可測ノ時、xハP－可測（σ）デアルトイフ。σヲ含ム最小ノ完全加法族ヲB_σトスルト，xガP－可測（σ）ナラバ，xハ必然的ニP－可測（B_σ）トナル。

Xガ抽象空間ノ場合ニ於テモ，Xノアル点aヲ含ム$\mathfrak{S}$ノスベテノ集合ノ共通集合ガaソノモノデアルヤウニ$\mathfrak{S}$ヲ選ブコトハ望マシイ。又Xガ位相空間ノ時ニハ$\mathfrak{S}$トシテスベテノ近傍ヲ元トスル集合ヲ選ブコトガ普通デアル。故ニ$\mathfrak{S}$ナル集合系ノ代リニ、位相ヲ表ハス記号ヲ用ヒテモヨイワケデアル。例ヘバ函数空間ノ場合ニ weak topology ニ関聯シテイフ時ニハ P-measurable (w. t.) トイフ風ニアラハシタリ、又Xニ距離ρガ入ッテヰル時ニハ P-measurable (ρ) トイフガ如キデアル。

§2. 筆者ガ前談話ニモ述ベタル如ク、條件附確率法則$P_{\eta/\xi}$ハ確率法則ナル函数ヲ値トスル確率変数デアルガ、ソノ場合コレハP-可測(w. t.)デアッタノデアル。然シηガ確率変数ノ場合ニハ$P_{\eta/\xi}$ハ実数空間ノ上ノ確率法則ヲ値トスル確率変数デアッテ、実数空間ノ上ノ確率変数ノ集合ニハ所謂 Frechet ノ距離ρガ定義出来ルノデ、$P_{\eta/\xi}$ガP-可測ナリヤ否ヤノ問題ニスルコトハ自然ナ道筋デアル。答ハ肯定的デ、ソノ証明モ容易デアルガ、一應ヤッテ見ヤウ。

今F_1, F_2ヲ実数空間ノ上ノ確率法則トスルトキ, $y=F_1\{(-\infty,x)\}$, $y=F_2\{(-\infty,x)\}$ノグラフヲ書キ不連続点ニ於テハ、$x+0$ニ對應スル点ト$x-0$ニ對應スル点トヲ結ブト、二ツノ連続曲線ガ得ラレル。 $x+y=a$ $(-\infty<a<+\infty)$ナル直線ハ各グラフヲ唯一点ニ於テ截ル。

コノ截点ノ距離ノ上限（a ヲ動カス時ノ）――實ハ「最大」ナル事ガスグニ分ル――ガ F_1 ト F_2 トノ間ノ *Frechet* ノ距離デアル。

コノ距離ニ関シテアル確率法則 F ノ ε- 近傍 $U(F,\varepsilon)$ ヲ考ヘテ見ヨウ。$x+y=a$ ナル直線ガ $y=F_1\{(-\infty,x)\}$ ノグラフヲ截ル点ヲ $p(a)$ トシ，$p(a)$ カラ $x+y=a$ ニ沿ッテ ε ダケ距ッタ点ノ中，上方ニアルモノヲ $Q_1(a)$，下方ニアルモノヲ $Q_2(a)$ トスル。a ヲ動カス時 $Q_1(a)$ 及ビ $Q_2(a)$ ハ連続的ニ変化スルガ、ソノ描ク曲線ヲ夫々 C_1，C_2 トスル。$C_1\, C_2$ ハアル非減少有界函数 $y=f_2(x)$ ノグラフデアルト云ヘル。F ノ ε- 近傍 $U(F,\varepsilon)$ $C_1\, C_2$ ノ間ニ挾マレタ部分ノ中，グラフニ對應スル確率法則ノ集合デアル。

偖テ $f_1(x)$，$f_2(x)$ ガ共ニ連続デアルヤウナ点ハ到ル点稠密デアッテ、ソノ中カラ可附番個 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \cdots\cdots$ ヲトッテ、之レガ矢張リ到ル所稠密デアルヤウニ出来ル。スルト

$$\overline{U(F,S)} = \bigcap_{i=1}^{\infty} F\left\{G;\ f_2(\lambda_i) \leqq G((-\infty,\lambda_i)) \leqq f_1(\lambda_i)\right\} \quad (1)$$

トナル。（$\overline{U}$ ノ上ノ横線ハ U ノ *abgeschlossene Hülle* ヲ表ハス）

モトニモドリ、$P_{\eta/\xi}$ ハ P－可測 $(w.t.)$ ナル故

$$P_{\eta/\xi} \in E\left\{G;\ f_2(\lambda_i) \leqq G((-\infty,\lambda_i)) \leqq f_1(\lambda_i)\right\}$$

即チ $f_2(\lambda_i) \leqq P_{\eta/\xi}((-\infty,\lambda_i)) \leqq f_1(\lambda_2)$

ハ P－可測デアル。故ニ(1)ニヨリ

$$P_{\eta/\xi} \in \overline{U(F,\varepsilon)}$$

モ P－可測デアル。

$$U(F,\varepsilon) = \bigcup_{n=2}^{\infty} \overline{U\left(F, \frac{n-1}{n}\varepsilon\right)}$$

ナル故

$$P_{\eta/\xi} \in U(F,\varepsilon)$$

モ亦 P－可測デアル。即チ $P_{\eta/\xi}$ ハ P－可測（P）デアル。

§3. x ヲ區間（0, 1）ノ上ノ確率過程トスル。即チ（0, 1）上デ定義セラレタ実函数ノ空間ヲ値域トスル確率変数トスル。ソノ P－可測性ハ *weak topology* ニ關聯セシメテ定義スル。

t ヲ（0, 1）間ノ實數トスルトキ，x_t ハ x ノ t ニ對スル値トスル。x_t ガ P－可測ナルコトハ明ラカデ、之ハ一ツノ確率変數デアル。區間（0, 1）ノ一部分（t, s）ノ上デ x ヲ考ヘテ（t, s）上ノ確率過程ヲ得ル。之ヲ x_{ts} ニテアラハス。x_{0t} ガ定マッタ時ノ $x_{t_1} - x_t$（$t_1 > t$）ノ條件附確率法則 $P_{x_{t_1}-x_t/x_{0t}}$ ヲ考ヘヨウ。之レハ前節ニヨリ P－可測（P）デアル。

$$\underset{\substack{t_1 \to s+ \\ t_1 \to s-}}{p\text{-}\lim} \left(P_{x_{t_1}-x_t/x_{0t}}\right)^{*\left[\frac{1}{t'-t}\right]}$$

［〔λ〕ハλノ整數部分ヲ表ハシ
＊ハ convolution ヲ表ハス］

ガ存在スルトキ、確率過程 x ハ S ニ於テ微分可能トイヒ、コノ極限値ヲ $D_s x$ ニテアラハス。$D_s x$ ハ確率法則ヲ値トスル．Ω 上ノ函数デ．而モ P−可測 (p) デアル。又 $D_s x$ ガ x_{0s} ノ函数ナルコトモ容易ニ分ル。而シテ

limit law (of probability) ハ無限ニ分解可能デアル。(Khintchine) ニヨリ $D_s x$ ハ無限分解可能ナルコトガ分ル。

§4. $D_s x$ ガ無限ニ分解可能トスレバ、ソノ特性函数ノ對数ハ P. Lévy ノ定理ニヨリ

$$im z-\frac{\sigma^2}{2}z^2+\oint_{-\infty}^{+\infty}\left(e^{izu}-1-\frac{izu}{1+u^2}\right)n(du)\left(\oint_{-\infty}^{+\infty}=\int_{-\infty}^{-0}+\int_{0}^{+\infty}\right)$$

ニテ表ハサレルワケデアル。而シテ次ノ (2) (3) (4) ハ Khintchine ノ

Déduction nouvelle d'une formule de P. Lévy

ノ方法ニナラッテ容易ニ証明出来ル。[1]

$$\lim_{\substack{t_1\to s+\\ t\to s-}}\frac{1}{t_1-t}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{u}{1+u^2}P_{x_{t_1}-x_t/x_{0t}}(d\lambda)=m \tag{2}$$

$$\lim_{\delta\to 0}\lim_{\substack{t_1\to s+\\ t\to s-}}\int_{-\infty}^{\delta}u^2P_{x_{t_1}-x_t/x_{0t}}(d\lambda)=\sigma^2 \tag{3}$$

$$\frac{1}{t_1-t}P_{x_{t_1}-x_t/x_{0t}}\xrightarrow[(p)]{} n \tag{4}$$

---

(1) Bull. de l'univ. d'état à Moscou, Ser. inter. Math. et Mec. vol 1. Fasc. 1. 1937.

茲ニ ρ ハ Fréchet ノ距離ニナラッテ定義スルコトトシ

n ノグラフハ

$$y = n(-\infty, x) \qquad (x > 0)$$

$$y = -n(x, +\infty) \qquad (x < 0)$$

ノグラフトシ、$\dfrac{1}{t_1 - t} P_{x_{t_1} - x_t / x_{0t}}$ ノグラフモ同様ニ定義スル。(2) (3) (4) ニヨリ m, σ, n ガ確率変数トナルコトガワカル。n ハ実数軸カラ 0 ヲノゾイタ部分ノ上ノ測度ヲ値トスルモノデ、ソノ P－可測性ハ上ノ ρ ニ関聯シテ定義スルノデアル。

特ニ $n = 0$ ノ場合ニハ

(2) ノ代リニ

$$\lim_{\substack{t_1 \to s+ \\ t \to s-}} \frac{1}{t_1 - t} \int_{-\delta}^{\delta} u \, P_{x_{t_1} - x_t / x_{0t}}(d\lambda) = m \qquad (2')$$

(3) ノ代リニ

$$\lim_{\substack{t_1 \to s+ \\ t \to s-}} \frac{1}{t_1 - t} \int_{-\delta}^{\delta} u^2 \, P_{x_{t_1} - x_t / x_{0t}}(d\lambda) = \sigma^2 \qquad (3')$$

(4) ノ代リニ

$$\frac{1}{t_1 - t} P_{x_{t_1} - x_t / x_{0t}}(E) \to 0 \qquad \left(\begin{array}{l} E \text{ ハ } 0 \text{ カラ正ノ距離ダケ} \\ \text{距ッタ集合トスル} \end{array} \right) \qquad (4')$$

ガ出ルコトモ容易ニ証明出来ル。