1045. 三次式ノ函數方程式ニ就イテ

春本　博（神戸商船）

可測函數 $f(x)$ ガ整式 ax^3+bx^2+cx+d ナルタメノ必要且ツ充分條件ノ一ツトシテ $\dfrac{f(x+y)+f(x-y)-2f(x)}{y^2}$ ガ x ノミノ函數ナルコトハ，以前雜誌函數方程式ニ於テ論ジタ所デアル。次ニ連續函數 $f(x)$ ガ三次ノ整式ナルタメノ必要且ツ充分條件ヲ次ニ掲ゲヨウ。

（定理）連續函數 $f(x)$ ガ整式 ax^3+bx^2+cx+d ナルタメノ必要且ツ充分條件ハ $f(x)$ ガ次ノ函數方程式ヲ滿足セシムルコトデアル。

$$(1)\quad \int_x^y f(t)\,dt=\frac{1}{6}(y-x)\left\{f(x)+f(y)+4f\left(\frac{x+y}{2}\right)\right\}$$

（證明）必要ナル方ハ明カデアル。次ニ充分ナルコトヲ示サウ。（何回モ微分シ得ルコトノ證明ハ容易）

(1) ヲ y デ微分シ次ニ x デ微分スレバ

$$(2)\quad f'(x)-f'(y)+(y-x)f''\left(\frac{x+y}{2}\right)=0$$

(2) ヲ x デ微分スレバ

$$f''(x)-f''\left(\frac{x+y}{2}\right)+\frac{1}{2}(y-x)f'''\left(\frac{x+y}{2}\right)=0$$

上式ヲ y デ微分スレバ

$$(y-x)f^{(iv)}\left(\frac{x+y}{2}\right)=0$$

上式ニ於テ x, y ハ任意ナル故，結局 $f^{(iv)}(x)=0$

即チ $\quad f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$