1050. ベクトル値集合函數空間ニ就テ

小笠原 藤次郎（廣島文理大）

ベクトル値集合函數空間ヲ取扱ッタL. Kantorovitch ノ所論[1] ノ一般化ヲ目的トスル。

§1. 豫備概念ノ説明

Sヲ基本集合トシSノ部分集合ヨリナル乗法的集合族ヲ$\mathfrak{M}$トスル.（$E_1, E_2 \in \mathfrak{M}$ ノトキ $E_1 E_2 \in \mathfrak{M}$ トナル意）. 互ニ素ナ有限或ハ無限個（可附番トハ限ラナイ）ノ$\mathfrak{M}$ノ要素ノ和トシテSヲ分ケルコトヲSノ分割トイヒ，一般ニ分割ヲ$\mathfrak{d}$デ表ハス. $\mathfrak{d}S$ ニヨッテ分割サレテ$\mathfrak{M}$ノ要素ノ集合ヲ示ス. $\mathfrak{d}_1 \geqq \mathfrak{d}_2$ ハ $\mathfrak{d}_2$ ハ $\mathfrak{d}_1$ ノ細分割. $\mathfrak{d}_1\mathfrak{d}_2$ ハ分割ノ重複, $\mathfrak{d}E$ ハEニ誘導サレタ分割ノ要素ノ集合ヲ表ス. 次ノ性質ヲモツ分割系$\{\mathfrak{d}\}$ヲ考ヘ分割トハスベテコノ系ニ屬スルモノトスル.

(i) $E \in \mathfrak{M}$ ノトキ $E \in \mathfrak{d}S$ ナル $\mathfrak{d} \in \{\mathfrak{d}\}$ ノ存在

(ii) $\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2 \in \{\mathfrak{d}\}$ ノトキ $\mathfrak{d}_1\mathfrak{d}_2 \in \{\mathfrak{d}\}$

(iii) $E \in \mathfrak{M}$ ノトキ $\mathfrak{d}E$ ハ有限個ノ$\mathfrak{M}$ノ要素ヨリナル.

次ノ如キ場合ハ重要デアル.

例1. $\mathfrak{M}$ガSヲ含ムBorel族, $\{\mathfrak{d}\}$ハ互ニ素ナ有限個ノ$\mathfrak{M}$ノ要素ヘノSノ分割ノ全體

例2. Sガ任意個數ノS_αニ分カレ各ノS_αガ例1ノ性質ヲ具ヘ $\mathfrak{M} = \sum \mathfrak{M}_\alpha$ トナルトキ 但シ$\mathfrak{M}_\alpha$ハS_αニ對應

---

(1) Rec. Math 7 (1940) 209–284

スル Borel 族.

例3. S ガ区間, $\mathfrak{M}$ ガ部分区間ノ全体, $\{\vartheta\}$ ハ S ノ有限分割ノ全体.

アラユル ϑ ニツイテ

ϑ ノ有限個ノ要素ノ集リノ全体ヲ $\{\Delta\}$ デ表シ $\Delta \leqq \Delta'$ ヲ Δ, Δ' ヲ定義スル ϑ, ϑ', $\vartheta \leqq \vartheta'$ ガ存在シ $\vartheta'_{\Delta} \subset \Delta'$ ($E \in \Delta$ ノトキ $\vartheta'_E \subset \Delta'$ ノ意) ノトキト定メルコトニ依ッテ $\{\Delta\}$ ハ有向集合 (directed set) トナル. $\mathfrak{M}$ 上ノ集合函数 $\varphi(E)$ (実数値或ハ値域ヲベクトル束トスル) ガ $E=\sum_1^n E_i$, $E_i E_j = 0$; $i \neq j$ ノトキ $\varphi(E)=\sum_1^n \varphi(E_i)$ ナラバ加法的 $n=\infty$ デモ成立スルナラバ完全加法的トイフ (ベクトル束デハ (o)-収斂デ). §2 - §5 デハ $\mathfrak{M}$ ニ完全加法的非負実数値函数 (簡単ニ測度函数) $\beta(E)$ ノ存在ヲ仮定スル. ($\beta(E)$ ヲ単ニ加法的トスルモ外見上ノ相違ニスギナイ。[2]) $\beta(E)$ ハ 例1又ハ例2ノ如キ集合族ノ測度函数ニ拡大サレル. 従ッテ点函数ニツイテ Borel 族ヲ必要トスル概念ノ構成ニ於テハ β 並ニ $\mathfrak{M}$ ヲ例1又ハ例2ノ如ク拡大シテ論ゼラレテヰルモノト約束スル。

§2. 以下断ラナイ限リ X ヲ完備ベクトル束, p, p' ヲ $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$ ナル1ヨリ大ナ正数, $\sum_1^n |c_i|^p=1$ ナル任意ノ実数ニ対シ $\sum_1^n c_i x_i$, $(x_i \in X)$ ノ l.u.b ヲ $\left\{\sum_1^n |x_i|^p\right\}^{\frac{1}{p}}$ ト記ス. $x_i \in X$ $i=1,2,\cdots\cdots$ ノトキ $\left\{\sum_1^n |x_i|^p\right\}^{\frac{1}{p}}$ ガ (o)-有

---

(2) 角谷, 位相数学, 第2巻

界ノトキソノ l. u. b. ヲ $\left\{\sum_{1}^{n}|x_i|^p\right\}^{\frac{1}{p}}$ ト定メル。

定義2.1. Xヲ値域トスル集合函数 $\xi(E)$ ガ (p)－可積分トハスベテノ Δ ニツイテ $\left\{\sum_{E\in\Delta}\frac{|\xi(E)|^p}{\beta(E)^{p-1}}\right\}^{\frac{1}{p}}$ ガ (o)－有界ノコトデアル。コノトキソレ等ノ l. u. b. ヲ $\left\{\int_S\frac{|\xi(dE)|^p}{\beta(E)^{p-1}}\right\}^{\frac{1}{p}}$ 又ハ $N(\xi)$ (abstract norm) ト記ス。但シ $\beta(E)=0$ ノトキ $\xi(E)=0$ ヲ満足シ $\frac{0}{0}$ ノ形ノモノハ0ト定メル。

定義2.2. (p)－可積分函数ノ全体ヲ $V^p(X)$ (βヲ明記スル必要アルトキ $V^p_{(\beta)}(X)$ デ表ハス。Xガ実数ヨリナルトキ単ニ V^p デ表ス。

定理2.1. $V^p(X)$ ハ完備ベクトル束デアル。

(証) 略

定理2.2. $V^p(X)$ ニ於テ

(1) $N(\xi)\geqq 0$ $\xi=0$ ノトキニ限リ $N(\xi)=0$

(2) $N(\xi_1+\xi_2)\leqq N(\xi_1)+N(\xi_2)$, $N(\alpha\xi)=|\alpha|N(\xi)$

但シαハ実数

(3) $|\xi_1|<|\xi_2|$ ノトキ $N(\xi_1)<N(\xi_2)$, $N(\xi)=N(|\xi|)$

(4) $\xi_n\downarrow 0$ ノトキ $N(\xi_n)\downarrow 0$ 但シ $\mathfrak{S}$ ハ可附番要素カラナルモノトス。

(5) $0\leqq\xi_1\leqq\xi_2\leqq\cdots\cdots$, $\{N(\xi_n)\}$ ガ (o)－有界ノトキ $\{\xi_n\}$ ノ l. u. b. ガ存在スル。

(証) 略

定理2.3. Xガ regular ノトキ $V^p(X)$ モマタ regular デアル。

(証) Xガ regular ノトキ前定理ノ(4)ノ附帯條件ハ不要トナル。紙数誌223号/02/定理4カラ.

定理2.4. $V^p(X)$ニ於テ $|\xi_1| \wedge |\xi_2| = 0$ ノトキ

$$N(\xi_1+\xi_2) = \{N(\xi_1)^p + N(\xi_2)^p\}^{\frac{1}{p}}$$

(証) 略

定義2.3. 定義2.1デSノ代リニEヲ云ヘタトキ abstract norm ヲ $N_E(\xi)$デ表ス.

定理2.5 $V^p(X)$ニ於テ $E = \sum E_i$, $E_i + E_j$ ノトキ $N_E(\xi) = \{\sum N_{E_i}(\xi)^p\}^{\frac{1}{p}}$

又 $N(\xi) = l.u.b._{\Delta} \left\{ \sum_{E \in \Delta} N_E(\xi)^p \right\}^{\frac{1}{p}}$

Xガ特ニ regular ノトキ $N_E(\xi) > 0$ トナル $\mathcal{O}_S$ ノ要素ハ高々可附番トナリ $N(\xi) = \{\sum_{E \in \mathcal{O}_S} N_E(\xi)^p\}^{\frac{1}{p}}$ ガ成立スル.

(証) 略

定義2.4. $\xi(E)$ガ(o)－全連續トハ $\sum_{E \in \Delta_n} \beta(E) \to 0$ ノトキ $\sum_{E \in \Delta_n} |\xi(E)| \to 0\ (o)$ ガ成立スルコト, 相對(o)－全連續トハ正要素eガ存在シテεニ對シδガ存在シ $\sum_{E \in \Delta} \beta(E) < \delta$ ノトキ $\sum_{E \in \Delta} |\rho(E)| < \varepsilon e$ トナルコトデアル. (Xガ regular ノトキニツノ概念ハ一致スル)

定理2.6. $\xi \in V^p(X)$ ノトキ $\xi(E)$ハ完全加法的, 相對(o)－全連續デアル.

定理2.7. $\xi \in V^p(X)$ ノトキ $\xi(E)$ハ例1又ハ例2ノ如キ集合族上ノ(p)－可積分函数ニ拡大サレ而モ abstract norm ヲ変ヘナイ.

Xニ単位ガ存在スルカ又ハカントルベクトル束ノ直和ト考ヘ積ノ定義ガ可能ナ要素ニナサレテイルトキ $\int_S \frac{|\xi(dE)|^p}{\beta(dE)^{p-1}}$ ヲ定義スルコトガ出来ル．コレニツイテハ同様ナ定理ヲ並ベルコトハ煩テハシイカラ省略スルコトニシタイ．

§3. 点函数トノ関係

定義3.1. $\xi(E)$ ニ對シ $\xi_\Delta(E) = \sum_{E' \in \Delta} \frac{\xi(E')}{\beta(E')} \beta(EE')$

ト定メル。

定理3.1. 正数 ε ニ対シ正数 $k(p, E)$ ガ定マリ $\xi \in V^p(\alpha)$ ニ對シテ

$$N(\xi - \xi_\Delta) \leqq \{k(p, E)(N(\xi)^p - N(\xi_\Delta)^p) + \varepsilon N(\xi)^p\}^{\frac{1}{p}}$$

(証) Bochner ノ方法デ[1]

定理3.2. X ガ regular ノトキ $N(\xi_{\Delta_n}) \to N(\xi)$ (Δ) ナル Δ_n ガ存在シコレニ對シ $N(\xi - \xi_{\Delta_n}) \to 0$ (0)

(証) 前定理カラ

定義3.2. 例1又ハ例2ノ集合族 $\mathfrak{M}$ ヲ考ヘル．点函数 $x(s)$ ガ (p)-可積分トハ之ニ殆ド到ル処 (0)-収斂スル単函数列 $\{t_n(s)\}$（有限測度ノ集合上デノミ0ト異ル値ヲトル）ガ存在シ $m, n \to 0$ ノトキ $\{\int_S |t_n - t_m|^p d\beta \to 0$ (0) ガ成立スルコト．

コノトキ $\left\{\int_S |t_n|^p d\beta\right\}^{\frac{1}{p}}$ ノ極限ヲ $\left\{\int_S |x(s)|^p d\beta\right\}^{\frac{1}{p}}$ デ表ス．

---

(1) Annals of Math 40 (1939) 779

オスル点函数ノ積分ニツイテハ茲ヲ詳シク述ベナイ。

定理3.3. Xガ Bochner ノ條件ヲ満足スルベクトル束トスレバ $\xi \in V^p(X)$ ニハ (p)-可積分ナ $x(s)$ ガ存在シ,

$\xi(\ ) = \int_E x(s)\, d\beta$, $N(\xi) = \left\{ \int_S |x|s\, x^p\, d\beta \right\}^{\frac{1}{p}}$ ガ成立スル.

§4. H_β^0 作用素ノ表現.

定義4.1. $\xi \in V^p(x)$, $\varphi \in V^{p'}$ ナル任意ノ ξ, φ ニ對シ $J_\Delta = \sum \frac{\varphi(E)\,\xi(E)}{\beta(E)}$ ト置キ $N(\varphi_\Delta, \ ) \to N(\varphi)$ ナル Δ_n ヲトルト J_{Δ_n} ガ (0)-收斂スル. コノ極限ヲ

$\int_S \frac{\varphi(dE)\,\xi(dE)}{\beta(dE)}$ デ表ス.

定理4.1.(2) $V^{p'}$ カラ X ヘノ線型作用素 $U\varphi$, $\varphi \in V^{p'}$ ガ H_β^0 作用素 (norm ヲ有界ナ集合ヲ (0)-有界集合ニカヘル) ナルタメノ條件ハ $\xi \in V^p(x)$ ガ存在シ,

$U\varphi = \int_S \frac{\varphi(dE)\,\xi(dE)}{\beta(dE)}$ トナルコト. U ノ abstract norm $N(\xi)$ トナル。

定義4.2. $L^{p'}_{(\beta)}(S)$ デ (p')-可積分実数値函数ノ全体ヲ表ス.

定理4.2. $L^{p'}_{(\beta)}(S)$ ヨリ Bochner ノ條件ヲ満足スルベクトル束 X ヘノ線型作用素 U ガ H_β^0 作用素ナルタメノ條

---

(2) Kantorovitch (前掲) 273

件ハ (p)-可積分函数 $x(s)$ ガ存在シテ $Ug=\int_S g(s)x(s)\,d\beta$, $g\in L^{p'}_{(\beta)}(S)$、トナルコトデアル。コノトキ U ノ abstract norm ハ $\left\{\int_S |x(s)|^p d\beta\right\}^{\frac{1}{p}}$ デ與ヘラレル。

定理4.3. $L^{p'}_{(\beta)}(S)$ ヨリ $L^r(T)$, $1\leqq r\leqq\infty$ ($r=\infty$ ノトキハ有界可測函数ノ全体) ヘノ線型作用素 Ug ノ $g\in L^{p'}_{(\beta)}(S)$ ガ H^0_β 作用素ナルタメノ條件ハ可測函数 $K(s,t)$ ガ存在シ $Ug(t)=\int_S K(s,t)g(s)d\beta$ トナリ

$$1\leqq r<\infty \text{ ノトキ } \left\{\int_T\left\{\int_S |K(s,t)|^p d\beta\right\}^{\frac{r}{p}} d\gamma\right\}^{\frac{1}{r}}<+\infty$$

$$r=\infty \text{ ノトキ } \operatorname{ess.}\underset{t}{\text{l.u.b.}}\left\{\int_S |K(s,t)|^p d\beta\right\}^{\frac{1}{p}}<+\infty$$

U ノ abstract norm ハ $\left\{\int_S |K(s,t)|^p d\beta\right\}^{\frac{1}{p}}$ デ與ヘラレル。

(注意) コレハ Kantorovitch - Vulich ノ方法[1] デ証明シタ方ガ簡単デアル。

定義4.3. X ヲ regular トスル。$\xi\in V^p(x)$, $\eta\in V^{p'}(x)$ ノトキ $N(\xi)N(\eta)$ ガ存在スルトキ定義4.1ト同様ニシテ

$$\int_S \frac{\xi(dE)\,\eta(dE)}{\beta(dE)}$$

ガ定義サレル。(コレヲ点函数デ表ハスコトニツイテハ茲デ述ベナイ)

§5. 直交函数ニヨル展開

---

(1) compositio Math 5 (1937) 119–165

$\xi \in V^2(x)$, $\eta \in V^2$ トシタトキ $(\xi, \varphi) = \int_S \frac{\varphi(dE)\,\xi(dE)}{\beta(dE)}$

ト定メル。

定理5.1. $\{\varphi_n\}$ ヲ V^2 ノ正規直交系トスル。$\xi \in V^2(x)$ ニ對シ

$$N(\xi) \geqq \left\{ \sum (\xi, \varphi_n)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$\{\varphi_n\}$ が完全正規直交系ノトキハ等号が成立スル。

定理5.2. $\{\varphi_\alpha\}$ ヲ V^2 ノ完全正規直交系トスル。X が *regular* ノトキ $\xi \in V^2(x)$ ニ対シ $(\xi, \varphi_\alpha) \neq 0$ ナル φ_α ハ高々可附番 $N(\xi) = \left\{ \sum (\xi, \varphi_\alpha)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$ が成立スル。且

$$(\xi, \varphi) = \sum (\varphi, \varphi_\alpha)(\xi, \varphi_\alpha)$$

定理5.3 V^2 ヨリ抽象 L_2 空間ヘノ線型作用素 U が H^0 型作用素ナルタメノ條件ハ U が *finite norm* ノ作用素ナルコト。

(証) 定理 4.1 ヲ使ッテ

定理5.4. $\xi, \eta \in V^2(x)$, $N(\xi)^2$, $N(\eta)^2$ が存在スルトキ $\{\varphi_n\}$ が V^2 ノ完全正規直交系ナラバ

$$\int_S \frac{\xi(dE)\,\eta(dE)}{\beta(dE)} = \sum (\xi, \varphi_n)(\eta, \varphi_n)$$

§6. $V^p(x)$, $p = 1$ ノ場合

定義. $\sum_{E \in \Delta} |\xi(E)|$ が (o)-有界ノトキ $\xi \in V(x)$, $\sum_{E \in \Delta} |\xi(E)|$ ノ $l.u.b$ ヲ $N(\xi)$ デ表ス。

コノトキ §2 ノ定理 2.1, 2.3 が成立スル。尚完全加法

的ナ $\xi \in V(X)$ ノ全体ヲ $V(X)'$ トスレバ $V(X)'$ ニツイテモ定理 2.1, 2.2, 2.3 ガ成立スル. 従ッテ X ガ regular ノトキハ $V(X)'$ ハ $V(X)$ ノ直和部分（正規イデヤル）トナル. 次ニ測度函数 $\beta(E)$ ヲ考ヘルトキ $\beta(E)$ ニ関シテ (0)-全連續ナモノノ全体ヲ $AC(X)$ トスレバ X ガ regular ノトキ $V(X)$ ノ直和部分トナル. 点函数トノ関係ニツイテハ X ガ Bochner 條件ヲ満足スルトキニハ $AC(X)$ ノ函数ガ不定積分デ表サレルコトニナル.