1052. *Weil* ノ *mass* ノアル *Abel* 群ニツイテ

河田　敬義 (東京文理大)

Gelfand, Raikov, Krein 等ハ *im Kleinen bikompakt* ナ *Abel* 群, 或ハヨリ一般ニ廣義ノ *Haar-mass* (小平[1]參照) ヲモツタ *topologische Abelsche Gruppe* ニ對シテ, *norm* 環ト關聯セシメテ *Charakter* ノ理論ヲ發展サセ, ソレヲ用ヒテ *Positiv definit* ナ函數ノ *Bochner* ノ理論ノ擴張, *Plancherel* ノ定理

ノ擴張ヲ証明シ, Pontrjagin ノ Dualitätssatz ヲ Struktursatz ヲ用ヒズニ証明シテヰル。

此処デハ先ヅ之等ノ議論ガ Haar-Mass ノ代リニ Weil-Mass (小平〔1〕; §1 参照) デスベテ成立スルコトヲ注意スル。ソレヲ用ヒレバ, Weil-Mass ヲ Haar-Mass ニスル様ナ Topologie ノ定義ガ Charakter ト密接ニ関聯スル。ソシテ Pontrjagin ノ Dualitätssatz ト Banach 空間ノ Regularitätsrelation トガ, 形式上同一ノ容貌ヲ呈スル。(§4)

又 Bochner ノ Positiv definit ナ函数ノ表現ノ理論ノ拡張ハ当然ナガラ Stone ノ定理ノ拡張ヲ許シ、ソレカラ平均エルゴード定理ガ、Weil ノ Mass ノアル Abel 群ヲ Parameter トスル messbar ナ流レニ對シテモ成立スル。(§5) コレハ又 $\mathfrak{G}$ ノ上ノ messbar ナ fastperiodische Funktion ノ平均値ヲ $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{m(E)}\int_{E_n} f(x)\,m(dx) = Mf$ トシテ表スコトト関聯スル。(§5)

脚註

I. Gelfand and D. Raikov, C.R.URSS, 28 (1940), NO.3

D. Raikov 〔1〕, 仝 28 (1940), NO.4

M. Krein, 仝 30 (1941), No.6

D. Raikov, 〔2〕, 仝 30 (1941), No.7

小平邦彦〔1〕, 數物記事 23 (1941), NO.2

仝 人〔2〕, 學士院記事 17 (1941), NO.2

J.v. Neumann, Trans. A.M.S. 36 (1934), §5

§ 1

$\mathfrak{G}$ ヲ Abel 群, $x, y, \cdots\cdots$ デ其ノ元ヲ表ハス。

$\boxed{\text{定義1}}$ $\mathfrak{G}$ ノ上デ定義サレタ reguläres äusseres Mass m^* ガ Weil ノ Mass デアルトハ

(i) $m^*(E+a) = m^*(E)$,

(ii) $f(x)$ ガ m^*-messbar ナラバ, $f(x-y)$ ハ $\mathfrak{G} \times \mathfrak{G}$ 上ノ Produkt-äusseresmass $m^* \times m^*$ ニ関シテ messbar

(iii) $\mathfrak{G} = \sum_i^\infty E_n$, $m^*(E_n) < \infty$ トアラハサレル。

(iii) ノ代リニ

(iii') $A = \vee_n A_n$, $B = \vee_n B_n$, $m^*(A_n) < \infty$, $m^*(B_n) < \infty$ ナラバ,

$A - B = \vee_n C_n$, $m^*(C_n) < \infty$ トアラハサレル。

ガ満足サレルトキニ広義ノ Weil ノ Mass トイフ。

(注意 (iii') カラ $-A$, $A+B$ モ同様ナ性質ヲモツコトガワカル。

$\boxed{\text{定義2}}$ $\mathfrak{G}$ ガ im Kleinen bikompakt ナル時 $\Gamma(\mathfrak{G})$ ヲ $(x; \varphi(x) \neq 0)$ ガ total beschränkt トナルヤウナ連續函数 $f(x)$ ノ全体; $\mathfrak{B}(\mathfrak{G})$ ヲ $(x; \varphi(x) > 0)$, $\varphi \in \Gamma(\mathfrak{G})$ ヲ含ム最小ノ Borelmengenkörper トス。$\mathfrak{B}(\mathfrak{G})$ ニ属スル集合ヲ Borel 集合ト呼ブ。

$\boxed{\text{定義3}}$ $\mathfrak{G}$ ガ im Kleinen bikompakt ナル

時、ソノ上ノ reguläres äusseres Mass m^* ガ Haar ノ Mass デアルトハ定義イノ(i)ノ他ニ

(iv) Borel 集合ハ m^*-messbar, B ガ total beschränkt ナラ $m^*(E) < \infty$.

(v) 任意ノEニ對シテ, $B \supset E$, $m^*(E) = m^*(B)$ ナル $B \in \mathfrak{B}(\mathfrak{G})$ ガ存在スル。

H. Cartan ニヨリ Haar ノ Mass ハ常數倍丈ノ違デ一意ニ定マル。

$\boxed{\text{定理 1}}$ Haar ノ Mass ハ廣義ノ Weil ノ Mass デアル。

(證) (iii)' 丈驗べル。$m^*(A) < \infty$, $m^*(B) < \infty$ ナラバ m^* ノ定義ヨリ $A = \bigvee A_n$, $B = \bigvee B_n$, A_n, B_n ハ total beschränkt ニナルヤウニエラベル。一方 $A_n - B_m$ ハ total beschränkt; 從ッテ $A - B = \bigvee A_n - B_m$, $m^*(A_n - B_m) < \infty$ トナリ (iii)' ヲ滿足スル。

$\boxed{\text{定義 4}}$ μ^* ヲ Ω ノ上デ定義サレタ Caratheodory ノ reguläres äusseres Mass トスル。$\mathfrak{G}$ ヲ広義ノ Weil ノ Mass トスルトキ, $\{T_x\}$, $x \in \mathfrak{G}$ ガ $\mathfrak{G}$ ヲ Parameter トスル messbar ナ流レデアルトハ

(i) T_x ハ Ω ノ上ノ 1:1 ノ變換デ, $\mu^*(E) = \mu^*(T_x E)$

(ii) $T_x \cdot T_y = T_{x+y}$, $T_0 = I$

(iii) $f(\omega)$ ガ μ^*-messbar ナラバ, $f(T_x \omega)$ ハ $\mathfrak{G} \times \Omega$ ノ上ノ函數トシテ $m^* \times \mu^*$-messbar デアル。

定義1ニ於テハ $T_x y = y - x$ ハ $\mathcal{G}$ ヲ Parameter トスル $\mathcal{G}$ ノ上ノ messbar ナ流レデアル。

$\boxed{\text{定義5}}$ Ω ノ上ノ $\int |f(\omega)|^i \mu(d\omega) < \infty$ ナル f ノ全体ヲ $\mathcal{L}_i(\Omega)$ $(i = 1, 2)$ トカク。

$\boxed{\text{定義6}}$ $\mathcal{G}$ 上デ定義サレタアル Banach 空間ノ値ヲトル函数 $F(x)$ ガ Bochner-messbar トハ，任意ノ $m(E) < \infty$ ナル $E \subset \mathcal{G}$ ノ上デ，殆ンド到ル処単函数（simple function，＝有限箇値函数 endlichwertige Funktion）ノ極限トシテ表ハサレルコトヲイフ。

$\boxed{\text{定理2}}$ $f \in \mathcal{L}_i(\Omega)$ $(i = 1, 2)$ ニ対シテ，$\{T_x\}$ ガ $\mathcal{G}$ ヲ Parameter トスル messbar ナ流レナラバ，$F_f(x) = f(T_x \omega)$ ハ $\mathcal{G}$ ノ上デ Bochner-messbar デアル。

（証）(i) $f(\omega) = C_E(\omega)$, E: μ-messbar, $\mu(E) < \infty$ ノ場合。

今 $\mathcal{G} \supset A$, $m(A) < \infty$, $E^0 = \{(x, \omega);\ T_x^{-1}\omega \in E, x \in A\}$ トスレバ，E^0 ハ $m^* \times \mu^*$-messbar トナル。故ニ適当ナ $E_n = \bigvee_1^{r_n} A_i^{(n)} \times B_i^{(n)}$, $A_i^{(n)} \subset A$, $m(A_i^{(n)}) < \infty$, $\mu(B_i^{(n)}) < \infty$ ヲトリ，$m \times \mu(E^0 \sim E_n) \to 0$ ナラシメルコトガ出来ル。コヽニ $A \sim B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$ トス。即チ $F_n(x) = \sum_1^{r_n} C_{A_i^{(n)}}(x) \cdot C_{B_i^{(n)}}(\omega)$ ハ A ノ上ノ単函数デ，A 上殆ンド致ルトコロ $\| F_f(x) - F_n(x) \| \to 0$ トナル。即チ $F_{C_E}(x)$ ハ Bochner-messbar デアル。

(ii) $f(\omega)$ ガ単函数ノ場合

(iii) 一般ノ $f \in \mathfrak{L}_i(\Omega)$ ニ對シテ $\|f_n\| < \infty$, $\|f(\omega) - f_n(\omega)\| \to 0$ ($n \to \infty$) ナル單函數ノ列ヲトルコトが出來ル。T_x ハ Mass ヲカヘナイカラ, $\|F_f(x) - F_{f_n}(x)\| = \|f - f_n\| \to 0$, 即チ F_f ハ Bochner-messbar デアル。

$\boxed{\text{系 1}}$ $\mathfrak{G}$ が Weil ノ Mass, 即チ $\mathfrak{G} = \sum_1^{\infty} A_n$, $m(A_n) < \infty$ ナル時, $[T_x f ; x \in \mathfrak{G}]$ ハ $\mathfrak{L}_i(\mathfrak{G})$ 中 separabel デアル。

$\boxed{\text{系 2}}$ L ヲ $\mathfrak{L}_i(\mathfrak{G})$ 上ノ lineare Funktional トスレバ $L(F_f(x))$ ハ x ノ messbar ナ函數デアル。特ニ $\|F_f(x)\|$ ハ messbar.

$\boxed{\text{定義 1}}$ $\chi(y)$ が $\mathfrak{G}$ ノ messbar ナ Charakter デアルトハ, $|\chi(y)| = 1$, $\chi(y+z) = \chi(y) \cdot \chi(z)$ ヲ滿足スル messbar ナ函數ヲイフ。χ ノ全体ヲ X トス。

$\boxed{\text{定義 2}}$ $\mathfrak{G}$ 上ノ messbar ナ函數 $\varphi(x)$ が positiv definit トハ.

(i) $\text{wes.}\max |\varphi(x)| < \infty$

(ii) $\varphi(x) = \overline{\varphi(-x)}$,

(iii) 任意ノ $g(x) \in \mathfrak{L}_1(\mathfrak{G})$ ニ對シテ

$$\iint \varphi(x-y)\, g(x)\, \overline{g(y)}\, m(dx)\, m(dy) \geqq 0$$

ナルコトヲイフ。

§ 2

$\mathfrak{G}$ ヲ abel 群, m ヲ廣義ノ Weil ノ Mass, $m(x) = 0$,

$m(\mathfrak{g})=\infty$ トス。

$\mathfrak{L}_1(\mathfrak{g})\ni f$ ニ對シテ

(1) $\|f\|=\int|f(x)|\,m(dx)$

(2) $\mathfrak{L}_1(\mathfrak{g})\ni f, g$ ニ對シテ

$$f\times g(x)=\int f(x-y)\,g(y)\,m(dy)$$

トスレバ, $f\times g\in\mathfrak{L}_1(\mathfrak{g})$ デ

(3) $\|f\times g\|\leqq\|f\|\cdot\|g\|$

トナル。何トナレバ $A=(x;\ f(x)\neq 0)$, $B=(x;\ g(x)\neq 0)$, $C=A+B$ トスレバ, 夫々 Mass 有限ナ集合ノ可算箇ノ和トシテアラハサレルカラ, $C\times B$ デ $f(x-y)\,g(y)$ ニ對シテ Fubini ノ定理ヲ適用スレバヨイ。

$\mathfrak{R}=(z;\ z=\lambda e+f,\ f\in\mathfrak{L}_1(\mathfrak{g})$ トシ

(4) $\|z\|=|\lambda|+\|f\|$

(5) $(\lambda_1 e+f_1)\times(\lambda_2 e+f_2)=\lambda_1\lambda_2 e+(\lambda_2 f_1+\lambda_1 f_2+f_1\times f_2)$

ニヨリ, e ヲ單位元トスル norm 環ヲ作ル。

$\boxed{\text{定理3}}$ X ヲ χ ニ對シテ

(6) $\varphi_z(\chi)=\lambda+\int f(y)\,\overline{\chi(y)}\,m(dy)$ ハ $\mathfrak{R}$ ノ Ring homomorphismus ヲ與ヘル。$M_\chi=(z;\ \varphi_z(\chi)=0)$ ハ $\mathfrak{R}$ ノ Maximales Ideal トナル。又 $M_0=(z;\ z=\lambda e)$ モ $\mathfrak{R}$ ノ Maximales Ideal ヲナス。

$\boxed{\text{定理4}}$ $\mathfrak{R}$ ノ $M\neq M_0$ ナル Maximales Ideal ニ對シテ $\mathfrak{R}\to\mathfrak{R}/M$ デ z ニ對應スル値ヲ (z, M) トスレバ, $(f, M)\neq 0$ $(f\in\mathfrak{L}_1(\mathfrak{g}))$ ナル任意ノ f ニ對シテ

(η) $\chi(y)=\dfrac{(F_f(y),M)}{(f,M)}$, $F_f(y)=f(x+y)$

ハ G ノ messbar ナ Charakter トナル。且ツ f ノトリ方ニ無関係デアル。

シカモ $M\neq M_0$ ニ對シテ, $M=M_x$ ナル x ハ一義ニキマル。(ζ), (η) ハ $M\neq M_0$ ト χ トノ間ノ互ヒニ逆ナ對應トナル。

(注意) (η) ノ $\chi(y)$ が y ニツイテ messbar ナルコトニ定理2, 系2ヲ用フ。

R ノ Maximales Ideal 全体ヲ $\mathfrak{M}$ トスル。$\mathfrak{M}$ ハ bikompakt デ, $(\mathfrak{z},M)$ ハ $\mathfrak{M}$ 上ノ連續函數デアル。特ニ $(f,M_x)=\varphi_f(\chi)$, $(f,M_0)=0$; 故ニ $\varphi_f(x)$ ハ M_0 デ 0 トナル $\mathfrak{M}$ 上ノ連續函數ト見做スコトが出来ル。

X ヲ $\mathfrak{M}-M_0$ ト identifizieren スレバ $(\chi\leftrightarrow M_x)$ X ハ im Kleinen bikompakt, M_0 ニ對シテ無限遠点 χ_∞ ヲ考ヘレバ $\chi\to\chi_\infty$ デ $\varphi_f(x)\to 0$ トナル。且ツ X ノ Topologie ハ $f_i\in\mathfrak{L}_1(G)$ ニヨリ

(δ) $U(\chi_0;f_1,\cdots\cdots,f_n,\varepsilon)$

$$=\left(\chi;\left|\int f_i(y)\overline{\chi(y)}\,m(dy)-\int f_i(y)\overline{\chi_0(y)}\,m(dy)\right|<\varepsilon,\ i=1,\cdots\cdots,n\right)$$

ヲ Umgebungssystem トシテ決定サレル。

$\mathfrak{z}=\lambda e+f(x)$ ニ對シテ $\mathfrak{z}^*=\overline{\lambda}e+f^*$, $f^*(x)=\overline{f(-x)}$ トスルト

(9) $\varphi_{\mathfrak{z}}(X) = \overline{\varphi_{\mathfrak{z}^*}(X)}$

ヲ満足スル。従ッテ $\{\varphi_f(X);\ f \in \mathcal{L}_1(\mathfrak{G})\}$ ニヨッテ $g(X) \to 0$ ($X \to X_\infty$) ナル $\mathfrak{X}$ 上ノ連續函數 $g(X)$ ヲ一様ニ近似スルコトが出来ル。

$\boxed{\text{定理5}}$ $X(y)$ ハ y ヲトメレバ $\mathfrak{X}$ 上ノ連續函數デアル。

(証) $\mathfrak{X} \supset \Xi$ ヲ total beschränkte offene Menge トスレバ，近似定理カラ $\varphi_f(X) > \frac{1}{2}$，$X \in \Xi$ ナル $f \in \mathcal{L}_1(\mathfrak{G})$ がアル。故ニ $X(y) = \varphi_f(X)^{-1} \cdot \varphi_{F_f(y)}(X)$ ハ $X \in \Xi$ デ stetig デアル。——

$\boxed{\text{定理6}}$ $\mathfrak{G}$ が im Kleinen bikompakt, m が Haar ノ測度デアルトキハ，$X(y)$ ハ $\mathfrak{G} \times \mathfrak{X}$ 上デ連續，且ツ (8) ノ Topologie ハ $\mathfrak{G} \supset A$: bikompakte Menge デ

(9) $U(X_0; A, \varepsilon) = (X;\ |X(y) - X_0(y)| < \varepsilon,\ y \in A)$

デ與ヘラレル Umgebungssystem äquivalent デアル。

(証) (8) が (9) ヨリ弱イコトハ容易デアルが，逆ノ方ハ定理5ノ証明デワカル様ニ $X(y)$ が $\mathfrak{G} \times \mathfrak{X}$ デ stetig ナルコトカラ導クコトが出来ル。

今度ハ m ヲ $\mathfrak{G}$ ノ Weil ノ Mass トスル。$\mathfrak{M}$ ノ上ノ連續函数全体ノ作ル C－空間ヲ $C(\mathfrak{M})$ トスル。$\mathfrak{R} \ni \mathfrak{z}$ カラ $(\mathfrak{z}, M)$，$M \in \mathfrak{M}$ ヲ作レバ $C(\mathfrak{M})$ ニ属ス。$(\mathfrak{z}, M)$ ハ $C(\mathfrak{M})$ 中 dicht デアッタ。

$\boxed{\text{定理7}}$ $\varphi(x)$ ヲ $\mathfrak{G}$ 上ノ positiv definit ナ函数トスル。且ツ wes. $\max|\varphi|=1$ トス。

$$(10)\quad \mathrm{L}(\mathfrak{z})=\lambda+\int\varphi(x)f(x)\,m(dx)$$

ハ $C(\mathfrak{M})$ 全体ニ拡大サレテ（一義ニ），ソコデ positiv linear デアル：

1) $\mathrm{L}(\psi(M))\geqq 0$ für $\psi(M)\geqq 0,\ \psi(M)\in C(\mathfrak{M})$

2) $|\mathrm{L}(\psi(M))|\leqq\|\mathrm{L}\|\cdot\max|\psi(M)|,\ \|\mathrm{L}\|=1$

3) $\mathrm{L}(\mathfrak{z}^*)=\overline{\mathrm{L}(\mathfrak{z})}$.

（証） Raikov, [1] 参照． 其処デ total beschränkte offene Menge U ヲ用ヒテオルトコロデハ $U=U(0;\,f_1\cdots\cdots f_n,\varepsilon)=(y;\ \|F_{f_i}(y)-F_{f_i}(0)\|<\varepsilon,\ i=1,\cdots\cdots,n)$ ヲ用ヒレバ，$\infty>m(U)>0$ デ，且ツ求ムル役ニ間ニ合フ。

（小平：105頁参照）之レニハ定理2，系1ヲ用ヒル。ソレニハ m ガ (iii)$'$ デナク (iii) デアルコトガ必要ノ様デアル。——

$\boxed{\text{定理8}}$ m ヲ $\mathfrak{G}$ ノ Weil ノ Mass トスル。$\varphi(x)$ ガ positiv definit ナラバ，適当ナ $\mathfrak{L}(X)$ 上ノ Lebesgue-Mass μ_φ ニヨリ

$$(11)\quad \varphi(x)=\int_X\chi(x)\,\mu_\varphi(d\chi)$$

ガ $\mathfrak{G}$ 上殆ンド到ル処成立スル。且ツカヽル μ_φ ハ只一通リシカナイ。$\chi(y)$ ハ $\mathfrak{L}(X)$-messbar トハ限ラナイガ，μ ヨリ作ッタ X 上ノ äusseres Mass μ^* ニ對シテ μ^*-messbar デアル。

(証) $\mathfrak{m}$ ガ separabel im Kleinen kompakt ナ $\mathfrak{G}$ ノ Haar-Mass デナイトキハ注意ヲ要スル。コヽデ可算ニ証明シヨウ。$\Gamma(\mathfrak{X}) \ni \psi(x)$ ニ対シテ定理7ノ $L(\psi)$ ガ positiv linear, $\|L\|=1$ カラ

(12) $L(\psi)=\int_{\mathfrak{X}} \psi(x)\mu(dx)$, $\psi \in \Gamma(\mathfrak{X})$

ナル $\mathfrak{L}(\mathfrak{X})$ ノ上ノ Lebesgue-Mass μ ガ存在シテ一義ニ定マル。コヽニ $\mu(E) \geqq 0$, $\mu(\mathfrak{X})=1$

$\boxed{\text{補題2}}$ μ カラ $\mathfrak{X}$ 上 reguläres äusseres Mass μ^* ヲ定義スルト messbar ナ Charakter $\chi(y)$ ハ $\mathfrak{G}\times\mathfrak{X}$ 上 $m^*\times\mu^*$-messbar デアル。

之レヲ用ヒルト，任意ノ $f(y)\in \mathfrak{L}_1(\mathfrak{G})$ ニ対シテ $f(y)\chi(y)$ ハ $\mathfrak{G}\times\mathfrak{X}$ ノ上デ $m^*\times\mu$-messbar デアルカラ，Fubini ノ定理ニヨッテ

$$\iint f(y)\overline{\chi(y)}\, m(dy)\mu(dx)$$

$$=\int\left(\int f(y)\overline{\chi(y)}\, m(dy)\right)\mu(dx)$$

即チ $\varphi_f(x)$ ハ μ^*-messbar デ，$\int \varphi_f(x)\mu(dx)$ ガ存在スル．次ニ一般ニ

(13) $L(\varphi_f)=\int \varphi_f(x)\mu(dx)$

ヲ証明スル。先ヅ $x \to x_\infty$ ナラバ $\varphi_f(x)\to 0$ ヨリ $\mathfrak{X} \supset \Xi$: bikompakt, $|\varphi_f(x)|<\varepsilon$ für $x \notin \Xi = \Xi$

ヲ選ブ。次ニ $\psi_{\Xi}(\chi)\in\Gamma(\chi)$ ヲ $0\leqq\psi_{\Xi}(\chi)\leqq 1$,
$\psi_{\Xi}(\chi)=1$ für $\chi\in\Xi$ ナル如ク選ブ. 一方デハ
$|\varphi_f(\chi)-\varphi_f(\chi)\cdot\psi_{\Xi}(\chi)|<\varepsilon$ カラ $|L(\varphi_f-\varphi_f\psi_{\Xi})|$
$<\|L\|\cdot\varepsilon=\varepsilon$, 他方デハ

$$\left|\int\varphi_f-\varphi_f\,\psi_{\Xi}\,\mu(d\chi)\right|\leqq\varepsilon\cdot\mu(X)=\varepsilon.$$

此処デ $\varepsilon\to 0$ トスレバ (12) カラ (13) ヲ得ル。サテ Fubini ノ定理カラ

$$\int\varphi(x)f(x)m(dx)=L(\varphi_f)$$

$$=\int\left(\int f(y)\overline{\chi(y)}\,m(dy)\right)\mu(d\chi)$$

$$=\int\left(\int\overline{\chi(y)}\,\mu(d\chi)\right)f(y)\,m(dy)$$

$f\in\mathfrak{L}_1(\mathfrak{G})$ ハ勝手デアッタ。故ニ $\mathfrak{G}$ 上殆ンド到ル処 (11) が成立スル。但シ $\mu_g(E)=\mu(-E)$ トス, 此処デ

補題ノ証明. $\Xi=(\chi;\varphi_f(\chi)\neq 0)$ トスレバ,

$\chi(y)=\left(\varphi_f(x)\right)^{-1}\varphi_{F_f(y)}(\chi)$ カラ, 定理2, 系2ニヨリ

$\chi(y)$ ハ $\mathfrak{G}\times\Xi$ 上 χ ニ對シテ連續, y ニ関シテ m^*-messbar デアル. 今 $X\supset\Xi_n$: bikompakt,

$|\varphi_f(\chi)|<\frac{1}{n}$ für $\chi\neq\Xi_n$ トシ, 上ノ如ク $\Gamma(\chi)\ni\psi_{\Xi_n}$ ヲ

選べバ, $|\varphi_{F_f(y)}(\chi)|=|\varphi_f(\chi)|$ デアルカラ

$|\varphi_{F_f(y)}(\chi)-\varphi_{F_f(y)}(\chi)\psi_{\Xi_n}(\chi)|\to 0\ (n\to\infty)$,

$\varphi_{F_f(y)}(x)\psi_{\Xi_n}(x) \in \Gamma(X)$ トナル。一方 $\varphi_{F_f(y)}(x)\cdot\psi_{\Xi_n}(x)$ ハ $\mathfrak{Y} \times X$ 上 $m^* \times \mu^*$-messbar デアルカラ，ソノ極限トシテ $\varphi_{F_f(y)}(x)$，即チ $\chi(y)$ ハ $\mathfrak{Y} \times \Xi$ 上 $m^* \times \mu^*$-messbar デアル。

$\mu(X) = 1$ ヨリ $X \supset A = \sum_1^\infty \Xi_n$, Ξ_n: bikompakt, $\mu(X - A) = 0$ ナルAが存在スル。

各 Ξ_n ニ對シテ $\mathfrak{L}_1(\mathfrak{Y}) \ni f_n$ ヲシテ

$1 \geqq \varphi_{f_n}(x) \geqq 0$，$\varphi_{f_n}(x) > \frac{1}{2}$ für $x \in \Xi_n$ ニ f_n ヲ選ブ。$\sum \alpha_n \| f_n \| < \infty$，$\alpha_n > 0$ ニ α_n ヲトッテ

$f = \sum_1^\infty \alpha_n f_n \in \mathfrak{L}_1(\mathfrak{Y})$ トスレバ，$\varphi_f(x) > 0$ für $x \in A$ トナル。ヨッテ $\chi(y)$ ハ $\mathfrak{Y} \times A$ 上，即チ $\mathfrak{Y} \times X$ 上 $m^* \times \mu^*$-messbar トナル。——

補題カラ Fubini ノ定理ニヨッテ殆ンドスベテノ y ニ對シテ $\chi(y)$ ハ μ^*-messbar デアル。一方定理5ノ証明ヨリ $\| F_f(x) - F_f(y) \| > 2 | \chi(x) - \chi(y) |$ für $\chi \in \Xi$ トナルコトカラ，$m(x; \| F_f(x) - F_f(y) \| < \varepsilon) > 0$ ニヨリ，カヽル除外ハ実際ハ存在シナイコトガ分ル。

§ 3

次ノ§ヘノ準備トシテ，X ヲ一般ニ abstrakter Raum，$\mathfrak{L}(X)$ ヲ一ツノ Borel-mengenkörper トスル。$\mathfrak{H}$ ヲ或ル Hilbert 空間トス。

$\boxed{\text{定義9}}$ $\mathfrak{L}(X)$上ノ Massoperator $\{P(E)\}$ トハ, $\mathfrak{H}_y$ ノ上ノ Projektionsoperator ノ集リデ

(i) $P(X) = I$

(ii) $\mathfrak{L}(X) \ni E_i$, $E_1 \cdot E_2 = 0$ ナラバ $P(E_1) \cdot P(E_2) = 0$, $P(E_1 + E_2) = P(E_1) + P(E_2)$

(iii) $\mathfrak{L}(X) \ni E_n$, $E_1 \subset E_2 \subset \cdots\cdots$, $\lim E_n = E_0$ ナラバ, $\lim P(E_n) = P(E_0)$

ヲ満足スルヲイフ。

任意ノ $f \in \mathfrak{H}_y$ ニ對シテ

(14) $m_f(E) = \|P(E)f\|^2$, $E \in \mathfrak{L}(X)$

ハ普通ノ Lebesgue-mass トナル。

今 $\psi(x)$ ヲ X上ノ $\mathfrak{L}(X)$-messbar ナ函數, 又ハ一般ニ m_f^*-messbar デアレバ

$$(15) \quad g = \int \psi(x)\, dP(E) f$$

ヲ次ノ様ニ定義サレル。$\Delta = (E_1, \cdots\cdots, E_n)$, $E_i \cdot E_j = 0$ $(i \neq j)$, $X = E_1 + \cdots\cdots + E_n$ ニ對シテ $Osc(\psi, E_i) = \overline{\mathrm{Fin}}_{x, y \in E_i} |\psi(x) - \psi(y)|$, $\sum Osc(\psi, E_i) \cdot \|P(E)f\|^2 < \varepsilon$ ナル Δ ガ存在スル, ヨッテ $\varepsilon \to 0$ ニ對シテ Δ ナル次々ノ Verfeinereng Δ_n ヲトレバ

$$\lim_{(\mathrm{stark})} \sum_{1}^{r_n} \psi(x_i) P(E_i^{(n)}) f = g.$$

$$\Delta_n = (E_1^{(n)}, \cdots\cdots, E_{r_n}^{(n)})$$

ガ成立スル。コノ g ヲ (15) ノ g ト定義スル。

$\boxed{\text{定理 9}}$

(i) $\left\| \int \psi(x)\, dP(E) f \right\|^2 = \int |\psi(x)|^2 d\| P(E) f \|^2$

(ii) $\left(\int \psi(x)\, dP(E) f, g \right) = \int \psi(x)\, d(P(E) f, g)$

(iii) $\int \alpha_1 \psi_1(x) + \alpha_2 \psi_2(x)\, dP(E) f$

$$= \alpha_1 \int \psi_1(x)\, dP(E) f + \alpha_2 \int \psi_2(x)\, dP(E) f$$

(iv) $|\psi_n(x)| < C$, $(n = 1, 2, \cdots\cdots)$, $\lim \psi_n(x) = \psi(x)$

ガ m_f - fast überall ナラバ

$$\lim_{stark} \int \psi_n(x)\, dP(E) f = \int \psi(x)\, dP(E) f$$

次ニ Y ノ上デ $\mathfrak{L}(Y)$ ナル Borel-mengenkörper ト，Y ノ上ノ Lebesgue-mass μ，$\mu(Y) < \infty$ トガ與ヘラレテヰルモノトスル。

$\boxed{\text{補題 2}}$ 有界ナ $\psi(x, y)$ ガ $X \times Y$ 上任意ノ $f \in \mathfrak{H}$ ニ對シテ $m_f^* \times \mu^*$- messbar ナラバ，

$\int \psi(x, y)\, dP(E) f = F(y) \in \mathfrak{H}$ ハ $\mathfrak{L}(Y)$ ニ關シテ Bochner-messbar デアル。

(證) (i) $\psi(x, y) = C_E(x, y)$，E : $m_f^* \mu^*$- messbar ナ場合.

$$E_n = \sum_1^{r_n} A_i^{(n)} \times B_i^{(n)},\ A_i^{(n)} \in \mathfrak{L}(X);\ B_i^{(n)} \in \mathfrak{L}(Y),$$

$$m_f^* \times \mu^*(E \sim E_n) \to 0$$

トスレバ

$$\int C_{E_n}(x,y)\,dP(E)f=\sum_1^{r_n} c_{B_i^{(n)}}(y)\cdot P(A_i^{(n)})\,f\ \text{ハ}$$

単函数，従ッテ

$$\left\|\int C_E(x,y)\,dP(E)f-\int C_{E_n}(x,y)\,dP(E)f\right\|^2$$

$$=\int|C_E(x,y)-C_{E_n}(x,y)|^2 d\|P(E)\|^2=m_f^*\ (x;$$

$E\sim E_n$ ヲ $(x,y))\to 0$（Y上殆ンド到ル処）．即チ

$\int C_E(x,y)\,dP(E)f$ ハ Y上 $\mathfrak{B}(Y)$ - Bochner-messbar

デアル。

(ii) $\psi(x,y)$ が単函数ノ場合

(iii) 一般ノ場合．$|\psi(x,y)-\psi_n(x,y)|<\frac{1}{n}$，$\psi_n$：単函数トスル。

$$\left\|\int\psi(x,y)\,dP(E)f-\int\psi_n\,dP(E)f\right\|^2$$

$=\int|\psi-\psi_n|\,dm_f(E)\to 0$ ヨリ $\int\psi(x,y)\,dP(E)f$ ハ

$\mathfrak{L}(Y)$ - Bochner-messbar デアル。

$\boxed{\text{定理 10}}$ $\psi(x,y)$ が有界，且ツ $m_f^*\times\mu^*$ - messbar ナラバ

$$\int\left(\int\psi(x,y)\,\mu(dy)\right)dP(E)f$$

$$=\int\left(\int\psi(x,y)\,dP(E)f\right)\mu(dy)$$

（証）右辺ガ意味ノアルコトハ補題２ト

$\| \int \psi \, dP(E) f \|^2 \leqq \overline{\text{fin}}\, \psi^2 \cdot \| f \|^2$ ヨリ．

(i) $\psi(x, y) = C_E(x, y)$，E ガ $m_f^* \times \mu^*$-messbar ナ場合．

上ノ如ク E_n ヲトル．定理中 $\psi = C_{E_n}(x, y)$ トスレバ

$$左辺 = \int \sum_1^{r_n} C_{A_i^{(n)}}(x) \cdot \mu^*(B_i^{(n)}) = \sum_1^{r_n} \mu^*(B_i^{(n)}) \cdot P(A_i^{(n)}) f$$

＝右辺デアル．$n \to \infty$ トスレバ

$$\Big\| \int \Big(\int C_E(x, y) \mu(dy) \Big) dP(E) f$$

$$- \int \Big(\int C_{E_n}(x, y) \mu(dy) \Big) dP(E) f \Big\|^2$$

$$= \int \mu^{*2}(y;\, E \sim E_n \ni (x, y))\, d\| P(E) f \|^2 \to 0,\ 及ビ$$

$$\Big\| \int \Big(\int C_E(x, y)\, dP(E) f \Big) \mu(dy)$$

$$- \int \Big(\int C_{E_n}(x, y)\, dP(E) f \Big) \mu(dy) \Big\|$$

$$\leqq \int m_f^{*\frac{1}{2}}(x;\, E \sim E_n \ni (x, y))\, \mu(dy) \longrightarrow 0\ ヨリ定$$

理ヲ得

(ii) 単函数ノ場合．

(iii) 一般ノ場合

サテ $\mathfrak{G}$ ヲ Weil, Mass m^* ヲモツ abel 群，$\{T_x\}$ ヲ (Ω, μ) ノ上ノ $\mathfrak{G}$ ヲ Parameter トスル messbar ナ流レトスル。$\mathfrak{H} = L_2(\Omega)$ トス。

$\boxed{定理 11}$ $f \in \mathfrak{H}$ ニ對シテ $U_x f = f(T_x \omega)$ トオケ

バ, $\mathfrak{G}$ ノ Charakterengruppe X ノ Borel 集合ノ全体 $\mathfrak{B}(X)$ 上ノアル Massoperator $P(E)$ ニヨッテ

$$U_y f = \int \chi(y)\, dP(E) f, \quad f \in \mathfrak{l}_y$$

トアラハサレル。

(証) Hopf, Ergodentheorie 19 頁ト全ク同様ニ定理 8 ヲ用ヒテ或ル $\mathfrak{B}(X)$ 上ノ Massoperator $P(E)$ ニヨリ

$$(16)\quad (U_y f, g) = \int \chi(y)\, d(P(E) f, g), \quad f, g \in \mathfrak{l}_y$$

ト表ハサレル。但シ f, g ニ對シテ m^*-Mass 0 ノ y-Menge ヲ除イテ。実際カヽル除外ノナイコトハ, 定理 2 系ノニヨリ Hopf, 頁ト同様 (小平 [2] 参照) 之レカラ定理 (9), (11) ニヨリ (16) ヲ得ル。

§ 4

今度ハ $\mathfrak{G}$ ヲ Weil ノ Mass m ヲモツ abel 群トシ $U_x f$, $f \in \mathfrak{L}_2(\mathfrak{G})$ ヲ $U_x f(y) = F_f(y) = f(x+y)$ トスル。コレハ $T_y x = x+y$ ヲ $\mathfrak{G}$ ヲ Parameter トスル $\mathfrak{G}$ ノ上ノ messbar ナ流レト見タノデアルカラ, 定理 11 ハ成立スル。之ヨリ

$\boxed{\text{定理12}}$ (v. Neumann). $U_x = I$ トナル x ノ全体ヲ $\mathfrak{N}$ トスレバ, $\mathfrak{N}$ ハ $\mathfrak{G}$ ノ Untergruppe デアル。$x \neq y\ (\mathfrak{N})$ ナルタメノ必要十分條件ハ $\chi(x) \neq \chi(y)$ ナ

ル messbar ナ Charakter ノ存在スルコトデアル。

サテ $\mathfrak{G}$ ノ Charakterengruppe X ハ im Kleinen bikompakte gruppe デアルカラ' Haar-Mass μ ヲモテ，従ッテ §2 ノ結果が成立スル。$y(\chi) = \chi(y)$, $y \in \mathfrak{G}$ ハ X ノ Charakter トモナルが，補題 2 ト同様ニ X ノ上ノ μ^*-messbar デアル。ヨッテ X ノ messbar ナ Charakter ノ全体ヲ $\overline{\mathfrak{G}}$ トスレバ，$\overline{\mathfrak{G}} \supset \mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ ト考ヘラレル。$\overline{\mathfrak{G}}$ ノ Topologie カラ induzieren サレル Topologie ハ

(i) $U_1(x; f_1, \cdots, f_n, \varepsilon)$ $(f_1, \cdots, f_n \in \mathcal{L}_1(\chi))$

$$= \left(y; \left| \int f_i(\chi)\, \overline{x(\chi)}\, \mu(d\chi) - \int f_i(\chi)\, \overline{y(\chi)}\, \mu(d\chi) \right| < \varepsilon,\ i = 1, 2, \cdots \right)$$

或ハ

(ii) $U_2(x; \Xi, \varepsilon)$ $(X \supset \Xi : \text{bikompakt})$

$$= \left(y;\ |y(\chi) - x(\chi)| < \varepsilon,\ \chi \in \Xi \right)$$

デ與ヘラレル。ソノ他ニ m が $\mathfrak{G}$ ノ Weil ノ mass デアルカラ Weil-小平ノ Topologie が

(iii) $U_3(x; f_1, \cdots, f_n, \varepsilon)$ $(f_1, \cdots, f_n \in \mathcal{L}_2(\mathfrak{G}))$

$$= \left(y; \int |f_i(x+z) - f_i(y+z)|^2 m(dz) < \varepsilon,\ i = 1, \cdots, n \right)$$

ガアル。

$\boxed{\text{定理13}}$ (i), (ii), (iii) ノ三ツノ $\mathfrak{G}$ ノ Umgebungssystem ハ互ニ äquivalent デアル。

(証) (i), (ii) ノ äquivalent ナルコトハ定理 6 ヨリ。

(ii) ト (iii) ノ äq. ナルコトノ証明。

今 $U_3(x;\ f_1, \cdots\cdots, f_n, \varepsilon)$ ガ與ヘラレタトスレバ, 各 f_i ニ對シテ $X \supset \Xi_i$: bikompakt デ $\|P(\Xi_i^c) f_i\|^2 < \varepsilon_1$ $(i = 1, \cdots\cdots, n)$ ナラシメ, $\Xi = \Xi_1 \dot{\cup} \cdots\cdots \cup \Xi_n$ トスル。

今 $y \in U_2(x;\ \Xi,\ \varepsilon_2)$ ヲトレバ $U_x f = \int \chi(x)\, dP(E) f$ ニヨッテ

$$\| U_x f_i - U_y f_i \|^2$$

$$\leqq \int_{\Xi} |\chi(x) - \chi(y)|^2 d\|P(E) f_i\|^2 + 2\| P(\Xi^c) f_i \|^2$$

$$\leqq \varepsilon_2^2 \| f_i \|^2 + 2\varepsilon_1$$

ヨッテ $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{3}$, $\varepsilon_2^2 = \frac{\varepsilon}{3}(\|f_1\|^2 + \cdots\cdots + \|f_n\|^2)$ トスレバ

$$U_2(x;\ \Xi, \varepsilon_2) \subset U_3(x;\ f_1, \cdots\cdots, f_n, \varepsilon)$$

トナル。

逆ニ $U_2(x;\ \Xi, \varepsilon)$ ヲ與ヘルト定理 5 ノ証明ニヨリ $f \in \mathfrak{L}_1(\mathfrak{G})$ ヲ適當ニトレバ

$$|\chi(y) - \chi(x)| \leqq \frac{1}{2} \int |f(x+z) - f(z+y)|\, m(dx), \quad \chi \in \Xi$$

ナラシメルコトガ出来ル。更ニソノ f ヲ

$$\int |f(x) - f_0(x)|\, m(dx) < \frac{1}{4}, \quad f_0 \in \mathfrak{L}_1(\mathfrak{G}) \frown \mathfrak{L}_2(\mathfrak{G}).$$

且ツ $(x;\ f_0(x) \neq 0) = E$ ガ $m(E) < \infty$ ナル様ニトレバ

$$|\chi(y)-\chi(x)| \leqq \frac{1}{4}\int |f_0(x+z)-f_0(y+z)|\, m(dz)$$

$$\leqq \frac{1}{4}\left\{\int |f_0(x+z)-f_0(y+z)|^2 m(dz)\right\}^{\frac{1}{2}} \times (2m(E))^{\frac{1}{2}},$$

$\chi \in \Xi$

ヨッテ $\varepsilon_1 \times \dfrac{(2m(E))^{\frac{1}{2}}}{4} < \varepsilon$ ニトレバ

$U_3(x; f_0, \varepsilon_1) \subset U_2(x; \Xi, \varepsilon)$ トナル. q.e.d.

[系] (v. Neumann). $\mathfrak{L}_2(\mathfrak{G})$ ガ separabel ナラバ, U_3 ノ Topologie デ $\mathfrak{G}$ ハ separabel デ $x_n \to x$ ナルタメノ必要十分條件ハ各 $\chi \in X$ ニ對シテ $\chi(x_n) \to \chi(x)$ ナルコトデアル.

Krein [1] ノ Plancherel ノ定理ヲ用ヒタ Raikov [2] ノ結果ニヨレバ, $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ ハ $\overline{\mathfrak{G}}$ 中 überall dicht. 即 Weil-小平ノ $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ ノ im Kleinen bikompakte Gruppe ヘノ Einbettung ハ定理13ニヨリ X ノ messbare Charakter ノ群 $\overline{\mathfrak{G}}$ ヘノ Einbettung ニ他ナラナイ。Weil ノ Mass ヲ Haar-Mass ニスル Topologie ガ messbare Charakter ニヨリ (i) 又ハ (ii) ノ形デアラハサレルコトハ, Banach 空間ノ regulär ナルコトト比べテ見ルト面白イ。

(i) $\mathfrak{L}$: Banach 空間: $f, g, \cdots$	(i) $\mathfrak{G}$: Gruppe: $x, y, \cdots$
(ii) Norm $\|f\|$	(ii) Weil ノ Mass $m^*(E)$
(iii) lineare Funktional L	(iii) messbar Charakter χ

(iv) konjugierter Raum $\bar{\mathfrak{L}}$.

(v) $\mathfrak{L}$ ノ konj. Raum $\bar{\bar{\mathfrak{L}}}$

(vi) schwache Topologie von $\mathfrak{L}$,

(vii) $\mathfrak{L} = \bar{\bar{\mathfrak{L}}}$ ナルタメノ條件ハ $\mathfrak{L}$ ノ単位球ガ schwache Topologie デ bikompakt

(viii) $\mathfrak{L}$ ガ separabel ナラバ $\mathfrak{L} = \bar{\bar{\mathfrak{L}}}$ ナルタメノ條件ハ $\mathfrak{L}$ ノ単位球ガ schwache kompakt ナルコト。

(iv) Charakterengruppe X

(v) X ノ char. gr. $\bar{\mathfrak{G}}$

(vi) $\mathfrak{G}$ ノ Topologie (i)(ii)

(vii) $\bar{\mathfrak{G}} = \mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ ナルタメノ條件ハ (i)(ii) ノ Topologie デ im Klein bikompakt.

(viii) $\mathfrak{L}_2(\mathfrak{G})$ ガ separabel ナラバ $\bar{\mathfrak{G}} = \mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ ナルタメノ條件ハ $\{\chi(x_n)\}$ ガ各 $\chi \in X$ デ基本列ナラバ $\chi(x_n) \to \chi(x)$ ナル $x \in \mathfrak{G}$ ノ存在スルコト。

§5

$\boxed{\text{定理 14}}$ m ヲ $\mathfrak{G}$ ノ上ノ invariant ナ Mass m トスル。今アル m-messbar ナ集合 $E_1 \subset E_2 \subset$ -----, $m(E_n) < \infty$ ヲ適当ニトレバ, 任意ノ $\mathfrak{G} \ni a$ ニ對シテ

$$(17)\quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{m(E_n)}\, m\left(E_n \sim (E_n + a)\right) = 0$$

デアッタトスル。然ラバ任意ノ $\mathfrak{G}$ ノ上ノ messbar ナ fast periodische Funktion $f(x)$ ニ對シテ

$$(18)\quad Mf=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{m(E_n)}\int_{E_n} f(x)\,m(dx)$$

トナル。

(証) Mf ノ定義ヨリ, 任意ノ ε ニ對シテ $\mathfrak{G} \ni a_i, \alpha_i>0$ ($i=1,\cdots\cdots,n$) $\sum\alpha_i=1$ ヲ適當ニトレバ

$$|Mf-\textstyle\sum_1^n\alpha_i f(x-a_i)|<\varepsilon_1,\quad x\in\mathfrak{G}$$

ナラシメルコトが出来ル。故ニ

$$\left|\frac{1}{m(E)}\int_E\sum\alpha_i f(x-a_i)\,m(dx)-Mf\right|<\varepsilon_1$$

一方 $\left|\frac{1}{m(E)}\left\{\int_E f(x)\,m(dx)-\int_E\sum\alpha_i f(x-a_i)\,m(dx)\right\}\right|$

$$=\frac{1}{m(E)}\sum_1^n\alpha_i\left|\int_{E\sim(E+a_i)} f(x)\,m(dx)\right|$$

$$\leqq Max|f(x)|\cdot\frac{1}{m(E)}\sum_1^n\alpha_i\,m(E\sim(E+a_i))$$

ヨッテ (17) ノ假定ヨリ $n\geqq n_0$ ナラバ $\frac{1}{m(E_n)}m(E_n\sim(E_n+a_i))<\varepsilon_2$ ($i=1,\cdots\cdots,n$) トスレバ, 上ノ二ツノ式ヲ合セテ

$$\left|Mf-\frac{1}{m(E_n)}\int_{E_n} f(x)\,m(dx)\right|\leqq\varepsilon_1+\varepsilon_2\,Max|f(x)|,$$

$n\geqq n_0$ トナル故。故 $\varepsilon_1=\frac{\varepsilon}{2}$, $\varepsilon_2\,Max|f(x)|\leqq\frac{\varepsilon}{2}$ トスレバ, (18) が証明サレル。

$\boxed{\text{定理 15}}$

(17) ノ假定ノモトニ, m が $\mathfrak{G}$ ノ *Weil* ノ *mass* デアレバ $f\in\mathfrak{L}_2(\mathfrak{G})$

(19) $$\lim_{(\text{stark})} \frac{1}{m(E_n)} \int_{E_n} U_x f\, m(dx) = f_0$$

$$U_x f_0 = f_0 \in \mathcal{L}_2(\mathfrak{G})$$

トル f_0 ガ存在スル。コヽニ $U_x f(y) = f(x+y)$ トス。

コレハ定義4ノ $\mathfrak{G}$ ヲ Parameter トスル messbar ナ流レ $\{T_x\}$, $f \in \mathcal{L}_2(\Omega)$, $U_x f = f(T_x \omega)$ ニ對シテモ同様。

(証) 定理10, 11トカラ

$$\frac{1}{m(E_n)} \int_{E_n} U_x f\, m(dx) = \frac{1}{m(E_n)} \int_{E_n} \int_X \chi(y)\, dP(E) f \cdot m(dy)$$

$$= \int \left(\frac{1}{m(E_n)} \int_{E_n} \chi(y)\, m(dy) \right) dP(E) f$$

トナル。$\chi(y)$ ハ $\mathfrak{G}$ ノ messbar ナ fast periodische Funktion デアルカラ, (17) ノ假定ノモトニ

$$\lim \frac{1}{m(E_n)} \int_{E_n} \chi(y) m(dy) = M\chi = \begin{cases} 1 & \chi = \chi_0 = \text{Hauptcharakter} \\ 0 & \chi \neq \chi_0 \end{cases}$$

故ニ定理9, (iv) ヨリ $\delta(x) = \begin{cases} 1 & \chi = \chi_0 \\ 0 & x \neq \chi_0 \end{cases}$ トスレバ

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{m(E_n)} \int_{E_n} U_x f\, m(dx) = \int_X \delta(\chi)\, dP(E) f$$

$$= P(0) f = f_0$$

トナル。q. e. d.

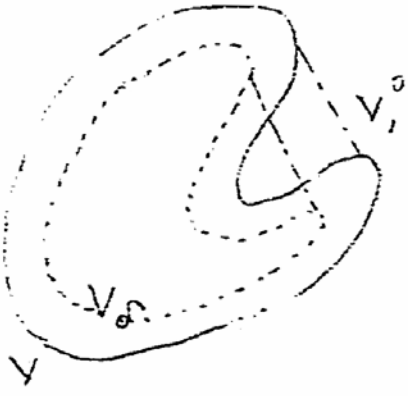
$\boxed{\text{定理16}}$ $\mathfrak{G}$ ガ im Kleinen bikompakt 且ツ zusammenhängend デ m ガソノ Haar-

Mass デアルモノトスル。

G ヲ 0 ヲ含ム任意ノ $\mathfrak{G}$ ノ total beschränkt ナ offene Menge トスレバ $E_n = G^n = (x_1 + \cdots\cdots + x_n ; x_i \in G, i = 1, \cdots\cdots, n)$ ニ對シテ (17) ガ成立スル。從ッテ (18), (19) モ $E_n = G^n$ ニ對シテ成立スル。

(證) Pontrjagin ノ Struktursatz ニヨリ $\mathfrak{G} = \mathfrak{T}_r + \mathfrak{K}$ ト r-次元ユークリッド空間ノ Translationsgruppe ト, zusammenhängend ナ bikompakte Gruppe $\mathfrak{K}$ トノ直和ニ分解サレル。ヨッテ $G \supset G_1 + G_2$, $G_1 \subset \mathfrak{T}_r$, $G_2 \subset \mathfrak{K}$ ナル 0 ヲ含ム offene Menge ノ直和集合ヲ含ム。一方 $\sum_1^\infty G_2^n = \mathfrak{K}$ カラ, $\mathfrak{K}$ ハ bikompakt ナル故, アル n_0 ニ對シテ $G_2^{n_0} = \mathfrak{K}$ トナル。

ヨッテ $n \geq n_0$ ハ mod $\mathfrak{K}$ ノ Restklasse ノ集リトナル。今 V ヲ G ノ $\mathfrak{T}_r$ ヘノ正射影トスル。十分小サイ



$\delta > 0$ ニ對シテ V_δ ヲ δ-Umgebung ガスベテ V ニ屬スヤウナ V ノ部分集合トスル。V^0 及 V^0_δ デ夫々 V 及ビ V_δ ノ convexe Hülle ヲアラハス。

$\frac{V^n}{n} = (y ; n y \in V^n)$ トスレバ, $n > n_0$ ナラバ $\frac{V^n}{n} \supset V^0_\delta$ ナルコトガ證明サレル。

何トナレバ $V^0_\delta \ni y_0 = \alpha a + \beta b$, $\alpha, \beta > 0$, $\alpha + \beta = 1$,

$\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in V_\delta$. 故ニ V ト V_δ トノ關係カラ適當ナル $n_0(\delta)$ ニ對シテ, $n > n_0(\delta)$ ナラバ $\mathfrak{x}_0 = \frac{a}{n}\mathfrak{a}_0 + \frac{b}{n}\mathfrak{b}_0$, $\mathfrak{a}_0, \mathfrak{b}_0 \in V$, a, b: 整數 $a + b = n$ トナル様ニ出來ル。

即チ $a\mathfrak{a}_0 + b\mathfrak{b}_0 \in V^n$ カラ, $V^n/n \supset V_\delta^0$ トナッタ。同様ニ $\frac{V^n}{n} \subset V^0$ モ明ラカ。

ヨッテ $\mathfrak{T}_r$, $\mathfrak{K}$ ノ Haar-Mass ヲ m_1, m_2 トスレバ, $m = m_1 \times m_2$ デアルカラ $m(G^n) = m(V^n + \mathfrak{K}) m_1(V^n)$ $(n > n_0)$ カラ

$$\overline{\lim}\left\{\frac{1}{m(G^n)} m(G^n \sim (G^n + a))\right\}$$

$$= \overline{\lim}\left\{m_1\left(\frac{V^n}{n}\right)^{-1} m_1\left(\frac{V^n}{n} \sim \left(\frac{V^n}{n} + \frac{a}{n}\right)\right)\right\}$$

$$\leq \overline{\lim}\left\{m_1(V_\delta^0)^{-1}\Big[m_1\left(V^0 \cup \left(V^0 + \frac{a}{n}\right)\right)\right.$$

$$\left. - m_1\left(V_\delta^0 \frown \left(V_\delta^0 + \frac{a}{n}\right)\right)\Big]\right\}^*$$

一方 $\lim m_1\left(V^0 \cup \left(V^0 + \frac{a}{n}\right)\right) = m_1(V^0)$ 等カラ

$^* \leqq m_1(V_\delta^0)\{m_1(V^0) - m_1(V_\delta^0)\}$ トナル。コンデ $\delta \to 0$ トスレバコノ値ハ何程デモ小サクナル。即チ (17) ガ成立スル。——

(注意) E_n ハ $E_1 \subset E_2 \subset \ldots\ldots$, $\lim E_n = \mathfrak{G}$ トイフ丈ノ條件デハ (17) ハ必ズシモ成立シナイ。カヽル反例ヲ容易ニ作ルコトが出來ル。

$\boxed{\text{定理17}}$ $\mathfrak{G}$ が im Kleinen bikompakt, m が Haar ノ Mass, $\mathfrak{G} = \sum_1^\infty A_n$, $m(A_n) < \infty$ ト

アラハサレルナラバ，適當ナ $\{E_n\}$ ヲトレバ (17) ガ成立スル。

(証) Pontrjagin-Kampen ノ Struktursatz カラ

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{T}_r + \mathfrak{H},\quad \mathfrak{H}/\mathfrak{K} \cong \mathfrak{D},\quad \mathfrak{K}: \text{bikompakt},$$
$$\mathfrak{D}: \text{diskret}$$

ト直和ニ分解サレル。$\mathfrak{T}_r$, $\mathfrak{H}$ ノ Haar-Mass ヲ夫々 m_1, m_2 トスル。

今 $E_n^{(1)} \subset \mathfrak{T}_r$, $E_n^{(2)} \subset \mathfrak{H}$ ニ對シテ (17) ガ夫々 $\mathfrak{T}_r$ 及 $\mathfrak{H}$ ノ中デ成立スレバ，

$E_n = E_n^{(1)} \times E_n^{(2)}$ トスレバ $m = m_1 \times m_2$ ヨリ (17) ガ $\mathfrak{G}$ デ成立スル。

$\mathfrak{T}_r$ ノ中デカヽル $E_n^{(1)}$ ノトレルコトハ明カデアル。次ニ $\mathfrak{H} = \sum_1^{\infty} A'_n$, $m_2(A_n) < \infty$ トアラハサレルコトヽ，Haar-Mass ノ性質カラ $\mathfrak{D}$ ハ高々可算個ノ元シカ含マナイ。

ヨッテ $E_n^{(2)}$ ヲ mod $\mathfrak{K}$ ノ Restklasse ヨリナル集合ト考ヘレバ，$\mathfrak{D}$ デ (17) ヲ成立セシムル $E_n^{(2)}$ ヲ作レバヨイ。$\mathfrak{D}$ ノ中デ Ordnung ガ有限ナ元ノ全体ヲ $\mathfrak{E}$ トスレバ，$\mathfrak{D} = \mathfrak{E} + \mathfrak{R}$，トアルスベテノ元ガ Ordnung ∞ ナル群 $\mathfrak{R}$ トノ直和トシテアラハサレル。故ニ又 $\mathfrak{E}$ + $\mathfrak{R}$ ト別々ニ考ヘレバ十分デアル。

$\mathfrak{E} = \{x_1, x_2, \text{----}\}$ トスレバ，E_n ヲ $x_1, \text{----}, x_n$ ヨリ erzeugen サレル $\mathfrak{E}$ ノ Untergruppe トスレ

バ，E_nハ endliche Gruppe ナル故 Mass ハ有限デ，コレガ(17)ヲ満足スル。

$\mathfrak{U}$ ハソノ Erzeugende ヲ $\{x_1, x_2, \cdots\cdots\}$ トスル。$\mathfrak{U}$ ノ元ハ一般ニ $a_1x_1 + \cdots\cdots + a_nx_n$（$a_i$ ハ整数）ト表ハサレル。ヨッテ

$$E_n = (a_1x_1 + \cdots\cdots + a_nx_n;\ i-n-1 \leqq a_i \leqq n+1-i,$$
$$i = 1, \cdots\cdots, n)$$

トスレバ，(17) ヲ満足スルコトガワカル。以上合セテ (17) ヲ満足スルヤウナ $E_n \subset \mathfrak{g}$ ヲモトメルコトが出来タコトニナル。q. e. d.