1044. 束群ニツイテ

岩澤　健吉（東大）

以前ニヤハリコノ紙上談話会デ束群ニ関シテ注意ヲ述ベタコトガアリマシタ。ソノ時ノ考ヲ用ヒテ中野先生ガAbel群ノ場合ニナサレタヤリ方[1]ヲ眞似シマスト所謂"Birkhoffノ豫想"ガ解決サレルヤウニ思ヒマスノデ以下ソレニツイテ述ベテ見マス。

1. 以下 $\mathfrak{G}$ ハ conditionally complete ナ束群トシマス。

Lemma 1.[2]
$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots\cdots \leq a_\omega \leq \cdots\cdots \leq a,$$
$$b_1 \leq b_2 \leq \cdots\cdots \leq b_\omega \leq \cdots\cdots \leq b,$$
ヲ同ジ順序型ヲ持ツ上カラオサヘラレタ系列トスル。シカルトキ

$$\bigvee_\xi a_\xi \bigvee_\xi b_\xi = \bigvee_\xi a_\xi b_\xi$$

証明. $\vee a_\xi b_\xi \geqq a_\eta b_\eta \geqq a_\xi b_\eta \quad (\xi \leq \eta)$

$\therefore\ \vee a_\xi b_\xi \geqq a_\xi \vee a_\eta \qquad \therefore\ \vee a_\xi b_\xi \geqq \vee a_\xi \vee a_\eta = \vee a_\xi \vee b_\xi$

一方 $\vee a_\xi \vee b_\xi \geqq a_\xi b_\xi \qquad \therefore\ \vee a_\xi \vee b_\xi \geqq \vee a_\xi b_\xi$

---

(1) H. Nakano. Teilweise geordnete Algebra, 輯報17巻 (1941) 425–511. 以下N.T.トシテ引用.

(2) コノ Lemma 1, 2 ハ H. Freudenthal, Teilweise geordnete Moduln, Proc. Acad. Ams. Vol. 34, (1936) ニヨル.

Lemma 2. $a_1 \leq a_2 \leq \cdots\cdots \leq a_\omega \leq \cdots\cdots \leq a_\xi$ トシ又 b ヲ任意ノ要素トスルトキ

$$(\vee a_\xi) \cap b = \vee(a_\xi \cap b)$$

証明. $\vee(a_\xi b^{-1}) \cap 1 = \vee(a_\xi b^{-1} \cap 1)$ ヲ証明スレバヨイカラ始メカラ $b=1$ トシテオク。

$$\vee a_\xi = ((\vee a_\xi) \cup 1)((\vee a_\xi) \cap 1) = (\vee(a_\xi \cup 1))((\vee a_\xi) \cap 1),$$

又一方

$$\vee a_\xi = \vee((a_\xi \cup 1)(a_\xi \cap 1)) = \vee(a_\xi \cup 1) \vee (a_\xi \cap 1)$$

故ニ $(\vee a_\xi) \cap 1 = \vee(a_\xi \cap 1)$

Lemma 3. $\mathfrak{M}$ ヲ上カラオサヘラレタ $\mathfrak{G}$ ノ任意ノ部分集合，b ヲ任意ノ要素トスルトキ

$$\left(\bigvee_{a \in \mathfrak{M}} a\right) \cap b = \bigvee_{a \in \mathfrak{M}} (a \cap b)$$

証明. $\mathfrak{M}$ ノ要素ヲナラベテ $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_\omega, \cdots\cdots, a_\eta, \cdots\cdots$, $\eta < \xi$ トスル。

証明スベキコトハ $\left(\bigvee_{\eta<\xi} a_\eta\right) \cap b = \bigvee_{\eta<\xi} (a_\eta \cap b)$

ヨッテ $\xi' < \xi$, $\left(\bigvee_{\eta<\xi'} a_\eta\right) \cap b = \bigvee_{\eta<\xi'} (a_\eta \cap b)$

ハ証明サレタモノトシテ超限帰納法ヲ用ヒル，$\xi = \xi_0 + 1$ ナラバ

$$\left(\bigvee_{\eta<\xi} a_\eta\right) \cap b = \left(\bigvee_{\eta<\xi_0} \cup a_{\xi_0}\right) \cap b$$

$$= \left(\left(\bigvee_{\eta<\xi_0} a_\eta\right) \cap b\right) \cup (a_{\xi_0} \cap b) = \bigvee_{\eta<\xi} (a_\eta \cap b)$$

ヨッテξヲ極限數トセヨ。然ラバ

$$m_\eta = \bigvee_{\eta'<\eta} a_{\eta'} \quad \text{トオクトキ} \quad \bigvee_{\eta<\xi} a_\eta = \bigvee_{\eta<\xi} m_\eta$$

且ツ m_η ハ単調增大ナル故 Lemma 2 ニヨリ

$$\Big(\bigvee_{\eta<\xi} a_\eta\Big) \wedge b = \Big(\bigvee_{\eta<\xi} m_\eta\Big) \wedge b = \bigvee_{\eta<\xi} (m_\eta \wedge b)$$

假定ニヨリ $m_\eta \wedge b = \bigvee_{\eta'<\eta} (a_{\eta'} \wedge b)$ ナル故，コレカラ Lemma ヲ得ル。

Lemma 4. $|a| \wedge |b| = 1$ ナラバ $ab = ba$，但シ普通ノ通リ $a_+ = (a \vee 1)$，$a_- = (a \wedge 1)^{-1}$，$a = a_+ (a_-)^{-1}$，$|a| = a_+ \, a_-$ トスル。

証明. $a \geqq 1$，$b \geqq 1$，$a \wedge b = 1$ ナルトキ $ab = ba$ ナルコトハ前ニ述ベタ。

$$a_+, \ a_- \leqq |a|, \quad b_+, b_{-} \leqq |b|, \quad |a| \wedge |b| = 1 \text{ カラ}$$

$$a_+ \wedge b_+ = a_+ \wedge b_- = a_- \wedge b_+ = a_- \wedge b_- = 1$$

故ニ $ab = ba$ ヲ得ル。

Lemma 5. $a, b, p \in \mathfrak{g}$ トシ $|a| \wedge |p| = 1$，$|b| \wedge |p| = 1$ ナラバ $|ab| \wedge |p| = 1$

証明. 先ヅ $a, b \geqq 1$ トスル。

$$ab \wedge |p| = a(b \wedge a^{-1}|p|) \leqq a(b \wedge |p|) = a$$

ヨッテ

$$ab \wedge |p| = ab \wedge |p| \wedge a = 1.$$

一般ニ上ノ假定カラ

$$a_+ \wedge |p| = 1, \quad a_- \wedge |p| = 1, \quad b_+ \wedge |p| = 1, \quad b_- \wedge |p| = 1$$

サテ　$(ab)_+ = (ab \cup 1) \leq (a \cup 1)(b \cup 1) = a_+ b_+$

故ニ　$a_+ \cap |p| = 1$, $b_+ \cap |p| = 1$ カラ

$$a_+ b_+ \cap |p| = 1$$

ヨッテ　$(ab)_+ \cap |p| = 1$.

同様ニ　$(ab)_- \leq b_- \cdot a_-$ カラ　$(ab)_- \cap |p| = 1$.

$$\therefore \ |ab| \cap |p| = 1$$

コノ Lemma ニヨリ $p \in \mathfrak{G}$ ガ與ヘラレタトキ $|a| \cap |p| = 1$ ナル如キ a ノ全体ハ $\mathfrak{G}$ ノ部分群 $\mathfrak{K}_p$ ヲツクル。

又 $\mathfrak{K}_p$ ノ各要素ト直交スル $\mathfrak{G}$ ノ要素全体ハマハリ部分群 $\mathfrak{H}_p$ ヲツクル. Lemma 4 ニヨリ $\mathfrak{K}_p$ ノ各要素ト $\mathfrak{H}_p$ ノ各要素トハ交換可能デアルコトニ注意スレバ $\mathfrak{G}$ ガ Abel 群デアル時ト全ク同様ニシテ

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{K}_p \times \mathfrak{H}_p.$$

ナルコトガワカル. (N. T. Satz 3.2, Satz 3.3. 参照).

サテ $a, b \in \mathfrak{G}$ ニ対シ $a = a'a''$, $b = b'b''$, $a', b' \in \mathfrak{K}_p$, $a'', b'' \in \mathfrak{H}_p$ トオケバ $a \geq b$ ナルタメニ必要且ッ十分ナル條件ハ $a' \geq b'$, $a'' \geq b''$ ナルコトデアル: 十分ナコトハヨイカラ必要ヲ証明スル。

$$ab^{-1} \geq 1, \ ab^{-1} = (a'b'^{-1})(a''b''^{-1})$$

ナル故 $a \geq 1$ ナラバ $a' \geq 1$, $a'' \geq 1$ ヲ云ヘバヨイガ N. T. Satz 3.8 ニヨリ　$a' = \bigvee_n (|p|^n \cap a)$ ナル故 $a \geq a' \geq 1$ ダカラコレデヨイ。ヨッテ束 $\mathfrak{G}$ ハ又束 $\mathfrak{K}_p$ ト束 $\mathfrak{H}_p$ トノ直和トナル。N. T. ニナラッテ $a'' = [p]^a$ トカクコトニスル。

定理1. 任意ノ $p \in \mathfrak{g}$ ニ對シ

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k}_p \times \mathfrak{h}_p$$

且ツ $\mathfrak{g}$ ハ束 $\mathfrak{k}_p$ ト束 $\mathfrak{h}_p$ トノ直和ニナル。ヨッテ $\mathfrak{k}_p$, $\mathfrak{h}_p$ ハ共ニ conditionally complete ナ束群デアル。

コノ定理ヲ少シク拡張シテオク。

定理2. $\mathfrak{M}$ ヲ $\mathfrak{g}$ ノ任意ノ部分集合トシ $\mathfrak{M}$ ニ含マレル凡テノ要素 m ト直交スル $\mathfrak{g}$ ノ要素全体ヲ $\mathfrak{k}_{\mathfrak{M}}$, $\mathfrak{k}_{\mathfrak{M}}$ ノ凡テノ要素ト直交スル要素ノ全体ヲ $\mathfrak{h}_{\mathfrak{M}}$ トスレバ群 $\mathfrak{g}$ ハ部分群 $\mathfrak{k}_{\mathfrak{M}}$, $\mathfrak{h}_{\mathfrak{M}}$ ノ直積デ.

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k}_{\mathfrak{M}} \times \mathfrak{h}_{\mathfrak{M}}$$

且ツ束 $\mathfrak{g}$ ハ束 $\mathfrak{k}_{\mathfrak{M}}$ ト束 $\mathfrak{h}_{\mathfrak{M}}$ ノ直和、従ッテ $\mathfrak{k}_{\mathfrak{M}}$, $\mathfrak{h}_{\mathfrak{M}}$ ハ conditionally complete ナル束群デアル。

証明: $x \geqq 1$ ナル要素ガ分解サレルコトヲ云ヘバ，アトハ定理1ノ場合ト同様デアル。

サテ $h = \bigvee_{m \in \mathfrak{M}} ([m]x)$ トオク. $x \geqq [m]x$ ナル故 $\bigvee$ ハ存在シテ $x \geqq h$. $\mathfrak{k}_{\mathfrak{M}}$ ニ属スル任意ノ要素 k' ヲトレバ $|k'| \frown |m| = 1$ ナル故 $[m]x \frown |k'| = 1$. ヨッテ Lemma 3 ヲ用ヒテ $h \frown |k'| = (\bigvee([m]x)) \frown |k'| = \bigvee([m]x \frown |k'|) = 1$ 故ニ $h \in \mathfrak{h}_{\mathfrak{M}}$. $xh^{-1} = k$ トオケバ $k \geqq 1$.

且ツ $|m| \frown k = |m| \frown xh^{-1} \leqq |m| \frown x([m]x)^{-1} = 1$.

$\therefore \quad |m| \frown k = 1 \qquad \therefore \quad k \in \mathfrak{k}_{\mathfrak{M}}$.,,

所謂 " Projektor " $[p]$ ニ關シテハ $\mathfrak{g}$ ガ Abel 群デアル場合ニ於ケル定理ガ大抵ソノマヽ適用スル. 例ヘバ

$[p](ab) = [p]a \cdot [p]b, \quad [p](a \cup b) = [p]a \cup [p]b$

更ニ一般ニ Va ガ存在スレバ $V[p]a$ モ存在シテ

$$[p]Va = V[p]a$$

N. T. ニ於ケル Satz 3.5, 3.6, 3.7, 3.7, 3.8, 3.14, 3.15, 3.16, 3.17, 3.18, 3.19, 3.20, 3.21, 3.22, 3.23, 3.24, 3.25 等ハ皆成立スル．但シ証明ニ際シテハ多少注意ヲ要スル．例ヘバ $|p| \frown |q| = 1$ ナラバ $[p]x$ ト $[q]y$ トハ交換可能デアル．(Lemma 4 参照) ヨッテ $[p] \geqq [q]$ ナラバ $[p]x, [q]x, ([p]-[q])x$ ハ交換可能デアル等々。

2. 後ニ用ヒル Lemma ヲコヽデ証明シテオキマス。

Lemma 6. $1 \leqq a$ トスルトキ $1 \leqq x \leqq a^n$ (n ハ自然数) ナル x ハ $1 \leqq y \leqq a$ ナル y ノイクツカノ積トシテカケル。

証明. n ニ関スル Induction ニヨル．$1 \leqq x \leqq a^n$ トシ，$y = x(x \frown a^{n-1})^{-1}$ トオケバ

$$y = x(x^{-1} \smile a^{-(n-1)}) = 1 \smile x a^{-(n-1)} \leqq 1 \smile a^n \cdot a^{-(n-1)} = a.$$

故ニ $1 \leqq y \leqq a, \quad x = y(x \frown a^{n-1})$

デ仮定ニヨリ $(x \frown a^{n-1})$ ハ $1 \leqq y' \leqq a$ ナル y' ノ積トナルカラコレデヨイ。

Lemma 7. G ハ 1 以外ニ有限次数ヲ持ツ要素ヲ含マヌ。

証明. $a^m = 1$ トセヨ．先ヅ $b = (1 \frown a)$ トオケバ $b^k = (1 \frown a^2 \frown \cdots\cdots \frown a^k)$．ヨッテ b ノ巾ニハ相異ルモ

ノガ有限個シカナイカラ b ノ次數モ有限, $b^n=1$. $b \leqq 1$ デアルガ, コヽデ $b<1$ ナラバ $b^{n-1}<1$, 一方 $b^{n-1}=b^{-1}>1$ コレハ不合理. 故ニ $b=1$, 同様ニ $1 \vee a = 1$. 故ニ $a=1$.

Lemma 8. $\mathfrak{G}$ ノ二ツノ要素 a, b ニ對シ $aba^{-1}=b^{-1}$ ナラバ $b=1$.

證明. $a(1\vee b)a^{-1} = (1\vee b^{-1}) = b_-$ 即 $ab_+a^{-1} = b_-$. $b_+ \wedge b_- = 1$ ナル故, 次ノ Lemma ヲ用ヒレバ, コレカラ $b_+=b_-=1$, $b=1$ ヲ得ル。

Lemma 9. $\mathfrak{G}$ ニ於テ $aba^{-1}\wedge b=1$ ナラバ $b=1$

證明. $b\in \mathfrak{H}_b$, $\mathfrak{H}_b$ ハ $\mathfrak{G}$ ノ Normalteiler デアルカラ $aba^{-1}\in\mathfrak{H}_b$, 一方假定ニヨリ $aba^{-1}\in \mathfrak{K}_b$

$\therefore\ aba^{-1}\in \mathfrak{H}_b\wedge\mathfrak{K}_b = 1$, $b=1$.

Lemma 10. $\mathfrak{G}$ ニ於テ $a^2=b^2$ ナラバ $a=b$

證明. $a^2=b^2=z$, $\{a,b\}=\mathfrak{A}$, $\{a,b\}/\{z\}=\bar{\mathfrak{A}}$ トスル. $\bar{\mathfrak{A}}$ ニ於テ $\bar a^2 = \bar b^2 = 1$.

故ニ $b=ac$, $\bar b = \bar a \bar c$ トオケバ $\bar a\bar c\bar a^{-1} = \bar c^{-1}$

故ニ $aca^{-1}=c^{-1}z^\alpha$. $ac^2a^{-1}=c^{-2}z^{2\alpha}$

コヽデ $c^2z^{-\alpha}=c'$ トオケバ $ac'a^{-1}=c'^{-1}$

故ニ Lemma 8 ニヨリ $c'=1$, $c^2=z^\alpha$. $\{c,z\}$ ハ Abel 群デアルガ Lemma 7 ニヨリソレハ有限次數ノ要素ヲ1以外ニハ含マヌカラ $\{c,z\}$ ノ rank ガ1ナルコトカラ, ソレハ環狀群デアル。$\{c,z\}=\{d\}$ トスレバ $\mathfrak{A}=\{a,d\}$, 且ツ $\{d\}$ ハ $\mathfrak{A}$ ノ不変部分群ナル故

$ada^{-1}=d$ 又ハ $ada^{-1}=d^{-1}$. 後者ノ場合ハ Lemma 8 カラ $d=1$, $\mathfrak{A}=\{a\}$. $ada^{-1}=d$ ナラバ $\mathfrak{A}$ ハ Abel 群デアルカラ $a^2=b^2$ カラ同様ニシテ $a=b$ ヲ得ル。

Lemma 11. $\mathfrak{G}$ ニ於テ $a^2b^2=b^2a^2$ ナラバ $ab=ba$

証明. $a'=b^2ab^{-2}$ トオケバ $a'^2=b^2a^2b^{-2}=a^2$, ヨッテ前 Lemma ニヨリ $a=a'$, $ab^2a^{-1}=b^2$, $b'=aba^{-1}$ トオケバ同様ニシテ $b'=b$.

3. $p\geqq 1$ トスルトキ $e\frown pe^{-1}=1$ 即チ $e^2\frown p=e$ ナル e ヲ p ノ部分 (Teil) ト呼ブ. (N. T. Definition 5.1 参照). $e\frown pe^{-1}=1$ カラ $e(pe^{-1})=(pe^{-1})e$, 即チ e ト p トハ交換可能デアル. e_1, e_2 ガ p ノ部分ナラバ $(e_1\frown e_2)\frown p(e_1\frown e_2)^{-1}=(e_1\frown e_2)\frown(pe_1^{-1}\smile pe_2^{-1})$ $=(e_1\frown e_2\frown pe_1^{-1})\smile(e_1\frown e_2\frown pe_2^{-1})=1$ カラ $(e_1\frown e_2)$ モ亦 p ノ部分. 同様ニ $e_1\smile e_2$ モ p ノ部分デアル. 明カニ e ガ p ノ部分ナラバ pe^{-1} モ p ノ部分デアル。又 $e_1\leqq e_2$ トスレバ $e_1\frown e_2e_1^{-1}\leqq e_1\frown pe_1^{-1}=1$ カラ $e_1\frown e_2e_1^{-1}=1$ 故ニ $e_1e_2=e_2e_1$.

又 $e_2\smile pe_1^{-1}\geqq e_2\smile pe_2^{-1}=p$ カラ $e_2\smile pe_1^{-1}=p$.

故ニ $e_2(pe_1^{-1})=(e_2\smile pe_1^{-1})(e_2\frown pe_1^{-1})=p(e_2\frown pe_1^{-1})$

$$\therefore\ e_2e_1^{-1}=(e_2\frown pe_1^{-1})$$

ヨッテ $e_2e_1^{-1}$ モ亦 p ノ部分デアル。

Lemma 12. e_1, e_2 ヲ p ノ部分トスレバ $e_1e_2=e_2e_1$

証明. $e_1\leqq e_2$ ナルトキハ既ニ述ベタ。

一般ニ $e_1 \wedge e_2 = e_3$ トスレバ e_3 モ亦 p ノ部分デ $e_1 \geqq e_3$, $e_2 \geqq e_3$ ナル故 $e_1 e_3 = e_3 e_1$, $e_2 e_3 = e_3 e_2$, $e_1 e_3^{-1} \wedge e_2 e_3^{-1} = 1$ ナル故 Lemma 4 ニヨリ $e_1 e_3^{-1}$ ト $e_2 e_3^{-1}$ トハ交換可能. 故ニ $e_1 e_2 = e_2 e_1$.

次ニ $p \geqq 1$ ナル要素 p デ $p \geqq a \geqq 1$ ナル凡テノ a ガ p ノ部分トナルトキ p ヲ特異要素ト呼ブコトニスル。(例ヘバ $p=1$. 又 $p>1$ デ $p>x>1$ ナル x ガ存在シナイヤウナ p ハ特異要素デアル) p ヲ特異要素トシ $p \geqq p' \geqq a' \geqq 1$ トスレバ $a'^2 \wedge p = a'$ カラ $a'^2 \wedge p' = a'^2 \wedge p \wedge p' = a' \wedge p' = a'$. ヨツテ $p \geqq p' \geqq 1$ ナル p' ハ凡テ特異要素デ且ツ Lemma 12 ニヨリソレラハ互ニ交換可能デアル。

Lemma 13. p_1, p_2 ヲ特異要素トスレバ $1 \leqq x \leqq p_1^m$, $1 \leqq y \leqq p_2^n$ (m, n ハ自然数) ナル x ト y トハ交換可能デアル。

証明. Lemma 6 ニヨリ $1 \leqq x \leqq p_1$ ナル x ト $1 \leqq y \leqq p_2$ ナル y トガ交換可能ナルコトヲ云ヘバヨイガ, ソレハ Lemma 12 ノ証明ト全ク同ジ様ニ出来ル。

サテ $a \geqq 1$, $b \geqq 1$ トスレバ $[p_1]a = \bigvee_n (p_1^n \wedge a)$, $[p_2]b = \bigvee_a (p_2^m \wedge b)$ ナル故 $[p_1]a$ ト $[p_2]b$ トハ交換可能. 故ニ $\mathfrak{h}_a$ ノ各要素ト $\mathfrak{h}_b$ ノ各要素ハ交換可能デアル特異要素全体ノ集合ヲ γ トスル. 然ラバ定理2ニヨリ

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_\gamma \times \mathfrak{k}_\gamma$$

デアルガ $\mathfrak{h}_\gamma$ ハ $\bigvee_{p \in \gamma} [p]x$ カラ生成サレルカラ既ニ述ベタ

コトニヨリソレハ Abel 群デアル．ココニ $\mathfrak{K}_\gamma$ モ亦 conditionally complete ナ束群デアルガ，ソレハ最早ヤ特異要素ヲ含マナイ。（1以外ニハ）何トナレバ p ヲ $\mathfrak{K}_\gamma$ ノ特異要素トスレバ $1 \leq a \leq p$ ナル a ハ凡テ $\mathfrak{K}_\gamma$ ニ含マレルカラ p ハ又 $\mathfrak{G}$ ノ特異要素．故ニ $p \in \mathfrak{h}_\gamma$．コレカラ $p=1$.

4. 以上ノ所論カラ $\mathfrak{G}$ ガ Abel 群デアルコトヲ云フニハ $\mathfrak{K}_\gamma$ ガ Abel 群デアルコトヲ云ヘバヨイ．即チ始メカラ $\mathfrak{G} = \mathfrak{K}_\gamma$ デ $\mathfrak{G}$ ハ1以外ニ特異要素ヲ含マヌト假定シテヨイ。以下常ニコノ假定ノモトニ考ヘル。

Lemma 14. $a > 1$, $a > x^2$, $x \geq 1$ ナラバ $x' > x$, $a \geqq x'^2$ ナル x' ガ存在スル。

証明. 始メニ $a > 1$ ナラバ $a \geqq x'^2$, $x' > 1$ ナル x' ガ存在スルコトヲ云フ。a ハ假定ニヨリ特異要素デナイカラ $a > a' > 1$ ナル a' デ $x' = a' \cap aa'^{-1} \neq 1$ ナル a' ガ存在スル．$x'^2 \leqq aa'^{-1} \cdot a' = a$ ナル故コレデヨイ．次ニ $a > x^2$ トセヨ。$x^{-2}a = a' > 1$ トオク．今証明シタコトニヨリ $a' \geqq z^2$, $z > 1$ ナル z ガ存在スル．$xzx^{-1} \cap z = y$ トオケバ *Lemma* 9 ニヨリ $y > 1$．$x' = xy$ トオケバ $x' > x$ デ $x'^2 = xyxy = x^2 \cdot x^{-1}yx \cdot y \leqq x^2 \cdot z^2 \leqq x^2 a' = a$.

Lemma 15. $a > 1$. トスレバ $a = x^2$ ナル x ガ存在スル。

証明. $x_1 = 1$ カラ始メテ $x_1 < x_2 < x_3 < \cdots\cdots$ ヲ次ノ

様ニツクッテ行ク．$\eta<\xi$ ナルトキ x_η ガ既ニ定メラレタトセヨ。$\xi=\xi_0+1$ トスルトキ $x_{\xi_0}^2=a$ ナラバ $x_\xi=x_{\xi_0}$, $x_{\xi_0}^2<a$ ナラバ Lemma 14 ニヨリ $x_\xi>x_{\xi_0}$, $a\geqq x_\xi^2$ ナル x_ξ ヲトル．又 ξ ガ極限数ナラバ $x_\xi=\bigvee_{\eta<\xi}x_\eta$ トオク．

$x_\xi>x_\eta$. 且ツ $x_\xi x_\eta=\bigvee_{\eta'<\xi}x_{\eta'}x_\eta=\bigvee_{\eta\leqq\eta'<\xi}(x_{\eta'}x_\eta)$ $\leqq\bigvee_{\eta'<\xi}x_{\eta'}^2\leqq a$. $x_\xi^2=x_\xi\bigvee x_\eta=\bigvee x_\xi x_\eta\leqq a$ コノ様ニシテ $x_\xi^2=a$ トナラヌ限リ相異ナル要素ノ系列ガドコマデモ出来ル．ヨッテイツカハ $x_\xi^2=a$ ナル x_ξ ガ存在スル。

一般ニ $\mathfrak{G}$ ノ要素 a ヲトレバ $a=a_+(a_-)^{-1}$ $a_+\geqq1$, $a_-\geqq1$．ヨッテ $a_+=x^2$, $a_-=y^2$ ナル x, y ガ存在スル．a_+ ト a_- トハ交換可能ナル故 Lemma 11 ニヨリ x ト y トモ交換可能．ヨッテ $xy^{-1}=z$ トオケバ $a=z^2$ トナル．Lemma 10 ニヨレバコノ様ナ z ハシカモ唯一ツ定マル．コレヲ $z=a^{\frac{1}{2}}$ トカクコトニスル．$a^{\frac{1}{4}}=(a^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{1}{8}}=(a^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{2}}$, ……ト定義シ又，$a^{\frac{k}{2^n}}=(a^{\frac{1}{2^n}})^k$ トスル．（n ハ自然数，k ハ整数）然ラバ $\lambda=\frac{k}{2^n}$ ナル形ノ凡テノ分数ニ対シ，a^λ ガ定義サレ、ソレラハ互ニ交換可能デ普通ノ巾ノ法則ヲ満足スル。

$$a=1,\quad a^\lambda a^{\lambda'}=a^{\lambda+\lambda'}\quad (a^\lambda)^{\lambda'}=a^{\lambda\lambda'}\ 等。$$

又 a ト b トガ交換可能ナラバ Lemma 11 ニヨリ $a^{\frac{1}{2}}$ ト $b^{\frac{1}{2}}$ トハ交換可能．ヨッテ一般ニ a^λ ト $b^{\lambda'}$ トハ交換可能トナリ、特ニ

$$(ab)^\lambda=a^\lambda b^\lambda \quad (3)$$

—— 脚註次頁 ——

Lemma 16. 任意ノ p, a ニ對シ

$[p]\, a^{\lambda} = ([p]\, a)^{\lambda}$

証明. $\lambda = \frac{1}{2}$ ノトキ証明スレバ十分デアルガ

$([p]\, a^{\frac{1}{2}})^2 = [p]\, (a^{\frac{1}{2}})^2 = [p]\, a$ カラ開平ノ一意性ニヨリ

$[p]\, a^{\frac{1}{2}} = ([p]\, a)^{\frac{1}{2}}$

Lemma 17. $a \geq 1$ ナラバ $\lambda > \lambda'$ ナルトキ $a^{\lambda} \geq a^{\lambda'}$

又コノトキ凡テノ $\lambda > 0$ ニ対シ $a^{\lambda} \leq b$ ナル b ガ存在スレバ

$a = 1$.

証明. 始メノ方ハ $a \geqq a^{\frac{1}{2}} \geqq 1$ カラ明カ. 又 $a^{\lambda} \leq b$

トスレバ conditionally complete ナルコトカラ

$\bigvee_{\lambda} a^{\lambda} = a_0$ ガ存在スル. $a_0 a = \bigvee a^{\lambda+1} = \bigvee a^{\lambda} = a_0$

故ニ $a = 1$.

コレダケ準備シテオイテ所謂 "Spektraltheorie"

ノ眞似ヲスル. $p > 1$ トシ又 $a \in hy\, p$, $a \geqq 1$ トスル.

以下ノ考察ハ N. T. Satz 5. 15 ノ証明ト全ク同様デアルガ念ノタメニコヽニ繰返シテ見ル. $\lambda, \mu,$ ----等ハ凡テ

$\frac{k}{2^m}$ 型ノ分数トスル。

$\lambda \geqq 0$ ニ対シ $\qquad e_{\lambda} = [(p^{\lambda} a^{-1})_+]\, p$

トオケバ e_{λ} ハ p ノ部分デ $\lambda > \mu$ ナラバ $(p^{\lambda} a^{-1})_+ \geqq (p^{\mu} a^{-1})_+$

カラ N. T. Satz 3. 17 ニヨリ

$$e_{\lambda} \geqq e_{\mu}$$

---

(13) コレラノコトカラ一般ニ任意ノ実数λニ対シ a^{λ} ヲ定義スルコトモ容易デセウガ差當リソノ必要ガアリマセンカラ止メテオキマス.

N. T. Satz 3.18, 3.16 カラ $[p^\lambda]=[p]$, $(\lambda>0)$, $p^\lambda \geqq (p^\lambda a^{-1})_+$ ニ注意シテ

$$[e_\lambda]=[(p^\lambda a^{-1})_+][p]=[(p^\lambda a^{-1})_+][p^\lambda]=[(p^\lambda a^{-1})_+]$$

コノ結果ハ $\lambda=0$ デモヨイ。

$(p^\lambda a^{-1})_+ \frown (p^\lambda a^{-1})=1$ カラ $[e_\lambda](p^\lambda a^{-1})=(p^\lambda a^{-1})_+ \geqq 1$. ヨッテ

$$(*) \quad [e_\lambda]a \leqq [e_\lambda]p^\lambda=([e_\lambda]p)^\lambda=e_\lambda^\lambda$$

又 $[(p^\lambda a^{-1})_+](pe_\lambda^{-1})=[e_\lambda](pe_\lambda^{-1})=1$ ナル故 N. T. Satz 3.6 カラ $pe_\lambda^{-1} \frown (p^\lambda a^{-1})_+=1$

ヨッテ $[pe_\lambda^{-1}](p^\lambda a^{-1})=([pe_\lambda^{-1}](p^\lambda a^{-1})_-)^{-1} \leqq 1$. 故ニ

$$(**) \quad [pe_\lambda^{-1}]a \geqq [pe_\lambda^{-1}]p^\lambda=([pe_\lambda^{-1}]p)^\lambda=(pe_\lambda^{-1})^\lambda$$

$(**)$ カラ

$$(pe_\lambda^{-1})^\lambda \leqq [pe_\lambda^{-1}]a \leqq a$$

ヨッテ $\bigwedge_{\lambda>0}(pe_\lambda^{-1})=a_0$ トスレバ $a_0^\lambda \leqq a$ (4) Lemma 17 ニヨリ $a_0=1$. 即チ

$$\bigwedge_{\lambda>0} pe_\lambda^{-1}=p\Big(\bigvee_{\lambda>0} e_\lambda\Big)^{-1}=1, \quad \bigvee_{\lambda>0} e_\lambda=p$$

$\lambda>\mu$ トスレバ $e_\lambda \geqq e_\mu$ ナル故 $e_\lambda e_\mu^{-1}$ モ亦 p ノ部分デ

$(*)$ カラ

$$[e_\lambda e_\mu^{-1}]a=[e_\lambda e_\mu^{-1}][e_\lambda]a \leqq [e_\lambda e_\mu^{-1}]e_\lambda^\lambda$$
$$=([e_\lambda e_\mu^{-1}]e_\lambda)^\lambda=(e_\lambda e_\mu^{-1})^\lambda$$

---

(4) a_0 ハ pe_λ^{-1} ト交換可能ナル故 $a_0 a'=pe_\lambda^{-1}$, $a' \geqq 1$ トスレバ

$$a_0^\lambda a'^\lambda=(a_0 a')^\lambda=(pe_\lambda^{-1})^\lambda, \quad \therefore \; a_0^\lambda \leqq (pe_\lambda^{-1})^\lambda.$$

又 (**) カラ

$$[e_\lambda e_\mu^{-1}]a = [e_\lambda e_\mu^{-1}][pe_\mu^{-1}]a \geqq [e_\lambda e_\mu^{-1}](pe_\mu^{-1})^\mu$$
$$= ([e_\lambda e_\mu^{-1}](pe_\mu^{-1}))^\mu = (e_\lambda e_\mu^{-1})^\mu$$

ヨッテ $\lambda > \mu$ ニ對シ

$$(***) \quad (e_\lambda e_\mu^{-1})^\mu \leq [e_\lambda e_\mu^{-1}]a = [e_\lambda]a\,([e_\mu]a)^{-1} \text{(5)}$$
$$\leq (e_\lambda e_\mu^{-1})^\lambda$$

コヽデ e_λ, e_μ 等ハ Lemma 12 ニヨリ互ニ交換可能ナルコトニ注意. サテ m, n ヲ任意ノ自然數トシ區間 $[0, m]$ ヲ $\frac{1}{2^n}$ ナル巾デ等分シテコレヲ

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \cdots\cdots < \lambda_x = m \qquad x = 2^n \cdot m$$

トスル. 上ノ (***) カラ

$$s_{m,n} = \prod_{\nu=1}^{x} (e_{\lambda_\nu} e_{\lambda_{\nu-1}}^{-1})^{\lambda_{\nu-1}} \leq [e_m]a\,([e_0]a)^{-1}$$

$$= [e_m]a \leqq \prod^{x} (e_{\lambda_\nu} e_{\lambda_{\nu-1}}^{-1})^{\lambda_\nu} = s'_{m,n}$$

故ニ

$$1 \leqq s_{m,n}^{-1} \cdot [e_m]a \leqq s_{m,n}^{-1}\, s'_{m,n} = \prod_{\nu=1}^{x} (e_{\lambda_\nu} e_{\lambda_{\nu-1}}^{-1})^{\lambda_\nu - \lambda_{\nu-1}}$$
$$= e_m^{\frac{1}{2^n}}$$

ヨッテ $1 \leqq \bigwedge_n s_{m,n}^{-1} [e_m]a \leqq \bigwedge_n e_m^{\frac{1}{2^n}} = 1$ カラ

---

(5) $e_\lambda e_\mu^{-1} \frown e_\mu = 1$ ナル故 $[e_\lambda e_\mu^{-1}]a$ ト $[e_\mu]a$ トハ交換可能デ且ツ $[e_\lambda e_\mu^{-1}]a \cdot [e_\mu]a = [e_\lambda]a$.

$$\bigvee_{n} s_{m;n}=[e_m]a$$

又 $\bigvee_{m} e_m = p$ カラ N. T. Satz 3.23 ヲ用ヒレバ

$$\bigvee_{m}[e_m]a=[p]a=a$$

即チ $$a=\bigvee_{m,n} s_{m,n}$$

次ニ又別ニ任意ニ $b \in \mathfrak{h}_p$, $b \geqq 1$ ヲトレバ矢張リ

$$b=\bigvee_{m,n}\bar{s}_{m,n}$$

トカケル。コヽニ $s_{m,n}$, $\bar{s}_{m,n}$ ハイヅレモ p ノ部分ノ巾ノイクツカノ積デアルカラ Lemma 12 及ビ巾ニ関スル性質カラ互ニ交換可能. ヨッテ a ト b トモ交換可能トナル. 一般ニ $a=a_+(a_-)^{-1}$ デ $a \in \mathfrak{h}_p$ ナラバ a_+, $a_- \in \mathfrak{h}_p$, a_+, $a_- \geqq 1$ デアルカラ, コレカラ $\mathfrak{h}_p$ ハ Abel 群デアルコトガワカル。

サテ p ガ $p>1$ ナル $\mathfrak{g}$ ノ凡テノ要素ヲ動クトキ $\mathfrak{k}_p$ ノ共通部分群ヲ $\mathfrak{D}$ トセヨ。$\mathfrak{D}$ ニ含マレル任意ノ要素ヲ x トスル. $x \in \mathfrak{k}_p$ ナル故 $|x| \in \mathfrak{k}_p$, ヨッテ $|x| \in \mathfrak{D}$. 今 $|x|>1$ ト仮定スレバ $|x| \in \mathfrak{h}_{|x|}$ カラ $|x| \notin \mathfrak{k}_{|x|}$. コレハ不合理. ヨッテ $|x|=1$. 即チ $\mathfrak{D}=1$. $\mathfrak{g}$ ノ交換子群ヲ $\mathfrak{g}'$ トセヨ。$\mathfrak{g}/\mathfrak{k}_p \simeq \mathfrak{h}_p$ ハ Abel 群デアルカラ $\mathfrak{g}' \leq \mathfrak{k}_p$. 故ニ $\mathfrak{g}' \subseteq \mathfrak{D}=1$. $\mathfrak{g}'=1$. 即チ $\mathfrak{g}$ ハ Abel 群デアル。

カクシテ次ノ定理ガ証明サレタ。

定理3. Conditionally complete ナ束群ハ Abel 群デアル。

サテ $\mathfrak{g}$ ガ Abel 群デアルコトガワカッタ上デ再ビ始メニ戻リ分解

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_\gamma \times \mathfrak{R}_\gamma$$

ヲ考ヘテ見マス。但シ γ ハ $\mathfrak{g}$ ノ特異要素ノ集合、コヽデ $\mathfrak{R}_\gamma$ ガ (conditionally) complete vector lattice トナルコトハ上ノ所論カラ明カデアリマス。($\mathfrak{R}_\gamma$ ガ Abel 群デアルコトガワカッテヰルノデスカラ心配ナク a^λ, (λ: 實數) ガツクレマス)

ヨッテ $\mathfrak{h}_\gamma$ ヲ考ヘテ見マス。γ ハ $\mathfrak{g}$ ノ特異要素ノ全体デアリマシタガ，ソレハ又 $\mathfrak{h}_\gamma$ ノ特異要素ノ全体デアルコトハ明カデス。サテ Clifford-Lorenzen ニヨリ Abel 束群 $\mathfrak{h}_\gamma$ ヲ linear ナ束群 $\mathfrak{L}_\tau$ ノ直積ノ内ニ lattice isomorphic ニ embed シタト考ヘマス。$a \in \mathfrak{h}_\gamma$ ニ對シ

$$a \longleftrightarrow (\cdots\cdots, a_\tau, \cdots\cdots) \qquad a_\tau \in \mathfrak{L}_\tau$$ [6]

$\gamma \ni s$ ナル凡テノ s ニ對シ $s_\tau = 1$ トナル如キ"座標" τ ノ集合ヲ $\mathfrak{T}_2$，殘リノ座標ノ全体ヲ $\mathfrak{T}_1$，又 $\mathfrak{L}_\tau$ ($\tau \in \mathfrak{T}_i$) ノ直積ヲ $\mathfrak{N}_i$，$i=1,2$ トシマス。

即チ $\mathfrak{h}_\gamma$ ハ $\mathfrak{N}_1 \times \mathfrak{N}_2$ ノ内ニ embed サレテヰルワケデ

$$a \leftrightarrow (n_1, n_2) \qquad n_1 \in \mathfrak{N}_1,\ n_2 \in \mathfrak{N}_2$$

---

(6) $\mathfrak{L}_\tau$ ハ a_τ ノ全体カラ出来タモノトシテヨイ。

コンデ $a \longrightarrow n_1$ ナル對應ヲ考ヘレバ，コレハ束群トシテノ homomorphic ナ寫像ヲ與ヘルコトハ明カデスガ實ハ isomorhic ニナリマス。何故ナラバ今アル a_0 ニ對シ

$$a_0 \longleftrightarrow (1,\ n_2^*)$$

トスレバ

$$|a_0| \longleftrightarrow (1.\ |n_0^*|)$$

任意ノ $s \in \gamma$ ハ

$$s \longleftrightarrow (s_1,\ 1)$$

ナル故 $|a_0| \frown S = 1$

故ニ $[S]|a_0| = 1$ デ又 $|a_0| = \bigvee_{s \in \gamma} [S]|a_0| = 1.$

$$\therefore\ a_0 = 1$$

ヨッテ始メカラ $\mathfrak{J}_2 = 0$ ト假定シテ差支ヘアリマセン．然ラバ τ ヲ任意ノ座標トスルトキ適當ニ $s \in \gamma$ ヲトレバ $s_\tau > 1$ トスルコトガ出來マスガ，コンデ S_τ ハ $\mathcal{L}_\tau$ ニ於テ $x > 1$ ナル x ノウチ最小ナルモノデアルコトガワカリマス．ソレハ

$$s_\tau > a_\tau > 1$$

ナル a_τ ガ存在シタトスレバ $a' = (a \smile 1) \frown S$ トオケバ $1 \leq a' \leq S$ デ

$$a'_\tau = a_\tau$$

s ハ特異要素ナル故 $a' \frown S a'^{-1} = 1$．ヨッテ $a_\tau \frown S_\tau a_\tau^{-1} = 1$ デナケレバナラヌガ $\mathcal{L}_\tau$ ハ linear デアルカラコレハ不合理。

從ッテ $\mathcal{L}_\tau$ ハ linear デ且ッ $1 < x$ ナル x ノウチ

最小ナルモノガ存在スルノデスカラ，ソレハ有理整數ノ加法群ト束群トシテ isomorphic デアリマス．即チ $\mathfrak{h}_{\mathfrak{g}}$ ハ有理整數ノ加法群ノ直積（直和）ノ内ニ isomorphic ニ embed サレルワケデス。

次ニ上ノ如キ分解ハ一意的デアルコトヲ証明シマス。

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_2$$

トシ，$\mathfrak{a}_1$ ハ有理整數ノ加法群ノ直積ノアル部分群，又 $\mathfrak{a}_2$ ハ vector lattice トスル．S ヲ $\mathfrak{g}$ ノ任意ノ特異要素トスレバ先ニ述ベタト同様ニシテ $S \in \mathfrak{a}_1$ ナルコトガワカリマス。

$a_2 \in \mathfrak{a}_2$ ヲ任意ニトレバ $S \cap |a_2| = 1$

故ニ $\mathfrak{k}_{\mathfrak{g}} \supseteq \mathfrak{a}_2$，$\mathfrak{h}_{\mathfrak{g}} \subseteq \mathfrak{a}_1$ (7)

サテ $\mathfrak{a}_1$ ニ属スル要素ヲ $a_1 = h k$，$h \in \mathfrak{h}_{\mathfrak{g}}$，$k \in \mathfrak{k}_{\mathfrak{g}}$ トスレバ $h \in \mathfrak{a}_1$ ナル故 $k \in \mathfrak{a}_1$．$\mathfrak{a}_1$ ヲ各座標ニ分ケテ

$$k \longleftrightarrow (\cdots\cdots, k_\tau, \cdots\cdots), \quad k_\tau \in \mathcal{L}_\tau$$

トスル。$k \in \mathfrak{k}_{\mathfrak{g}}$ ナル故任意ノ整數 m ニ對シ $\sqrt[m]{k}$ ガ存在スル．ヨッテ又 $\sqrt[m]{k_\tau}$ ガ存在スルガ $\mathcal{L}_\tau$ ハ有理整數ノ加法群デアルカラ，コノコトカラ $k_\tau = 1$．$\therefore k = 1$.

即チ $\mathfrak{h}_{\mathfrak{g}} = \mathfrak{a}_1$ ヨッテ又 $\mathfrak{k}_{\mathfrak{g}} = \mathfrak{a}_2$ (7)

---

(7) 一般ニ束群 $\mathfrak{g}$ ガ $\mathfrak{a}_1$，$\mathfrak{a}_2$ ノ束群ノ意味デノ直積（直和）ナラバ $\mathfrak{a}_1$ ト直交スル要素ノ全体ガ $\mathfrak{a}_2$，$\mathfrak{a}_2$ ト直交スル要素ノ全体ガ $\mathfrak{a}_1$ トナル。

定理4. Conditionally complete ナ束群Gハ(conditionally) complete vector lattice ト有理整数加法群ノ直和ノアル conditionally complete ナ部分群トノ直和トナル。且ツコノ様ナ分解ハ一意的デアル。