# 1057. Trace Ring ト Quantum Logic I

小平 邦彦(東大)

§1. $\mathbb{P}$ ヲ實數体，又ハ複素數体トスル。$\mathbb{P}$ ノ上ノ $n$ 次ノ行列環 $\mathbb{P}_n$ ヲ考ヘルト，$\mathbb{P}_n$ ニ於テハ $\mathbb{P}$ ノ上ノ algebra トシテノ代數的 operation —— スナハチ和，差，積，scalar 積 —— ノ他ニ，各元 $A=(a_{ik})$ ニ對シテ $A^*=(\bar{a}_{ki})$ ヲ對應セシムル operation $*$ ガ定義サレ，更ニ trace $A=\sum a_{ii}$ ナル numerical function ガ定義サレル．コレヲ一般化シテ次ノ定義ヲオク：

定義．$\mathbb{P}$ ヲ基礎体トスル ring $\mathbb{M}$ ガ次ノ二ツノ條件ヲ満足スルトキ $\mathbb{M}$ ヲ general trace ring トヨブ．

a) $\mathbb{M}$ ノ各元 $A$ ニ對シテソノ "adjoint" トヨバレル元 $A^*$ ガ定マリ，

$$(1.1.)\begin{cases} \text{i)} & A^{**}=A \\ \text{ii)} & (AB)^*=B^*A^* \\ \text{iii)} & (\rho A+\sigma B)^*=\bar{\rho}A^*+\bar{\sigma}B^*\text{；但シ } \rho,\sigma\in\mathbb{P} \end{cases}$$

トスル。

ガ成立スル。

b) Trace トヨバレル numerical function $T(A)$ ガ定義サレテヰテ，次ノ條件ガ成立ツ。

$$(1.2)\begin{cases} \text{i)} & T(1)=1 \qquad (1\text{ ハ } \mathbb{M}\text{ ノ單位元}) \\ \text{ii)} & T(A^*)=\overline{T(A)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{iii)} & T(A\cdot B)=T(B\cdot A) \\ \text{iv)} & T(\rho A+\sigma B)=\rho T(A)+\sigma T(B) \\ \text{v)} & A\neq 0 \text{ ナラバ } T(A^*A)>0 \\ \text{vi)} & \sup\limits_{B,C\in\mathbb{M}} \dfrac{|T(CAB)|^2}{T(B^*B)T(C^*C)}<+\infty \end{cases}$$

General trace ring $\mathbb{M}$ ハ

(1.3.) $(A,B)=T(B^*A)$

ヲ inner product トスル(必ズシモ complete デハナイ) Hilbert space ト考ヘラレル. カク考ヘタトキノ norm ヲ $\|A\|$ デ現ハシ, $\|\ \|$ デ定マル metric ヲ trace metric トヨブ。$B\in\mathbb{M}$ ニ対シテ

(1.4) $\begin{cases} B^\natural: & B^\natural A=BA \\ B^\flat: & B^\flat A=AB \end{cases}$ (A ハ $\mathbb{M}$ ノ中ヲ動ク)

ニヨッテ定義サレタ $B^\natural$, $B^\flat$ ハ, (1.2) vi) カラ明ラカナル如ク, space $\mathbb{M}$ ノ bounded operator デアル。$\mathfrak{H}=\widetilde{\mathbb{M}}$ ヲ $\mathbb{M}$ カラ "$\|\ \|$ - 完全化" ニヨッテ得ラレル (complete) Hilbert space トスレバ, $B^\natural$, $B^\flat$ ハ $\mathfrak{H}$ ノ bounded operator ニ一義的ニ擴張セラレル。コレヲ再ビ $B^\natural$, $B^\flat$ デ表ハシ, B ト $B^\natural$ ヲ同一ノモノト見做シテ $\mathbb{M}$ ヲ $\mathfrak{H}$ ノ bounded operator カラ成ル ring ト考ヘル. コノトキ

(1.5) $|||A|||=\sup\limits_{B,C}|T(CAB)|/\|B\|\,\|C\|$

トオケバ, $\|A\|$ ハ $\mathfrak{H}$ ノ linear operator トシテノ uniform topology ノ意味ノ norm ニ他ナラナイ. 又 $B \to B^*$ ハ $\mathbb{M}$ ノ anti-isomorphic ナ表現ヲ與ヘル.

定義. General trace ring $\mathbb{M}$ ハ $\mathbb{A}=(A;\ A\in\mathbb{M},\ \|A\|\leqq 1)$ ガ $\|\ \|$-complete ナルトキ complete デアルト言ヒ, complete ナ general trace ring ヲ單ニ trace ring トヨブ.

定理1. General trace ring ハ (complete ナル) trace ring ニ拡張セラレル.

証明. $\lim_{\substack{j\to\infty\\k\to\infty}} \|A_j - A_k\| = 0$, 且 $\|A_j\| \leqq C < +\infty$ ナル sequence ヲ fundamental sequence ト考ヘテ, コノスベテノ limit ヲ $\mathbb{M}$ ニ附加ヘテ得ラレル space ヲ $\overline{\mathbb{M}}$ トシ, $\overline{\mathbb{M}}$ ニ於テ和, 差, 積, $*$, trace ヲ limit トシテ定義スレバ, $\overline{\mathbb{M}}$ ハ complete ナ $\mathbb{M}$ ノ拡張トナル.

コノ理由ニ基イテ, 以下 trace ring ノミヲ考ヘル事ニスル. ——— コノ trace ring ナル概念ハ J. v. Neumann ト F. J. Murray ノ所謂 factor of finite class ヲ一般化シタモノデアルが, Neumann ノ未発表ノ結果ニヨレバ, trace ring ハ factor of finite class ノ "連續的直和" ニ分解サレルモノト思ハレル. ココデハ

i) trace ring 内ノ projection ノ全體ハ

*complete ortho complemented modular lattice* ヲ作ルコト，及ビ

ii) *trace ring* ハ *regular ring* ニ拡張セラレル。

コトヲ示シ，更ニコレニ関係シタ二三ノコトニツイテ述ベテ見タイ。

§2. 以下常ニ $\mathbb{M}$ ハ *trace ring* デアルトシ，$\mathfrak{h} = \widetilde{\mathbb{M}}$，且ツ $\mathbb{M}$ ハ $\mathfrak{h}$ ノ *bounded operator* カラ成ルモノト考ヘル．スナハチ $B \in \mathbb{M}$，$f \in \mathfrak{h}$ ニ對シテ $B \cdot f$ ハ §1 ニ述ベタ意味デ，$B$ ヲ $\mathfrak{h}$ ノ *bounded operator* ト考ヘタトキノ積ヲ現ハスモノトスル．又 $f \cdot B$ ヲ

$$(2.1) \qquad fB = B^{\Psi} f$$

ニヨッテ定義スル．明ラカニ。

$$(2.2.)\begin{cases} \text{i)} & fB,\ Bf \text{ ハ distributive デアル.} \\ \text{ii)} & f(BA) = (fB)A \\ \text{iii)} & A(Bf) = (AB)f \\ \text{iv)} & (Af)B = A(fB) \\ \text{v)} & \|Bf\| \leqq |||B|||\ \|f\| \\ \text{vi)} & \|fB\| \leqq |||B|||\ \|f\| \end{cases}$$

又 $\mathbb{M}$ ニ於ケル *operation* $A \to A^*$ ハ唯一通リニ $\mathfrak{h}$ 内ニ連續的ニ擴張セラレル．コレヲ $f \to f^*$ デ現ハスコトニスル。明ラカニ；

$$\begin{cases} \text{i)} & f^{**} = f \\ \text{ii)} & (\rho f + \sigma g)^* = \bar{\rho} f^* + \bar{\sigma} g^* \end{cases}$$

$$(2.3)\begin{cases} \text{iii)} & (f,\ g)=\overline{(g^*,\ f^*)} \\ \text{iv)} & \|f\|=\|f^*\| \\ \text{v)} & (Bf)^*=f^*B^* \\ \text{vi)} & (fB)^*=B^*f^* \end{cases}$$

ガ成立スル．従ッテ $f\to f^*$ ニヨッテ $\mathbb{M}$ ハ $\mathbb{M}^\Psi$ ニ conjugate isomorph ニ寫サレル．

*Lemma* 2.1. $\mathfrak{h}_\mathbb{f}$ ノ bounded operator $\bar{A}$ ニ對シテ，若シ

(2.4) $A_j\in\mathbb{M}$, $|||A_j|||\leqq C<+\infty$, $\lim_j A_j=\bar{A}$ *in strong topology* ナル $A_j$ ガ存在スルナラバ，$\bar{A}\in\mathbb{M}$ デアル。

証明　$\mathfrak{h}_\mathbb{f}$ ノ operator トシテ $A_j$ ガ $\bar{A}$ ニ強收斂スルノデアルカラ，$\lim_j\|A_j\cdot 1-\bar{A}\cdot 1\|=0$．故ニ $A_j\cdot 1=A_j$ ダカラ $\lim\|A_j-A_k\|=0$.

従ッテ $\mathbb{M}$ ガ complete（§1 ニ定義シタ意味デ）ナルコトカラ $\lim\|A_j-A\|=0$ ナル $A\in\mathbb{M}$ ガアル。$B\in\mathbb{M}$ ヲ任意ニトルト $\|A_jB-AB\|\leqq|||B|||\ \|A_j-A\|\to 0$. 一方 $A_j$ ガ $\bar{A}$ ニ強收斂スルコトカラ $\|A_jB-\bar{A}B\|\to 0$. 故ニ $AB=\bar{A}B$．故ニ $A=\bar{A}$.

*Lemma* 2.2. $A\in\mathbb{M}$ ノトキ $A$ ノ canonical decomposition ヲ $A=WH$（$H$ ハ self adjoint, $\geqq 0$, $W$ ハ partially isometric），$H=\int\lambda dE_H(\lambda)$

トスレバ $H \in \mathbb{M}$, $E_H(\lambda) \in \mathbb{M}$デアル。

証明 $H$, $E_H(\lambda)$ ハ, $H = \sqrt{A^*A}$ デアルカラ, 共ニ $A^*A$ ノ適當ナ *polynom* $p_j(A^*A)$ ニヨツテ (2.4) ノ意味デ近似セラレル. 故ニ前 *Lemma* ニヨツテ $\mathbb{M}$ ニ含マレルコトガ分ル。

定理 2. $f \in \mathfrak{h}$ ガ $\mathbb{M}$ ($\mathbb{M} \subseteq \mathfrak{h}$ デアル) ニ含マレルタメノ必要且充分ナ條件ハ

$$(2.5) \quad \sup_{B \in \mathbb{M}} \|fB\| / \|B\| < +\infty$$

デアル。

証明. 必要ナコトハ明白. 充分ナコトヲ次ニ示ス. $\mathfrak{h}$ ノ定義カラ $\lim_j \|f - A_j\| = 0$ ナル $A_j \in \mathbb{M}$ ガアル. $A_j$ ノ *canonical decomposition* ヲ $A_j = W_j H_j$, $H_j = \int \lambda\, dE_j(\lambda)$ トシ, $S = \sup_B \|fB\| / \|B\|$ ヲ用ヒテ $E_j = E_j(s+1)$, $F_j = 1 - E_j$ トオク。 明ラカニ

$\| F_j \| \leqq 1$, $\| f F_j \| \leqq S \| F_j \|$,

又

$$\| A_j F_j \|^2 = T(F_j A_j^* A_j F_j) = T(F_j H_j^2 F_j)$$

$$= T\left(\int_{S+1}^{\infty} \lambda^2 dE_j(\lambda)\right)$$

$$\geqq (s+1)^2 T\left(\int_{S+1}^{\infty} dE_j(\lambda)\right) = (s+1)^2 T(F_j)$$

$$= (s+1)^2 \| F_j \|^2$$

デアルカラ, $\| A_j F_j \| \geqq (s+1) \| F_j \|$デアル. 故ニ

$$\lim \|F_j\| \leqq \lim (\|A_j F_j\| - \|fF_j\|)$$
$$\leqq \lim \|(A_j - f)F_j\| \leqq \lim \|A_j - f\| \, \|\|F_j\|\| = 0$$

故ニ假定 (2.5) ニヨッテ

$$\lim \|fF_j\| = 0$$

デアル．故ニ $\|fE_j - A_j E_j\| \leqq \|\|E_j\|\| \, \|f - A_j\| \leqq \|f - A_j\|$ ダカラ

$$\lim_j \|f - A_j E_j\| \leqq \lim \|fF_j\| + \lim \|fE_j - A_j E_j\|$$
$$= 0$$

明ラカニ $A_j E_j \in \mathbb{M}$，$\|A_j E_j\| \leqq s+1$ デアル．故ニ完全性ニヨッテ $f \in \mathbb{M}$．

通常ノ用法ニ從ッテ，$\mathfrak{H}$ ノスベテノ bounded operator ノ作ル ring ニ於ケル $\mathbb{M}$，$\mathbb{M}^{\Psi}$，etc. ノ "commutator algebra" ヲ $\mathbb{M}'$，$(\mathbb{M}^{\Psi})'$，etc. デ表ハス．然ルトキハ

定理3．i) $\mathbb{M} = (\mathbb{M}^{\Psi})'$

ii) $\mathbb{M}^{\Psi} = \mathbb{M}'$

証明 i) $\mathbb{M} \subseteq (\mathbb{M}^{\Psi})'$ ハ明白デアル．$\bar{A} \in (\mathbb{M}^{\Psi})'$ トシ，$f = \bar{A} \cdot 1$ トオケバ明ラカニ

$$\|fB\| = \|B^{\Psi} f\| = \|B^{\Psi} \cdot \bar{A} \cdot 1\| = \|\bar{A} \cdot B^{\Psi} \cdot 1\|$$
$$= \|\bar{A} B\| \leqq \|\|\bar{A}\|\| \, \|B\|.$$

故ニ定理2ニヨッテ $f \in \mathbb{M}$．コレヲAト書ケバ $A = \bar{A} \cdot 1$ ヨリ，任意ノ $B \in \mathbb{M}$ ニツイテ

$$AB = B^{\Psi} \cdot A = B^{\Psi} \cdot \bar{A} \cdot 1 = \bar{A} \cdot B^{\Psi} \cdot 1 = \bar{A} \cdot B$$

故ニ $\bar{A} = A \in \mathbb{M}$ デアル。

ii) 上ノ結果カラ先ヅ $\mathbb{M}' = (\mathbb{M}^\natural)'' \supseteq \mathbb{M}^\natural$ ガ分ル. 逆ニ $A' \in \mathbb{M}'$ トシ $A' \cdot 1 = g$ トオクト

$$\|g^* B\| = \|B^* g\| = \|B^* A' 1\| = \|A' B^* 1\|$$
$$= \|A' B^*\| \leqq |||A'||| \, \|B^*\| = |||A'||| \, \|B\|$$

故ニ定理2ニヨッテ $g^* \in \mathbb{M}$. 故ニ $g \in \mathbb{M}$. コレヲ A トオク.

然ルトキハ任意ノ $B \in \mathbb{M}$ ニ對シテ

$$A'B = A'B\,I = BA'1 = Bg = BA = A^\natural B$$

故ニ $A' = A^\natural \in \mathbb{M}^\natural$ デアル。

コノ定理3ヨリ直チニ

定理4. $\mathbb{M}$, $\mathbb{M}^\natural$ ハ *weakly closed* デアル。

コトガ分ル. $\mathbb{M}$, $\mathbb{M}^\natural$ ハスナハチ *neumann* ノ言フ意味デ *ring* デアル。

## §3. $\mathbb{M}$ ニ含マレル *projection* —— コレヲ一般ニ E, F, etc. ノ文字デ現ハスコトニスル。—— ノ全体

ハ, $EF = E$ ノトキ $E \leqq F$ ト書クコトニスレバ, $\leqq$ ナル *partially order* ニ關シテ *lattice* ヲ作ル. コレヲ $\mathbb{L}_{\mathbb{M}}$ デ表ハス. $1-E$ ヲ E ノ *ortho complement* ト考ヘレバ, $\mathbb{L}_{\mathbb{M}}$ ハ *ortho complemented* デアッテ, 又明ラカニ *complete* デアル. $E \in \mathbb{M}$ ニ対シテ

(3.1) $\quad D(E) = T(E)$

トオキ, コレヲ E ノ *dimension* トヨブ. 又 $\mathfrak{H}$ ノ *closed linear subspace* $\mathfrak{M}$ ハ, ソノ *projection* $P_{\mathfrak{M}}$

ガ $\mathbb{M}$ ニ含マレルトキ $\mathbb{M}$ ニ屬スルト云ッテ $\mathfrak{M}\eta\mathbb{M}$ ト書キ，

$$(3.2)\quad D(\mathfrak{M}) = T(P_{\mathfrak{M}})$$

ニヨッテ定義サレル $D(\mathfrak{M})$ ヲ $\mathfrak{M}$ ノ *dimension* ト名付ケル。

$E, F, \cdots\cdots \in \mathbb{M}$ ノ代リニ對應スル $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}, \cdots\cdots \eta\mathbb{M}$ ヲ考ヘレバ，$L_{\mathbb{M}}$ ハ又 $\mathbb{M}$ ニ屬スル *closed linear subspace* ノ作ル *lattice* ト考ヘラレル．定義カラ明ラカナル如ク

$$(3.3)\quad D(E) = (E\cdot 1,\ 1) = \|E\|^2$$

從ッテ $D(E)$ ハ *weakly continuous* デアル。

定義．$E, F \in \mathbb{M}$ ニ對シテ $E = W^*W$, $F = WW^*$ ナル *partially isometric operator* $W \in \mathbb{M}$ ガ存在スルトキ

$$(3.4)\quad E \sim F$$

ト書ク．又 $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}\eta\mathbb{M}$ ノトキ $P_{\mathfrak{M}} \sim P_{\mathfrak{N}}$ ナラバ

$$(3.5)\quad \mathfrak{M} \sim \mathfrak{N}$$

ト書ク。

明ラカニ

$$(3.6)\quad \begin{cases} \text{i)} & E \sim E, \\ \text{ii)} & E \sim F \text{ ナラバ } F \sim E, \\ \text{iii)} & E \sim F,\ F \sim G \text{ ナラバ } E \sim G, \\ \text{iv)} & E \sim F \text{ ナラバ } D(E) = D(F) \end{cases}$$

*Lemma* 3.1. $A \in \mathbb{M}$ ナルトキハ

(3.7) $[\text{Range } A^*] = \mathfrak{h} - (f; Af = 0) \sim [\text{Range } A] = \mathfrak{h} - (f; A^*f = 0)$.

証明. Aノ canonical decomposition ヲ $A = WH$ トスレバ明ラカニ $W \in \mathbb{M}$ デ $W^*W = P_{[\text{Range } A^*]}$, $WW^* = P_{[\text{Rang } A]}$ デアル ——.

Lemma 3.2. $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ ガ $\eta\mathbb{M}$ ナル closed linear subspace ナルトキ

(3.8) $(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{N}) - \mathfrak{N} \sim \mathfrak{M} - (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N})$.

但シココデ "$\cup$", "$\cap$", "$-$" ハ $L_{\mathbb{M}}$ ノ元トシテノ和, 積 ortho complement ヲ表ハス.

証明. $(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{N}) - \mathfrak{N} = [\text{Range } (1 - P_{\mathfrak{N}}) P_{\mathfrak{M}}]$ デアルカラ, コレハ (3.7) ニヨッテ $\sim \mathfrak{h} - (f; (1 - P_{\mathfrak{N}}) P_{\mathfrak{M}} f = 0)$ トナル, 明ラカニ $\mathfrak{h} - (f; (1 - P_{\mathfrak{N}}) P_{\mathfrak{M}} f = 0)$ ハ $\mathfrak{M} - (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N})$ ニ等シイ. 故ニ (3.8) ガ成立ツ。

コノ (3.8) ト (3.6) iv) ニヨッテ

(3.9) $D(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{N}) + D(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}) = D(\mathfrak{M}) + D(\mathfrak{N})$

ガ出ル. $D(\mathfrak{M})$ ハスナハチ modular デアル. 又 (3.3) ヨリ $D(E) = 0$ ナラバ $E = 0$ デナケレバナラヌ。スナハチ $D(\mathfrak{M})$ ハ positive デアル。

故ニ $L_{\mathbb{M}}$ ハ modular デナケレバナラナイ: スナハチ

定理 5. $\mathbb{M}$ ノ projection ノ作ル lattice $L_{\mathbb{M}}$ ハ complete orthocomplemented modular lattice デアッテ, $D(E)$ ハ $L_{\mathbb{M}}$ ニ於ケル positive modular functionalデアル。

又$D(E)$ガweakly continuousナル事カラ

$$(3.10)\quad \begin{cases} D\left(\sum\nolimits^{\cup\infty}_{n=1} E_n\right)=\lim_{m\to\infty} D\left(\sum\nolimits^{\cup m}_{n=1} E_n\right), \\ D\left(\Pi_{\cap}{}^{\infty}_{n=1} E_n\right)=\lim_{m\to\infty} D\left(\Pi_{\cap}{}^{m}_{n=1} E_n\right) \end{cases}$$

ナルコトガ分ル。

## §4. Trace ring $\mathbb{M}$ノ上ノ$n$次ノ行列環$\overline{\mathbb{M}}=\mathbb{M}_n$ハ

$$(4.1)\quad \overline{T}(\bar{A})=\frac{1}{n}\sum_j T(A_{jj}),\quad (\bar{A}=(A_{ik})\in\overline{\mathbb{M}})$$

ニヨッテ trace $\overline{T}$ヲ導入スレバ trace ringトナル。$\overline{\mathbb{M}}$ハ又，$\overline{\mathfrak{H}}=n\otimes\mathfrak{H}=\underbrace{\mathfrak{H}\oplus\mathfrak{H}\oplus\cdots\cdots\oplus\mathfrak{H}}_{n}$ノ operator ringト考ヘラレル。

カク考ヘタトキ$\overline{\mathbb{M}}$ヲ$n\otimes\mathbb{M}$デ表ハス。$\overline{\mathbb{M}}$ノ"Komplettierung" $\widetilde{\overline{\mathbb{M}}}$ノ operator ringトシテノ$\mathbb{M}_n$ト$n\otimes\mathbb{M}$ハ weak, strong, 或ハ strongest topologyニ関シテ topologically ring isomorphicデアル. 又$(n\otimes\mathbb{M})'$ハ$\mathbb{M}'$ノ上ノ一次ノ行列環デ，ソレハ$\mathbb{M}'$ト weak, strong, 或ハ strongest topologyノ意味デ topologically ring isomorphicデアル。

一般ニ$\mathbb{M}$ガ Hilbert space $\mathfrak{H}$ノ operator ring ナルトキ, $\mathfrak{H}$ ノ linear subspace $\mathfrak{A}$ ハ, スベテノ $A' \in \mathbb{M}'$ ニ對シテ $A'\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{A}$ ナルトキ $\mathbb{M}$ ニ含マレルトイヒ $\mathfrak{A}\,\eta\,\mathbb{M}$ ト書ク. 又 $\mathfrak{H}$ ノ linear operator $\Lambda$ ハソノ domain ガ $\mathbb{M}$ ニ含マレ, 且ツ $f \in$ domain $\Lambda$ ニ對シテ常ニ $A'\Lambda f = \Lambda A' f$ $(A' \in \mathbb{M}')$ ガ成立スルトキ $\mathbb{M}$ ニ含マレルトイヒ, $\Lambda\,\eta\,\mathbb{M}$ デ表ハス. $\Lambda$ ニ對シテソノ "graph".

$$\overline{\mathfrak{A}}_\Lambda = (\Lambda f \otimes f;\ f \in \text{Domain } \Lambda)$$

ヲ考ヘルナラバ, $\Lambda\,\eta\,\mathbb{M}$ ナルタメノ必要且ツ充分ナル條件ハ $\mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}$ ノ部分空間: $\overline{\mathfrak{A}}_\Lambda$ ガ $2 \otimes \mathbb{M}$ ニ含マレルコトデアル。

ヨク知ラレテヰル如ク, everywhere dence domain ヲ有スル linear operator $\Lambda$ ガ closed operator ニ擴張サレルタメノ必要且ツ充分ナ條件ハ domain $\Lambda^*$ ガ everywhere dence ナルコトデアッテ, コノ條件ガ滿サレルトキ $\Lambda^{**}$ ハ $\Lambda$ ノ最小ノ擴張ヲ與ヘル。

吾々ハコレヲ $[\Lambda]$ デ表ハスコトニスル. Graph デ書ケバ

$$(4.2)\quad \overline{\mathfrak{A}}_{[\Lambda]} = [\overline{\mathfrak{A}}_\Lambda]$$

Lemma 4.1. $\Lambda\,\eta\,\mathbb{M}$ ナラバ $\Lambda^*\,\eta\,\mathbb{M}$, $\Lambda^{**} = [\Lambda]\,\eta\,\mathbb{M}$.

證明. i) $\Lambda\,\eta\,\mathbb{M}$ ナラバ $\overline{\mathfrak{A}}_\Lambda\,\eta\,2\otimes\mathbb{M}$ $[\overline{\mathfrak{A}}_\Lambda] = \overline{\mathfrak{A}}_{[\Lambda]}$ ハ $\mathbb{M}$ ニ含マレル. 故ニ $[\Lambda]\,\eta$

iii) 同様ニ $(-g \otimes \Lambda^* g;\ g \in \text{Domain}\ \Lambda^*) = \mathfrak{h} \otimes \mathfrak{h} - \mathfrak{a}_\Lambda$ ガ $2 \otimes \mathbb{M}$ ニ含マレルコトカラ $\Lambda^*$ ヲ $\mathbb{M}$ ナルコトガ分ル。

—— 以下再ビ $\mathbb{M}$ ハ *trace ring* デアルトスル。

定義. $\mathfrak{h}\ (=\widetilde{\mathbb{M}})$ ノ *linear submanifold* $\mathfrak{a}$ ヲ $\mathbb{M}$ ハ任意ノ $\varepsilon > 0$ ニ對シテ $\mathfrak{m}$ ヲ $\mathbb{M}$, $D(\mathfrak{m}) > 1-\varepsilon$ ナル *closed manifold* $\mathfrak{m}$ ヲ含ムトキ *essentially dense* デアルトイフ。

定理6. i) $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ ガ共ニ $\eta\ \mathbb{M}$, 且ツ *essentially dense* ナラバ $\mathfrak{a} \frown \mathfrak{b}$ モ $\eta\ \mathbb{M}$ 且ツ *essentially dense* デアル。

ii) $\mathfrak{a}$ ガ $\eta\ \mathbb{M}$, *essentially dense*, $X$ ガ $\eta\ \mathbb{M}$ ナル *closed linear operator* ナラバ $(f;\ Xf \in \mathfrak{a})$ モ $\eta\ \mathbb{M}$ 且ツ *essentially dense* デアル.

証明. i) ハ定義カラ明白デアル. ii) ヲ証明スルタメニ $\overline{\mathfrak{h}} = 2 \otimes \mathfrak{h}$ ヲ考ヘ, コレヲ

$$\overline{\mathfrak{h}} = 2 \otimes \mathfrak{h} = \overline{\mathfrak{f}}_1 \oplus \overline{\mathfrak{f}}_2, \quad \overline{\mathfrak{f}}_1 = (f \oplus 0),$$
$$\overline{\mathfrak{f}}_2 = (0 \oplus f)$$

ト表ハシ, 又 $\overline{\mathbb{M}} = 2 \otimes \mathbb{M}$ ニ關スル *dimension* ヲ $\overline{D}$ トカク。

*Lemma* 4.2. $X$ ガ $\eta\ \mathbb{M}$ 且ツ *closed* ナラバ $\overline{D}\ (\overline{\mathfrak{a}}_X) = \frac{1}{2}$ デアル。

何トナレバ $\overline{\mathfrak{a}}_X \frown \overline{\mathfrak{f}}_1 = 0$, $\overline{\mathfrak{a}}_X \smile \overline{\mathfrak{f}}_1 = \overline{\mathfrak{h}}$ デアルカラ.

—— X ノ canonical decomposition ヲ $X = WH$, $H = \int_0^\infty \lambda dE(\lambda)$ トスレバ $XE(\lambda)$ ハ bounded デアッテ, 従ッテ $\mathfrak{N}_\lambda = (f;\ XE(\lambda)f \in \mathfrak{M})$ ハ任意ノ closed ナ $\mathfrak{M}$ ニ對シテヤハリ closed デアル. $\mathfrak{N}_\lambda$ ノ定義カラ

$$\overline{\mathfrak{b}_1} \oplus \mathfrak{N}_\lambda = \overline{\mathfrak{b}}_1 \vee (\overline{\mathfrak{a}}_{XE(\lambda)} \wedge (\mathfrak{M} \oplus \overline{\mathfrak{b}}_2))$$

従ッテコノ両辺ノ $\overline{D}$ ヲ考ヘレバ, $\overline{\mathfrak{b}}_1 \wedge \overline{\mathfrak{a}}_{XE(\lambda)} = 0$ ニヨッテ

$$\frac{1}{2}(1 + D(\mathfrak{N}_\lambda)) = \frac{1}{2} + \overline{D}(\overline{\mathfrak{a}}_{XE(\lambda)} \wedge (\mathfrak{M} \oplus \overline{\mathfrak{b}}_2)).$$

故ニ

$$\frac{1}{2} D(\mathfrak{N}_\lambda) \geqq \overline{D}(\overline{\mathfrak{a}}_{XE(\lambda)}) + \overline{D}(\mathfrak{M} \oplus \overline{\mathfrak{b}}_2) - 1$$

然ルニ $\overline{D}(\overline{\mathfrak{a}}_{XE(\lambda)}) = \frac{1}{2}$ デアル. 故ニ

$$D(\mathfrak{N}_\lambda) \geqq D(\mathfrak{M})$$

今コヽデ $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{a}$ ヲ $D(\mathfrak{M}) > 1 - \varepsilon$ ナルヤウニトリ, $\lambda$ ヲ $D(E(\lambda)) > 1 - \varepsilon$ ナル様ニ定メテ $\mathfrak{M}' = E(\lambda)\mathfrak{H} \wedge \mathfrak{N}_\lambda$ トオケバ. 明ラカニ $\mathfrak{M}'$ ハ closed, $\eta M$, $\mathfrak{M}' \subset (f;\ Xf \in \mathfrak{a})$ デ, 上ノ結果カラ $D(\mathfrak{M}') > 1 - 2\varepsilon$ デアル. コレデ $(f;\ Xf \in \mathfrak{a})$ ガ essentially dense ナル事ガ分ッタ。

上ノ証明デ用ヒタ Lemma 4.2 カラ又次ノ定理ガ成立スル事ガ分ル:

定理 11. $X, Y$ ガ共ニ $\eta M$ ナル closed operator デ, $X \subseteq Y$ ナラバ $X = Y$ デアル. 従ッテ $\eta M$, [Domain ハ]

$=$ 等シイ linear operator $\Lambda$ ノ $\eta M$ ナル closed ナ拡張ハ $[\Lambda]=\Lambda^{**}$ 以外ニハ存在シナイ。

変数 $x, x^*, y, y^*, \cdots\cdots$ ノ non-commutative polynomial $P(x, x^*, y, y^*, \cdots\cdots)$ ヲ考ヘ、$\eta M$ ナル closed operator $X, Y, \cdots\cdots$ ニ對シテ $P(X, X^*, Y, Y^*, \cdots\cdots)$ ナル operator ヲ作レバ、コレハ定理6カラ明カナル如ク、essentially dense domain ヲ有スル。$P(x, x^*, y, y^*, \cdots\cdots)$ ノ形式的ニ作ッタ"adjoint" ヲ $P^*(x, x^*, y, y^*, \cdots\cdots)$ トスレバ

$$(P(X, X^*, \cdots\cdots)f, g)=(f, P^*(X, X^*, \cdots\cdots)g)$$

ガ成立ツ。コレヨリ $(P(X, X^*, \cdots\cdots))^*$ ガ essentially dense domain ヲ有スルコトガ知ラレ、従ッテ $[P(X, X^*, \cdots\cdots)]$ ガ作ラレル事ガ分ル。

コレニツイテ

*Lemma* 4.3. i) $[P(X, X^*, \cdots\cdots)]^*=(X, X^*, \cdots\cdots)]$

ii) $[\rho P(X, X^*, Y, \cdots\cdots)]=[\rho[P(X, X^*, Y, \cdots\cdots)]]$

iii) $[P(X, X^*, \cdots\cdots)+Q(X, X^*, \cdots\cdots)]$

$$=[[P(X, \cdots\cdots)]+[Q(X, \cdots\cdots)]]$$

iv) $[P(X, X^*, \cdots\cdots)\cdot Q(X, X^*, \cdots\cdots)]$

$$=[[P(X, \cdots\cdots)]\cdot[Q(X, \cdots\cdots)]]$$

又 $P(X, X^*, \cdots\cdots)$ カラ同類項ヲマトメテ得ラレル reduced polynomial ヲ $P^{(r)}(X, X^*, \cdots\cdots)$ デ表ハスコトニスレバ

v) $[P(X, X^*, \cdots\cdots)]=[P^{(r)}(X, X^*, \cdots\cdots)]$

証明 i) $(P(X, X^*, \cdots\cdots))^* \supseteq P^*(X, X^*, \cdots\cdots)$ ヨリ[ ]ヲ作レバ $(P(X, X^*, \cdots\cdots))^* \supseteq [P^*(X, X^*, \cdots\cdots)]$ ヲ得ル. 故ニ定理7カラ $[P^*(X, X^*, \cdots\cdots)] = (P(X, X^*, \cdots\cdots))^*$ デナケレバナラヌ。同様ニ $P(X, X^*, \cdots\cdots) \subseteq [P(X, X^*, \cdots\cdots)]$ ヨリ $[P(X, X^*, \cdots\cdots)]^*$ モ亦 $(P(X, X^*, \cdots\cdots))^*$ ニ等シイコトガ知ラレル. 故ニ $[P(X, X^*, \cdots\cdots)]^* = [P^*(X, X^*, \cdots\cdots)]$

ii) — iv) モ同様ニシテ証明サレル。

コノ Lemma カラ ${}^7\mathbb{M}$ ナル closed linear operator ノ全体ハ和ヲ $[X+Y]$, 積ヲ $[X \cdot Y]$ ト定義スレバ $\mathfrak{H}$ ノ上ノ ring ヲ作ルコトガ知ラレル. 吾々ハ之ヲ $\mathcal{R}_{\mathbb{M}}$ デ表ハスコトニシ

$$X + Y = [X + Y]$$

$$X \cdot Y = [X \cdot Y]$$

ト書クコトニスル。$X \to X^*$ ハ明ラカニ $\mathcal{R}_{\mathbb{M}}$ ノ (conjugate) anti-automorphism ヲ與ヘル。

定理 8. $\mathcal{R}_{\mathbb{M}}$ ハ $\mathbb{M}$ ヲ含ム regular ring デアル。

証明. $\mathbb{M}$ ヲ含ムコトハ明ラカデアル. regular ナルコトヲ示スタメニ $X \in \mathcal{R}_{\mathbb{M}}$ ニ對シテ, ソノ canonical decomposition ヲ

$$X = WH, \qquad H = \int_0^\infty \lambda \, dE(\lambda)$$

トシ, Y ヲ

$$Y = H_1 W^*, \quad H_1 = \int_{+0}^{\infty} \frac{1}{\lambda} dE(\lambda)$$

ト定義スル。然ルトキハ明ラカニ

$$X = XYX$$

§5. $X \in \mathcal{R}_{\mathbb{M}}$ デ generate サレル principal right ideal ヲ $(X)_r$, principal left ideal ヲ $(X)_l$, $(X)_r$ 全体ノ作ル lattice ヲ $\overline{R}$. $(X)_l$ 全体ノ作ル lattice ヲ $\overline{L}$ デ表ハス。

Lemma 5.1. i) $(X)_r = (P_{[\text{Range}\, X]})_r$,

ii) $(X)_l = (P_{[\text{Range}\, X^*]})_l$.

証明. $X$ ニ對シテ定理8ノ証明ノトキニ定義シタ $Y$ ヲ考ヘレバ

$$\begin{cases} XY = P_{[\text{Range}\, X]} \\ YX = P_{[\text{Range}\, X^*]} \end{cases}$$

デアル. コレヨリ直チニ Lemma ガ証明サレル。

定理9. i) $E \longleftrightarrow (E)_r$ ニヨッテ $L_{\mathbb{M}}$ ト $\overline{R}$ ガ lattice isomorphic ニナル。

ii) $E \longleftrightarrow (E)_l$ ニヨッテ $L_{\mathbb{M}}$ ト $\overline{L}$ ガ lattice isomorphic ニナル。

証明. 前 Lemma カラ $E \longrightarrow (E)_r$ ニヨッテ $L_{\mathbb{M}}$ ガ $\overline{R}$ ニ lattice homomorph ニ寫サレルコト明カデアル. ココデ $(E)_r = (F)_r$ デアッタトスルト $E = FE$, $F = EF$ ダカラ $E = F$ デナケレバナラヌ。 スナハチ

$E \rightarrow (E)_r$ ハ逆一意的デアル．コレデ i) ガ証明サレタ．

ii) モ同様ニ証明サレル．

コノ isomorphism ニヨッテ $\overline{R}$, $\overline{L}$ ハ ortho complemented lattice トナル．コレニツイテ

定理10. i) $(X)_r$ ノ ortho complement ハ $(Y; X^*Y = 0)$ デアル．

ii) $(X)_l$ ノ orthocomplement ハ $(Y; YX^* = 0)$ デアル．

証明 i) $(X^*)_l = (P_{[\mathrm{Range}\,X]})_l$ デアルカラ $X^*Y = 0$ ナルタメニハ $P_{[\mathrm{Range}\,X]} Y = 0$ ナルコトガ必要且充分デアル．故ニ

$(Y; X^*Y = 0) = (Y; P_{[\mathrm{Range}\,X]} Y = 0) = (1 - P_{[\mathrm{Range}\,X]})_r$．コレハ明ラカニ $(X)_r = (P_{[\mathrm{Range}\,X]})_r$ ノ ortho complement デアル．

ii) モ同様ニシテ示サレル

$\mathbb{M}$ ノ center ヲ $\mathbb{Z}$，η $\mathbb{Z}$ ナル closed operator ノ作ル ring ヲ $\mathcal{R}_{\mathbb{Z}}$，$E \in \mathbb{Z}$ ナル $E$ ノ作ル lattice ヲ $L_{\mathbb{Z}}$ トシ，$\mathcal{R}_{\mathbb{Z}}$ ノ principal right ideal ノ作ル lattice ヲ $\overline{R}_{\mathbb{Z}}$，principal left ideal ノ作ル lattice ヲ $\overline{L}_{\mathbb{Z}}$ トスル．然ルトキハ

定理11. i) $\mathcal{R}_{\mathbb{Z}}$ ハ $\mathcal{R}_{\mathbb{M}}$ ノ center デアル．

ii) $L_{\mathbb{Z}}$ ハ $L_{\mathbb{M}}$ ノ center デアル．

iii) $L_{\mathbb{Z}}$ ハ $\overline{R}_{\mathbb{Z}}$ ト lattice isomorphic デア

ル。

iv) $L_Z$ ハ $\overline{L}_Z$ ト lattice isomorphic デアル。

証明. i) $Z \in$ center of $\mathcal{R}_M$ ナラバ, $A \in M$ ニ對シテ $ZA=[ZA]=[AZ]$ デアルカラ, $AZ \subseteq ZA$. 故ニ $Z \eta \mathbb{Z}$.

逆ニ $B \in \mathbb{Z}$ ナラバ任意ノ $X \in \mathcal{R}_M$ ニ對シテ $BX \subseteq XB$, 從ッテ $[BX]=[XB]$ デアル. $Z \eta \mathbb{Z}$ トシ, $Z$ ノ canonical decomposition ヲ $Z=WH$, $H=\int \lambda dE(\lambda)$ トシヨウ. 然ルトキハ $E(\lambda) \in \mathbb{Z}$ デアルカラ, $X \eta M$ ニ對シテ

$$[[ZX]E(\lambda)]=[E(\lambda)[ZX]]=[[E(\lambda)Z]X]$$
$$=[X[E(\lambda)Z]]=[[XZ]E(\lambda)]$$

スナハチ

$$E(\lambda)[ZX] \subseteq [ZX]E(\lambda)=[XZ]E(\lambda)$$

デアル. コノ事カラ $\lim_{\lambda} E(\lambda)=1$ ニヨッテ $[ZX]=[XZ]$ が得ラレル. 故ニ $Z$ ハ $\mathcal{R}_M$ ノ center ニ含マレル。

ii) $E \in L_Z$ が $L_M$ ノ center ニ含マレルコトハ明白. 逆ニ $E$ が $L_M$ ノ center ニ含マレルトスル. $\overline{R}_M$ デ考ヘレバ $(E)_r$ ノ complement が一意的ニ定マル. 然ルニ $X \in R_M$ ヲ任意ニトレバ $((1-E)+EX(1-E))_r$ ハ明カニ $(E)_r$ ノ complement デアル。

故ニコレハ $(1-E)\mathfrak{x}$ ト一致セネバナラナイ．故ニ $EX(1-E)=0$，スナハチ $EX=EXE$．E ト $(1-E)$ ヲ入レ換ヘテ考ヘレバ $XE=EXE$ ヲ得ル．故ニ $EX=XE$．故ニ $E\in L_{\mathfrak{Z}'}$．

iii), iv) ハ明白．

定理12．$\mathbb{Z}=\mathbb{P}$ ナル場合ニハ　i) $D(E)=D(F)$ ナルタメノ必要且ツ充分ナ條件ハ $E\sim F$ デアル．從ツテ又 $T=T(A)$ ハ $\mathbb{M}$ ノ代數的ナ構造ニヨッテ一意的ニ定マル。

何トナレバ，コノ場合ニハ $\mathbb{M}$ ハ $\mathfrak{h}_y=\widetilde{\mathbb{M}}$ ニ於ケル factor ニ他ナラナイカラデアル（Neumann: Rings of Operators I 參照）

§6. $L_{\mathbb{M}}$ ハ probability logic（或ハ quantum logic）ノ場トシテ適シテヰル。[1] $E, F,$ ----- $\in L_{\mathbb{M}}$ ヲ物理的實驗事實ヲ述ベタ命題ト考

$$(6.1)\quad p(E\rightarrow F)=\frac{T(E\cdot F)}{T(E)}\qquad (E\neq 0)$$

---

1) Neumann ハ $L_{\mathbb{M}}$ トシテ既約 $(Z=1)$ ナル $\mathbb{M}$ ノ上ノ lattice ヲ用ヒテヰル（Neumann ノ quantum logic ニ關スル講義，或ハ Birkhoff: Lattice Theory, 128 頁參照）が，古典的ナ確率論ヲ含メテ考ヘルタメニハ一般ノ $\mathbb{M}$ ヲ考ヘタ方ガヨイ。

ヲEカラFヘノ *transition probability* ト定義スル．コレヲ又 $p_{E}(F)$ デ表ハス．特ニ $E=1$ ノトキ $p_{E}(F)$ ヲ $p(F)$ ト書ク．即チ

$$p(F)=p_1(F)=\mathrm{I}(F)$$

又

$$(6.2)\quad E\cdot F=F\cdot E$$

ノトキ，EトFハ同時観測可能デアルトイフ．例ヘバ次ノ定理ガ成立ツ。

**定理13.** i) $p(E\to F)=0$ ナルタメノ必要且ツ充分ナ條件ハ $E\cdot F=0$ ナルコトデアル。

ii) $p(E\to F)=1$ ナルタメノ必要且充分ナ條件ハ $F\geqq E$ ナルコトデアル。

iii) $F_1\cdot F_2=0$ ナラバ

$$p(E\to F_1\smile F_2)=p(E\to F_1)+p(E\to F_2)$$

iv) $p(E)\,p_E(F)=p(F)\,p_F(E)$

v) （Bayesノ定理）$\sum E_j=E_1+E_2+\cdots\cdots+E_n=1$ ナルトキハ

$$p_F(E_j)=\frac{p(E_j)\,p_{E_j}(F)}{p(E_1)\,p_{E_1}(F)+\cdots\cdots+p(E_n)\,p_{E_n}(F)}$$

注意 $\sum E_j=1$ ナルコトハ $E_j\cdot E_k=0\ (j\neq k)$ 且 $E_1\smile E_2\smile\cdots\cdots\smile E_n=1$ ト一致スル。

$L_{M}$ ニ於ケル“確率変数”ハ次ノ如ク定義セラレル：

定義．數空間 $(-\infty<x<+\infty)$ ノ Borel 集合族(B) カラ $L_{M}$ ヘノ連續且 *lattice homomorphic* ナ

mapping $x: B \to E_x(B)$ デアッテ，全空間 $(-\infty, +\infty) = E_x = 1$ が對應スルモノヲ確率変數（量子力学ノ言ヒ方デハ量）トヨブ。

明ラカニ $E_x(B)$ $(B \in (B))$ ノ全体ハ $L_M$ ノ Boolean sublattice ヲ作ル。$E$，$F$ が共ニ $\leqq E_0$ ナルトキ $E \cdot F = F \cdot E$ ナルタメノ必要且充分ナ條件ハ $E = (E \frown F) \smile (E \frown (E_0 - F))$ デアル。故ニ $L_M$ ノ Boolean sublattice ノ element ハ相互ニ可換デアル。從ッテ $E_x(B)$ ハスベテ同時観測可能デアル。

定義．$E_x((-\infty, \lambda))$ ヲ $x$ ノ分布命題函數ト名付ケ $E_x(\lambda)$ デ表ハシ，$f_E^{(x)}(\lambda) = p_E(E_x(\lambda))$ ヲ條件 $E$ ノ下ニ於ケル $x$ ノ分布函數トヨブ。

$E_x(\lambda)$ ハ明ラカニ単調増大デ上カラ半連續デアル．$f_E^{(x)}(\lambda)$ モ同ジ性質ヲモツ．$E$ ト $x$ ヲ固定シテ考ヘルナラバ，$x$ ハ $f_E^{(x)}(\lambda)$ ヲ分布函數トスル普通ノ確率変數ニ他ナラナイ。

吾々ハ確率変數 $x$ が考ヘラレタトキ

$$(6.3) \qquad X = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, d E_x(\lambda)$$

ニヨッテ $\mathfrak{R}_M$ ノ self adjoint operator $X$ ヲ定義スルコトが出来ル。逆ニ self adjoint ナ $X \in \mathfrak{R}_M$ が與ヘラレレバ (6.3) カラ $E_x(\lambda)$ が定マリ，從ッテ $x$ が定マル。ソコデ吾々ハ $x$ ヲ表ハスニ (6.3) デ定マル $X$ ヲ以テシ，從ッテ $\mathfrak{R}_M$ ノ self adjoint operator ヲ

確率変数トヨブコトニスル。

注意　通常ノ確率論デハ確率ノ場ハ一ツノ集合$\Omega$ノ部分集合カラナルBorel field $\mathfrak{F}$デアッテ，確率変数ハ$\Omega$ノ$\mathfrak{F}$一可測函数$x(P)$ $(P\in\Omega)$デ表ハサレル．コノトキ，有界可測函数全体ノ作ル ring $\mathbb{M}$ハ

$$T(x(P))=\int_{\Omega}x(P)\,p(dP)$$

ニヨッテ trace ヲ導入スレバ可換ナ trace ring トナリ，$L_{\mathbb{M}}$ハ$\mathfrak{F}$ト lattice isomorphic トナル．又$\mathfrak{R}_{\mathbb{M}}$ノ self adjoint operator ハ丁度確率変数$x(P)$ト一致スル．コノ意味デ$L_{\mathbb{M}}$ハ確率ノ場ノ一般化ト考ヘラレル．

——（續ク）——