1046. p-進体ニ関スル一二ノ注意

淡中　忠郎（東北帝大）

類体論ノ *Hauptidealsatz* ト *Hauptgeschlechtssatz* ノ間ニアル種ノ *Dualität* ガアルノハ注目スベキコトノ様ニ思ハレルノデ先ヅ p-進体カラ始メテ何等カノヒントヲ得ヤウトシテヰル内ニ気付イタ定理ヲ二ツ許リ御紹介シマス。

問題ハ "p-進体ノ Abel ナ下体ヲ特徴ヅケルコト" デ類体論ト *dual* ナ性質ガドノ程度保存サレルカ？ニ興味ガアルワケデスガ目下 *Isomorphiesatz* アタリデ停頓中デス。以下体ハ p-進体，$G(k/K)$ $(K \supset k)$ ハ $N_{K/k}(A)=1$ ナル A ノ群トスル。

(順序定理)　K/k, K/k' *abelsch* ノ時 $k' \subset k$ ナル必要且ツ充分ナ條件ハ $G(k/K) \subset G(k'/K)$

$$N_{k/k'}(\alpha^{n'}/\alpha') = \alpha'^{n'}/\alpha'^{n'} = 1$$

從ッテ Verschiebungssatz カラ

$$\alpha^{n'}/\alpha' \in N(K^*)$$

$$\alpha' \in N(K^*)$$

$\alpha' = N(B)$ トスルト $\quad N'(A^{n'}/B) = N_{k/k'}(\alpha^{n'}/\alpha') = 1$

假定 $G(k/K) = G(k'/K)$ カラ $\quad N(A^{n'}/B) = 1$

即チ $\quad \alpha^{n'} = \alpha' \in k'$

$$N(K^*)^{n'} \subset k'$$

$$k^{*nn'} \subset N(K^*)^{n'} \subset k'^* \subset k^*$$

$[k^* : k^{*nn'}] < \infty$ ダカラ $[k^* : k'^*] < \infty$

從ッテ第一段カラ $k = k'$ トナッテ証明終ル。

<u>第三段</u> $K = kk'$, K/k, K/k', Abelsch ノ時 $G(k/K) \subset G(k'/K)$ ナラバ $k' \subset k$ (從ッテ $k = K$)

証明. $k' \not\subset k$ トス。$k'' = k \cap k'$, $[K : k] = n$, $[K : k'] = n'$, $K = k(\Theta)$,

Θ ノ満足スル k ニ於ケル既約方程式ヲ

$$f(\Theta) = \Theta^n + a_1 \Theta^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

トシ, $H = \Theta - \alpha$, $\alpha \in k''$ ト置ケバ

$$0 = f(\Theta) = f(\alpha) + \frac{f'(\alpha)}{1!} H + \frac{f''(\alpha)}{2!} H^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!} H^n$$

ガ H ノ k ニ於テ満足スル方程式デアル. $\frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!} = 1$ ダカラ

$$N_{K/k} H = (-1)^n f(\alpha)$$

$$H_{K/k}\{H^n/(-1)^n f(\alpha)\}=1$$

故ニ假定カラ $N_{K/k'}\{H^n/(-1)^n f(\alpha)\}=1$

$$(-1)^{nn'}N_{K/k'}\{f(\alpha)\}=N_{K/k'}(H^n)$$

$$\therefore\ (-1)^{nn'}f_1(\alpha)f_2(\alpha)\cdots\cdots f_{n'}(\alpha)$$
$$=(\Theta_1-\alpha)^n(\Theta_2-\alpha)^n\cdots\cdots(\Theta_{n'}-\alpha)^n$$

但シ $f_i(\alpha)$ ハ $f(\alpha)$ デ K/k' ニ於ケル共軛ナ係數ヲ置キ換ヘタモノ, Θ_i ハ Θ ノ K/k' ニ關スル共軛數デアル.

上ノ式ハ $\alpha\in k$ ハ k' ニ關スル恒等式デアルカラ α ノ代リニ變數 x トシテモ成立スル.

$$f_1(x)f_2(x)\cdots\cdots f_{n'}(x)=(x-\Theta_1)^n(x-\Theta_2)^n\cdots\cdots(x-\Theta_{n'})^n$$

從ツテ $f_1(x)$ ノ根ハ $\Theta_1, \Theta_2, \cdots\cdots, \Theta_{n'}$ ノ中ノ何レカデアル, モシ $k\neq K$, $k'\neq K$ ナラ之レガ矛盾デアルコトハ K/k' ガ Galoissch デアルコトカラガロア置換ヲ施シテ見レバ容易ニ看ラレル.

(Hauptgeschlechtssatz im Minimalen)

K/k Abelsch デ n 次, Faktorensystem $a_{\sigma,\tau}$ ノ Exponent ガ n ナラバ $G(k/N)$ ハ $\frac{a_{\sigma,\tau}}{a_{\tau,\sigma}}$ ト $A^{1-\sigma}$ ノ形ノ數カラ生成サレル.

$$G(k/K)=\left\{\frac{a_{\sigma,\tau}}{a_{\tau,\sigma}},\ K^{1-\sigma}\right\}$$

(註) 勿論 Hilbert ノ定理ノ擴張デ Abelsch デナイ場合更ニ Galois デナイ場合ニモ少シ必要ナノデ考ヘテ見ル積リデ居リマス.

証明. K/k 素数次ノ時ハ明カデアルカラ帰納法ヲ用ヒ $k \subset k_1 \subset K$, K/k_1 zyklisch トシ k_1/k ニツイテハ証明出来タモノトスル. 但シ $K = k_1 k_2$ (直積), K/k_1 及ビ K/k_2 ノ属スル部分群ヲ夫々 $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$

$[K : k_i] = n_i$ トスル.

今 $N_{K/k_1}(a_{\sigma_2, \tau_2}) = a'_{\sigma_2, \tau_2}$ $(\sigma_2, \tau_2 \in \mathfrak{g}_2)$ 置ケバ Chevalley ニ依リ

$$(a_{\sigma, \tau}, K/k)^{n_1} \sim (a'_{\sigma_2, \tau_2}, k_1/k)$$

(a') ノ Exponent ハ n_2 トナル. 故ニ

$$G(k/k_1) = \left\{ \frac{a'_{\sigma_2, \tau_2}}{a'_{\tau_2, \sigma_2}}, k_1^{1-\sigma_2} \right\}$$

$$A \in \left\{ \frac{a_{\sigma, \tau}}{a_{\tau, \sigma}}, K^{1-\sigma} \right\} \longleftrightarrow N_{K/k_1}(A) \in G(k/k_1)$$ ヲ証

明スレバヨイノデアルガ $\longrightarrow$ ハ明白デアル.

$$N_{K/k_1}(A) \in G(k/k_1) \rightarrow N_{K/K_1}(A) = \prod \frac{a'_{\sigma_2, \tau_2}}{a'_{\tau_2, \sigma_2}} \prod b_1^{1-\lambda_2}$$

$$(b_1 \in k_1) \longrightarrow N_{K/K_1}(A) = \prod N_{K/k_1}\left(\frac{a_{\sigma_2, \tau_2}}{a_{\tau_2, \sigma_2}}\right) \prod b_1^{1-\lambda_2}$$

$$\longrightarrow N_{K/k_1}\left(A \div \prod \frac{a_{\sigma_2, \tau_2}}{a_{\tau_2, \sigma_2}}\right) = \prod b_1^{1-\lambda_2}$$

故ニ $N_{K/k_1}(B) = \prod b_1^{1-\lambda_2}$ ノ時 $B \in \left\{ \frac{a_{\sigma, \tau}}{a_{\tau, \sigma}}, K^{1-\sigma} \right\}$ ヲ云ヘバヨイ.

$(a, K)_{k_1}$ ハ k_1 ヲ Zentrum ニ持チ Exponent n_1

デアル。

$$(a, K)_{k_1} \sim (a_{\sigma_1, \tau_1}, K/k_1) \text{ デアルカラ}$$

$$b_1 = a_{\mathfrak{g}_1, \sigma_1} N_{K/k_1}(\Theta_1) \quad \left(a_{\mathfrak{g}_1, \sigma_1} = \prod_{\tau_1} a_{\tau_1, \sigma_1} \right)$$

ノ形ニ書ケル。之ハ $k_1^* / N_{K/k_1}(K^*)$ ガ n_1 次ナルコトカラ簡単ニ分ル。（K/k_1 ガ一般ノ Abelsch ノ時ハ中山秋月ノ定理デアル）

$$\prod b_1^{1-\lambda_2} = \prod a_{\mathfrak{g}_1, \sigma_1}^{1-\lambda_2} N_{K/k_1}(\Theta_1^{1-\lambda_2})$$

$$a_{\mathfrak{g}_1, \sigma_1}^{1-\lambda_2} = \frac{a_{\mathfrak{g}_1, \sigma_1}}{a_{\mathfrak{g}_1, \sigma_1}^{\lambda_2}} = \prod_{\tau_1 \in \mathfrak{g}_1} \frac{a_{\tau_1, \sigma_1}}{a_{\tau_1, \sigma_1}^{\lambda_2}} = \prod_{\tau_1 \in \mathfrak{g}_1} \frac{a_{\tau_1, \sigma_1} a_{\lambda_2, \tau_1 \sigma_1}}{a_{\lambda_2, \tau_1} a_{\lambda_2 \tau_1, \sigma_1}}$$

$$= \frac{a_{\mathfrak{g}_1, \sigma_1}}{a_{\lambda_2 \mathfrak{g}_1, \sigma_1}} = N_{K/k_1}\left(\frac{a_{\sigma_1, \lambda_2}}{a_{\lambda_2, \sigma_1}} \right)$$

之ハ右辺ノ値ヲ求メテ見レバ容易ニ分ル。

故ニ

$$N_{K/k_1}(B) = \prod b_1^{1-\lambda_2} = \prod N_{K/k_1}\left(\frac{a_{\sigma_1, \lambda_2}}{a_{\lambda_2, \sigma_1}} \Theta_1^{1-\lambda_2} \right)$$

従ッテ $B = \left(\prod \frac{a_{\sigma_1, \lambda_2}}{a_{\lambda_2, \sigma_1}} \Theta_1^{1-\lambda_2} \right) C^{1-\lambda_1}$ ノ形トナッテスベテガ証明サレタ。

上ノ定理ハ *verschränktes Produkt* ノ *Basis* u_σ ヲ用ヒルト意味ガ更ニ透明ニナル。即チ

$$u_\sigma u_\tau u_\sigma^{-1} u_\tau^{-1} = \frac{a_{\sigma, \tau}}{a_{\tau, \sigma}}$$

$$A^{1-\sigma} = A\, u_\sigma\, A^{-1}\, u_\sigma^{-1}$$

デアルカラ

（定理）Abel 体Kヲ最大可換体トシテ含ム Schiefkörper S ガアレバKノ reduzierte Norm ガ1ナル元素ハ S^* ノ交換子群ニ属スル。