1060. K-空間 (Kantorovitch 空間) ニ就イテ

小笠原 藤次郎 (廣島文理大)

本誌ノ数個所デ述ベタ Kantorovitch-Vulich ノ K_2-空間[1] ノ性質, 或ハベクトル束ノ性質ヲ纏メテ見ル. 先ヅ K_2-空間ノ定義ニツイテハ Banach 束トシテ考ヘルナラバ, K_6 型"正則"[2] Banach 束ト同義デアル. (§1) 或ハ Kantorovitch ノ B_2 空間[3] ト同ジ形ヲ持タセルニハ $|x|<|y|$ ノトキ $\|x\|<\|y\|$ ヲ $\|x\|\leqq\|y\|$ ト置キカヘレバヨイ. (§2) コノ方ガ"正則"ベクトル束トイフ條件ガトレテ Banach 空間トシテ研究スルニ便利デアル. コレヲK-空間ト呼ブ.

K-空間ト K_2-空間トハ同義デアル. Banach 束ガK-空間ニナル條件ハ弱完備デアル (§3). Banach 束ガ正則 Banach 空間ニナル條件ハ, ソノ共軛空間ト共ニK-空間ニナルコト (§4) 或ハ Banach 束ガ弱コムパクトデアル (§4). Banach 束デハノルムデノ收斂ハ相對

---

(1) Kantorovitch-Vulich. compositio math 5 (1938), 120

(2) "正則"ハ Kantorovitch ノ意味ニ, 正則ハ Banach 空間ノ意味ニ使フ.

(3) L. Kantorovitch, Recueil math 2 (1937) 153. Kantorovitch (I) トシテ引用

一様(*)収斂[4]ト同義デアルが、ノルム位相ト(t)位相が一致スル。結局 $x_n \downarrow 0$ ノトキ $\|x_n\| \to 0$ トナル σー完全 Banach 束ヲ考ヘルが自然デアル。コレヲ $\bar{K}$ー空間ト呼ブ。$\bar{K}$ー空間ノ特性ハ，スベテノ有界線形汎函数が(0)ー連続ノコト．或ハ任意ノ区間が列的(或ハ位相的)弱コムパクトナルコト．或ハコレが弱ビコンパクトナルコトデ特性ヅケラレル。(§4)

又 $\bar{K}$ー空間ハ $\bar{K}_\delta$ 型"正則" Banach 束ト同義デアル．コレカラ $\bar{K}$ー空間がエルゴード論ソノ他ノ研究ノ枠トシテ用ヒラレルコトが判ル。[5] 可分 Banach 束 X が $\bar{\bar{X}}$ が可分ノトキ X が正則ニナル(§5)．又 $\bar{X}$ が可分ナ K－空間 X ハ正則デアル(§4)．K－空間 X ハ，$\bar{X}$ ノスベテノ(0)－連續線形汎函數ヨリナル Banach 束トシテ特性ヅケラレル．(§4) 共軛 Banach 束 $\bar{X}$ が K－空間ニナル條件ハ $\bar{\bar{X}}$ が X ヲ含ム最小ノ正規イデヤルトナルコトデアル．(§6) 最後ノ§7デハベクトル束ニ對シ§1—§6ノ証明法が成立ツ場合ヲ考ヘ，Bochner 條件ヲ満足スルベクトル束[6]トノ関係ヲ述ベタ。

§1. $\mathfrak{R}_2$－空間

完全ベクトル束ニ於テ次ノ性質ヲ考ヘル。

---

(4) Birkhoff. Lattice Theory: 117

(5) 紙数誌 1022, 1035.

(6) 仝 上 1021

(i) $\{E_n\}$ ヲ上方(o)－有界部分集合列デ, Kantorovitch ノ意味デ (o)－$\lim\{\sup E_n\}$ ガ有限或ハ無限大ノトキ, E_n ノ有限部分集合 E'_n ヲ適當ニトルトキ, (o)－$\lim\{\sup E'_n\}$ = (o)－$\lim\{\sup E_n\}$ トナル。

(ii) $\{E_n\}$ ヲ $\sup E_n = +\infty$ トル部分集合列トスル. E_n ノ有限部分集合 E'_n ヲ適當ニトルト

$$\sup\{\sup E'_n\} = +\infty$$

(iii) E ヲ任意ノ部分集合トスル。0 ニ收斂スル任意ノ數列 $\{\lambda_n\}$ ニ對シ, E カラトリダシタ任意ノ列 $\{x_n\}$ ニツイテ $\lambda_n x_n \to 0$ (o) ガ成立ツトキ, E ハ (o)－有界デアル。

(i), (ii) ヲ滿足スル完全ベクトル束ヲ "正則", (i) ヲ滿足スル完全ベクトル束ヲ K_δ^- 型 "正則", (i), (iii) ヲ滿足スル完全ベクトル束ヲ K_δ 型 "正則" ト呼ブ。[1]

"正則" ベクトル束ハ K_δ 型 "正則" デアルガ逆ハ必ズシモ成立シナイ。K_δ^- 型 "正則" ベクトル束デハ有限ナ要素ヘノ (o)－收斂 (以後單ニ (o)－收斂トイヘバ, コノ意味デアル) ハ相對一樣收斂ト一致スル。

Kantorovitch-Vulich[2] ハ

定義1.1. "正則" ベクトル束ガ, ソノ各要素ニ實數 $\|x\|$ ガ對應シ

---

(1) L. Kantorovitch, Recueil Math 7 (1940)
以後 Kantorovitch (II) トシテ引用スル.

(2) Kantorovitch-Vulich. 前掲

(I) $\|x\| \geqq 0$, $x=0$ ノトキニ限リ $\|x\|=0$

(II) $\|x+y\| \leqq \|x\|+\|y\|$

(III) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$　　α ハ実数

(IV) $|x| \leqq |y|$ ノトキ　$\|x\| \leqq \|y\|$

(VI)′ $x_n \uparrow +\infty$ ノトキ　$\|x_n\| \to +\infty$

ヲ満足スルトキ，$\bar{K}_2$—空間ト呼ブ。

ト定義シタ．コノ定義デ"正則"ヲ K_6 或ハ $\bar{K}_6$ 型トシテモ差支ヘナイコトハ容易ニ判ル。ベクトル束ガ(I)—(IV)ヲモツ Banach 空間ノトキ Banach 束トイフ．$\bar{K}_2$—空間ハ常 Banach 束デアル．$\bar{K}_2$—空間ハ常ニ

(V) $x_n \downarrow 0$ ノトキ　$\|x_n\| \to 0$

ヲ満足スルコトハ明カデアル．(VI)′ハマタ次ノ

(VI) $0 \leqq x_n \leqq x_{n+1}$, $n=1,2,\cdots\cdots$ $\|x_n\|$ ガ有界ノトキ $\bigvee x_n$ ガ存在スル，

トシテモ差支ヘナイコトハ明デアル。

定理1.1. Banach 束ガ K_6 型正則ノトキ $\bar{K}_2$ 空間デアル。

(証) 上述ノ注意カラ (VI) ノ成立ヲ証スレバ充分．$\{x_n\}$ ヲ $0 \leqq x_n \leqq x_{n+1}$, $n=1,2,\cdots\cdots$ $\|x_n\| \leqq C$ ヲ満足スルトスル。$\{x'_n\}$ ヲ $\{x_n\}$ ノ任意ノ部分集合トスル．先ヅ $\frac{1}{2^n}x'_n \to 0(0)$ ヲ証スル。$\|\frac{1}{2^n}x'_n\| \leqq \frac{C}{2^n}$ ″ラ無限級数 $\sum \frac{1}{2^n}x'_n$ ハ強収斂スル。

$y_n = \sum_{p=n}^{\infty} \frac{1}{2^p}x'_p$ ト置クトキ $\|y_n\| \leqq \sum_{p=n}^{\infty} \frac{C}{2^p} = \frac{C}{2^{n-1}}$，且ツ

$y_{n+1} \leqq y_n$. $\{y_n\}$ ハ 0 ニ強收斂スルカラ $y_n \downarrow 0$. 故ニ $\frac{1}{2^n} x'_n \leqq y_n$ カラ $\frac{1}{2^n} x'_n \to 0(o)$ トナル. $\{\lambda_n\}$ ヲ $\lambda_n \to 0$ ナル任意ノ數列トスル. $\lambda_n \downarrow 0$, $\lambda_n \leqq \frac{1}{2}$ トシテ差支ヘナイ. コノ假定ノモトニ自然數ノ增加列 $\{m_n\}$, $1 < m_1 < m_2 < \cdots\cdots$ ヲ

$$1 \leqq p < m_1 \text{ ノトキ } \lambda_p \leqq \frac{1}{2},$$

$$m_{n-1} \leqq p < m_n \text{ ノトキ } \lambda_p \leqq \frac{1}{2^n}$$

ナル樣ニトリ $x''_n = \vee(x'_p ;\ 1 \leqq p < m_n)$ ト定メル. $m_{n-1} \leqq p < m_n$ ノトキ $\lambda_p x'_p \leqq \frac{1}{2^n} x''_n$ トナルカラ $\lambda_p x'_p \to 0(o)$ ガ成立ツ. K_6 型 "正則" ノ定義カラ $\{x\}$ ハ (o) ー有界トナル. 從テ $\vee x_n$ ガ存在スル. (證終リ)

コノ定理カラ (VI)' ハ空間ノ完備性ト同義ニナルガ K_6^- 型 "正則" トシテハ定理1.1 ハ一般ニハ成立シナイ. ソノ例トシテ (C_0) ヲ擧ゲルコトガ出來ル.

Kantorovitch ハ σー完全ベクトル束ニ對シ

定義1.2. σー完全ベクトル束ノ各要素ニ實數 $\|x\|$ ガ對應シ, 上述ノ (I), (II), (III), (V), (VI)' ト (IV) ノ代リニ, 更ニコレヨリ強イ.

$(IV)^+$ $|x| < |y|$ ノトキ $\|x\| < \|y\|$

ヲ滿足スルトキ, B_2ー空間ト呼ブ.

ト定義シタ。[1]

$(IV)^+$ ガ成立ツトキ, $|x| \leqq |y|$ ニ對シテ, ε ヲ任意ノ正

---

[1] L. Kantorovitch (I)

数トスルトキ $|y|>0$ ナラバ $|x|<(1+\varepsilon)|y|$ トナルカラ
$\|x\|<\|(1+\varepsilon)y\|=(1+\varepsilon)\|y\|$ コレカラ $\|x\|\leqq\|y\|$.
$|y|=0$ ノトキ明ニ $\|x\|=\|y\|$ トナリ (IV) ガ成立ツ.
B_2-空間ハ"正則"ベクトル束デアル。[1] 故ニ B_2-空間ハ
$(\mathrm{IV})^+$ ノ成立ツ $\tilde{K}_2$-空間トシテ特性ヅケラレル. 定義1.2.デ
ベクトル束ニ σ-完全ノ條件ヲ表面ニ出サナイ様ニスルニハ
$(\mathrm{VI})'$ ヲ (VI) デ置キ代ヘレバヨイ。コレ等ノ事情カラ次ノ定義
ヲ導入スルコトハ自然ト考ヘラレル。

定義1.3. (I), (II), (III), (IV), (V), (VI) ヲ満足スルベクトル束ヲ K-空間トイフ。

K-空間ハ B_2-空間ト (IV) ト $(\mathrm{IV})^+$ デ異ッテキル. 從テ K-空間ハ $\tilde{K}_2$-空間ト同義デアルト予想ガツク. コレハ§2デ証明スル。

§2. $\tilde{K}_2$空間トK-空間ノ一致

X ヲ定義1.1ノ (I), (II), (III), (IV) ヲ満足スルベクトル束(完全ハ假定シナイ)トスル. スベテノ正要素 $x\geqq 0$ ニ對シ $f(x)\geqq 0$ トナル有界線形汎函數[2] f ヲ共軛空間 $\bar{X}$ ノ正要素トスルトキ共軛空間ハ完全 Banach 束デアル. 更ニ $\bar{\bar{X}}$ ヲ考ヘルト, X ハ $\bar{\bar{X}}$ ニノルムヅケラレタベクトル束

---

(1) L. Kantorovitch (I)

(2) 有界トハ Banach 空間的意味トスル. 束的意味トシテモ差支ヘナイ. (Birkhoff, Lattice Theory (1940) 115. 定理7.19. 但シ我々ノ場合空間ヲ完備化シテ考ヘレバヨイ)

トシテ埋藏サレテ居ル。X, $\overline{X}$ ノ要素ニツイテ次ノ補題ガ成立ツ。

補題1. $\|x\| = l.u.b.\{|f(x)|;\ \|f\| \leqq 1\}$
$$= l.u.b.\{f(|x|);\ 0 \leqq f,\ \|f\| \leqq 1\}$$

(証) 略

補題2. $\|f\| = l.u.b.\{|f(x)|;\ \|x\| \leqq 1\}$
$$= l.u.b.\{|f|(x);\ 0 \leqq x,\ \|x\| \leqq 1\}$$

(証) 略

$\overline{X}$ ノ単位球ヲ X ノ要素ニヨル弱位相デ位相化スルトビコムパクト Hausdorff 空間ニナル。從テ $\overline{X}$ ノ単位球ノ正要素ノ全体ヲ Γ トスルト Γ モビコムパクトナルコトガ容易ニ判ル。$f(x)$ ハ x ヲ固定シテ，之ヲ Γ 上ノ函数ト考ヘルトキ，連續デアル。

補題3. $x_\delta \downarrow 0$ ナル directed set $\{x_\delta\}$ ガ X ノ要素ニ弱收斂スルトキ $\|x_\delta\| \to 0$

(証) 上述ノ単位球 Γ デ $f(x_\delta)$ ハ x_δ ヲ固定スルト f ノ連續函数デアル。$\{x_\delta\}$ ノ弱收斂極限ヲ y トスレバ $f(y) \leqq f(x_\delta)$, $f \in \Gamma$ カラ $y \leqq x_\delta$. コレカラ $y = 0$ ナルコトガ判ル. Dini ノ定理ヲ使ッテ, $f(x_\delta)$ ハ Γ 上デ一様ニ 0 ニ收斂スル. 從テ補題1カラ $\|x_\delta\| \to 0$.

補題4. $x_n \downarrow 0$ ナル $\{x_n\}$ ガ X ノアル要素ニ弱收斂スルトキ $\|x_n\| \to 0$

(証) 補題3カラ

補題5. 定義1.3 ノ (V) (VI) ハ次ノ條件ト同義

デアル。

(K) $0 \leqq x_n \leqq x_{n+1}$, $n=1,2,\cdots\cdots$ $\|x_n\|$ ガ有界ノトキ $\{x_n\}$ ハアル要素ニ強收斂スル。

(証) (V) (VI) ガ満足サレルトキ $(\vee x_p)-x_n$ ヲ考ヘルトキ (V) カラ $\{x_n\}$ ハ $\vee x_p$ ニ強收斂スル. 逆ニ (K) ガ成立ツトキ, (VI) ノ成立ハ自明. (V) ハ $\{x_1-x_n\}$ ナル要素列ヲ考ヘレバ容易ニ判ル。

補題5カラ K－空間ノ定義ヲ

定義2.1. (I), (II), (III), (IV), (K) ノ成立ツベクトル束ヲ K－空間トイフ。

條件 (K) ニ於テ強收斂ヲ弱收斂デ置キカヘテモヨイ. コレハ後ニ使フ.

K－空間ノ例トシテ

例1. 抽象 L－空間

$x \geqq 0$, $y \geqq 0$ ノトキ $\|x+y\|=\|x\|+\|y\|$ ヲ満足スル Banach 束ヲ抽象 L－空間トイフ. 條件 (K) ノ成立ガ容易ニ判ル. ($x \frown y=0$ ノトキ $\|x+y\|=\|x\|+\|y\|$ トシテモ同義ノ抽象 L－空間ニナル) 尚コレハ $B_\perp$ 空間デアル。

例2. ノルムガ狭義ノ単調性ヲモツ Banach 束 (SMB 束)

任意ノ正数 ε ニ對シ正數 δ ガ存在シテ $x, y \geqq 0$, $\|x\| \leqq 1$, $\|x+y\| \leqq 1+\delta$ カラ $\|y\|<\varepsilon$ ガデル Banach 束ヲ SMB 束トイフ. コレモ條件 (K) ヲ満足スル。(1) —— 脚註次葉 ——

コレハB_2ー空間デアル。

例3. uniformly convex ナ Banach 束.

(K)ヲ満足スルコトハ，$n, m \to +\infty$ ノトキ $\|x_n\|$, $\|x_m\|$, $\left\|\frac{x_n+x_m}{2}\right\|$ ガ同一ノ極限ヲモツコトカラ，$\|x_n - x_m\| \to 0$ トナルコトカラ判ル. 尚コレハB_2空間デアル。

定理2.1. 弱完備Banach束ハK−空間デアル。

(証) 條件(K)ノ要素列$\{x_n\}$ハアル要素ニ弱収斂スル. コレハ$\bigvee x_n$ナルコトガ判ルカラ，補題4ヲ使ツテ(K)ノ成立ガ判ル。

§3 デ定理2.1ノ逆ガ成立ツコトヲ証明スル. 從ツテK−空間ノ例トシテ

例4. Banach 空間トシテ正則ナBanach束.

ヲ擧ゲルコトガ出来ル。

補題6. K−空間ハσ−完全Banach束デアル.

(証) σ−完全ハ(VI)カラ. マタ$x_n \to x_0$ (0) ノトキ $|x_n - x_0| \leq u_n$, $u_n \downarrow 0$ ナル u_x ガ存在スルカラ (V) カラ (0)−収斂ハ強収斂ヲ意味スル。$m > n$ ノトキ $\|x_n - x_m\| \leq \frac{1}{2^n}$ ナル基本列 $\{x_n\}$ ハ (VI) ヲ使ツテ (0)−収斂, 從ツテ強収斂スルコトガ容易ニ示サレル、コレカラ任意ノ基本列ガ強収斂，即チ空間ガBanach空間ニナル.

補題7. Xヲ K−空間トスル. Eヲ任意ノ部分集合トシ sup Eハ有限或ハ無限大トスル。Eノ可附番部分集合E′ガ

---

(1) Birkhoff, 前揭, 118。

存在シテ $\sup E' = \sup E$.

(証明) Eガ正要素カラナリ $x, y \in E$ ノトキ $x \cup y \in E$ ナル場合ニ証明スレバ充分. コノ仮定ノモトニ $\lambda = \text{l.u.b.}(\|x\|, x \in E)$ トスル. $\lambda = +\infty$ ノトキ $x_n \in E$ ヲ $\lambda = \lim x_n$ ナル様ニトルト $\sup\{x_n\} = +\infty$ トナル. $\lambda < +\infty$ ノトキ E_1 ヲ E ノ可附番集合ノ l.u.b. デノルムガ λ ニ等シイモノノ全体トスル. E_1 ノナカニ $\sup E$ ガ存在シナイトキハスベテ, 第一級, 第二級ノ順序数 α ニ對シ, E_1 カラ $\{x_\alpha\}$ ヲ $x_\alpha < x_\beta$, $\alpha < \beta$ ナル如ク選バレル. 適當ニ正数 ε ヲトルトキ $\|x_{\alpha_{n+1}} - x_{\alpha_n}\| \geqq \varepsilon$, $\alpha_{n+1} > \alpha_n$. 然ルニ $\|x_\alpha\| = \lambda$. コレハ(K)ト矛盾スル。

定理2.2. K−空間ト $\bar{K}$−空間トハ本質的ニハ同ジモノデアル。

(証) $\bar{K}$−空間ハ K−空間ニナルコトハ §1 デ述ベタ. X ヲ K−空間トスル. §1 ノ (i) ノ成立ヲ示スタメ, コノ場合ノ記号ヲ使ッテ, $a_n = \sup E_n$ トオク. 補題7カラ E_n ノ有限部分集合 E'_n ヲ $x_n = \sup E'_n$ ト置クトキ $\|a_n - x_n\| \leqq \frac{1}{2^n}$ ナル様ニトレル. $(o)-\lim a_n$ ガ有限, 無限大ト=カヽハラズ $(o)-\lim x_n$ ニ等シイコトガ判ル. §1 ノ (ii) ハ E_n ガ正要素ノミカラナル場合ニ証スレバヨイ. E_n ノ部分集合 E'_n ヲ $\sup E'_n \geqq n$ ナルヤウニトレバ $\sup\{\sup E'_n\} = +\infty$ トナル. 完全デアルコトハ補題7カラ判ルカラ X ハ "正則" トナル。

§1. ニ於テ述ベタ如ク定義1.1 デ "正則" ヲ K_δ^- 型

トシテヨイ。

§3. K－空間ノ性質，K－空間

補題1. Banach束ガK－空間トナル條件ハ任意ノ可分部分Banach束ガK－空間トナルコトデアル。

(証) K－空間ノ條件カラ自明.

補題2. K－空間ノ任意ノ正規イデヤルハK－空間デアル。

(証) 自明

定理3.1. K－空間ハ弱完備デアル。

(証) XヲK－空間トスル．$\{x_n\}$ヲXノ弱基本列トスルトキ$f\in\overline{X}$ニ對シテ$f(x_n)\longrightarrow f(y)$ナル$y\in X$ノ存在ヲ証明スレバ充分，$X$ガ可分．從ッテ單位$e$ヲモチ$x_n$ガ$e$ニ関シテ有界ノトキニ証明スレバヨイ。$\{\Omega, e, \mu(E)\}$デ$X$ノ表現ブール空間$\Omega$上ヘ$e$ヲ恒等的ニ$1$ニスル$X$ノ表現デ，$\mu(E)$ハベクトル値測度函數ヲ表スモノトスル．即チBorel集合Eノ特性函数ト對等ナ連續函數ヲ表現函數トスルXノ要素ヲ$\mu(E)$ト定メルノデアル．$\mu(E)$ハ(o)－收斂デ完全加法的デアル。Xガ可分ノトキ正要素$g\in\overline{X}$ヲ適當ニトルト$g(|x|)=0$カラ$|x|=0$トナル。

今$m(E)=g(\mu(E))$ト置クト$m(E)$ハΩノ測度函數デ$m(E)=0$トEガ第一種ノ集合トハ同義ニナル．コノ性質ガ以下ニ重要ナ役割ヲスル．$f\in\overline{X}$ニ對シ$m_f(E)=f(\mu(E))$スルトキ$m_f(E)$ハ$m(E)$ニ関シテ絶對連續デアルカラRadon－Nikodymノ定理カラ（今述ベタ注意ヲ顧

應シテ)

$$m_f(E)=\int_E F(\zeta)\,dm$$

トナル Ω 上ノ連續函數(第一種集合ヲ除イテ有限値ヲトル) $F(\zeta)$ ガ一意ニ定マル。コノトキ $f(x)$ ハ $(0)-$連續線形汎函數デアルカラ $x\in X$ ノ表現函數ヲ $x(\zeta)$ トスルト

$$(1)\quad f(x)=\int_\Omega x(\zeta)F(\zeta)\,dm$$

ガ成立ツ。任意ノ有界連續函數 $F(\zeta)$ ニ對シテハ, 逆ニ(1)ニヨッテ定義サレル線形汎函數 f ハ $\overline{X}$ ニ屬スル。コノ性質ガアルタメ, 可積分函數空間ノ弱完備性カラ, スベテノ有界ナ $F(\zeta)$ ニ應ズル $f\in\overline{X}$ ニ對シテ

$$(2)\quad \lim_{n\to\infty} f(x_n)=\lim_{n\to\infty}\int_\Omega x_n(\zeta)F(\zeta)\,dm$$

$$=\int_\Omega \xi(\zeta)F(\zeta)\,dm$$

トナル。第一種集合ヲ除イテ有限値ヲトル連續函數 $\xi(\zeta)$ ガ存在スル。$\xi(\zeta)$ ガ X ノ要素ノ表現函數デアルコトト任意ノ $f\in\overline{X}$ ニ對シ(2)ガ成立ツコトヲ云ヘバヨイ。

$f(P_{\mathfrak{a}}x)$ ($P_{\mathfrak{a}}x$ ハ正規イデヤル $\mathfrak{a}$ ヘノ x ノ射影ヲ表ス)ハ x ノ $(0)-$連續線形汎函數デアルコトニ注意スルト(2)ニ於テ $\xi(\zeta)\geqq 0$ トシ, f ガ正線形汎函數従ッテ $F(\zeta)\geqq 0$ ノトキニ証明スレバ充分デアル。$\{\|x_n\|\}$ ハ有界列ニナルカラ $\|x_n\|\leqq 1$ トシテ差支ヘナイ。$0\leqq f\in\overline{X}$,

$\|f\| \leqq 1$ トシテ，之ニ應ズル $F(\mathfrak{z})$ カラ $F_p(\mathfrak{z})=\min(F(\mathfrak{z}), p)$ ヲ作リ，$F_p(\mathfrak{z})$ ニ應ズル $\overline{X}$ ノ要素ヲ f_p デ表ス．$\xi_N(\mathfrak{z})=\min(\xi(\mathfrak{z}), N)$ トスレバ $\xi_N(\mathfrak{z})$ ハ有界デアルカラ X ノ要素ノ表現函數デアル。コノ X ノ要素ヲ ξ_N デ表ス。

$$f_p(\xi_N)=\int_\Omega \xi_N(\mathfrak{z})\,F_p(\mathfrak{z})\,dm \leqq \int_\Omega \xi(\mathfrak{z})\,F_p(\mathfrak{z})\,dm$$
$$=\lim_{n\to\infty} f_p(x_n) \leqq 1$$

コノ式カラ $p\to\infty$ ノ場合ヲ考ヘルト $f(\xi_N)\leqq 1$．任意ノ $\overline{X}$ ノ正要素 f, $\|f\|\leqq 1$ ニ對シコノ不等式ガ成立ツカラ $\|\xi_N\|\leqq 1$．K-空間ノ性質 (VI) カラ $\vee\xi_N$ ガ存在スル，ソノ表現函數ハ明カニ $\xi(\mathfrak{z})$ デアル．$\xi=\vee\xi_N$ トオク．

(3) $$f_E(x)=\int_E x(\mathfrak{z})\,F(\mathfrak{z})\,dm=\int_\Omega x(\mathfrak{z})\,F_E(\mathfrak{z})\,dm.$$

コヽニ $F_E(\mathfrak{z})=F(\mathfrak{z})\times$（$E$ ノ特性函數）

ト選クト，$\lim_{n\to\infty} f_E(x_n)$ ガ存在スルカラ，f ヲ固定シテ考ヘルト Hahn ノ定理[1] ヲ使フト．集合函數 $\{f_E(x_n)\}$, $f_E(\xi)$ ハ equi-absolutely continuous デアル．正數 ε ヲ任意ニトルトキ，正數 δ ガ存在シテ $m(E)<\delta$ ノトキ，スベテノ n ニツイテ $|f_E(x_n)|<\varepsilon$, $|f_E(\xi)|<\varepsilon$ トナル．$E_p=[F(\mathfrak{z})\leqq p]$ トスルトキ p ヲ充分大ニトレバ $m(\Omega-E_p)<\delta$ トナル，故ニ

$$f(x_n)-f(\xi)=\{f_{E_p}(x_n)-f_{E_p}(\xi)\}+\{f_{\Omega-E_p}(x_n)-f_{\Omega-E_p}(\xi)\}$$
$$=\left\{\int_\Omega x_n(\mathfrak{z})\,F_{E_p}(\mathfrak{z})\,dm-\int_\Omega \xi(\mathfrak{z})\,F_{E_p}(\mathfrak{z})\,dm\right\}$$

$$+\{f_{\Omega-E_p}(x_n)-f_{\Omega-E_p}(\xi)\}$$

カラ $\lim_{n\to\infty}\int x_n(\zeta)F_{E_p}(\zeta)\,dm=\int_{\Omega}\xi(\zeta)F_{E_p}(\zeta)\,dm$

トナルカラ，$\lim f(x_n)=f(\xi)$ が証明サレル．（証終リ）

コレカラ

定理3.2. Banach束ガK－空間ニナル條件ハ弱完備デアル。

故ニ弱完備Banach束ヲK－空間ト定義シテモヨイ．

定理3.3. K－空間ノ(o)－有界集合ハ制限的弱コムパクトデアル。(1)

(注意) 弱コムパクトトハ列的弱コムパクトノ意味．從ッテ勿論位相的ニモ弱コムパクトデアル．後デ(o)－有界集合ガ制限的弱ビコムパクトナルコトヲ証明スル（§ ）

(証) Xガ可分デ単位eヲモチ，$\{x_n\}$ガ $0\leqq x_n\leqq e$ ノトキ$\{x_n\}$ノ弱收斂部分列ノ存在ヲ証明スレバヨイ。表現$(\Omega, e, \mu(E))$(2)ヲ考ヘル．定理3.1ノ証明中ノ記法ヲ使フト

(補頁脚註) (1) Saks. Trans. Amer. Math. Soc. 35(1933) 549–556.

脚註

(1) 小笠原藤次郎，紙數誌，1035 定理1.

(2) 定理3.1ノ証明中.

$$m_f(E)=\int_E F(\mathfrak{z})\,dm$$

$$(1)\quad f(x)=\int_\Omega x(\mathfrak{z})F(\mathfrak{z})\,dm$$

$0\leqq x_n\leqq e$ カラ $0\leqq x_n(\mathfrak{z})\leqq 1$. 有界ナ $F(\mathfrak{z})$ ニ對シ, $\{x_n\}$ ノ部分列 $\{x'_n\}$ ト $\xi(\mathfrak{z})$ ガ存在シ

$$(2)\quad \lim f(x'_n)=\int_\Omega \xi(\mathfrak{z})F(\mathfrak{z})\,dm$$

明ニ $0\leqq\xi(\mathfrak{z})\leqq 1$. 故ニ $\xi(\mathfrak{z})$ ハ X ノ要素ノ表現函數デアル. コノ X ノ要素ヲ ξ トスル. (2) ガ任意ノ $f\in\overline{X}$ ニ對シテ成立ツコトヲ證明スルニハ $F(\mathfrak{z})\geqq 0$ ノトキ, 即チ $f\geqq 0$ ノトキニ證明スレバヨイ。定理3.1.ノ證明ノ最後ノ部分ヲ繰返シ述ベレバヨイコトニナル. (證終リ)

定理3.3ノ證明デハ(VI)ヲ使ッテイナイ. コノ注意ハ後デ必要ニナル. 定理3.3カラ, ソノ逆ノ問題ヲ考ヘルコトガ自然デアル。

定理3.4. Banach 束 X ノ任意ノ區間ガ弱コムパクト(列的或ハ位相的)ナルタメノ條件ハ X ガ σ―完全デ(V)ガ成立ツコトデアル. 或ハ(V)ノ代リニ之レト同義

(V)′ $x_n\downarrow 0$ ノトキ $\{x_n\}$ ハ 0 ニ弱收斂スル.

トシテモヨイ。

(注意) X ノ σ―完全ト(V)ヲ一ツニ纏メルト

$0\leqq x_{n+1}\leqq x_n$, $n=1,2,\text{----}$ ノトキ x_n ハ

強(弱)収斂スル.

コトニナル。

(証) 必要ナルコトノ証. $0 \leqq x_{n+1} \leqq x_n$, $n=1, 2, \cdots\cdots$ ノトキ $\{x_n\}$ ノ少クトモ一ツノ弱位相デノ集積点ガ存在スル. コレヲξトスルト, $0 \leqq f \in \bar{X}$ ニ対シ明カニ $f(\xi) \leqq f(x_n)$, $\lim f(x_n) = f(\xi)$ ガ成立ツ. コレカラξガ$\{x_n\}$ノ弱収斂極限デ$\xi = \wedge x_n$ ナルコトガ判ル. コレカラXハσ一完全且(V)ガ成立ツコトガ判ル. 完全ナルコトヲ証明スルマヘニ次ノ定義ヲ設ケル。

定義3.1. (V)ヲ満足スルσ一完全Banach束ヲK^-一空間トイフ.

K^-一空間ガ(VI)ヲ満足スルトキ始メテK一空間ニナル. K^-一空間ノ任意ノ区間ガ弱コムパクトナルコトヲ示セバヨイ. 先ヅ次ノ補題カラ始メル.

補題3. K^-一空間ハ完全ベクトル束デアル.

(証) Eヲ正要素カラナル任意ノ(0)一有界集合トスル. $x, y \in E$ ノトキ $x \smile y \in E$ トシテ差支ヘナイ. $\lambda = l.u.b.(\|x\| ; x \in E)$ ト置クトλハ有限. Eノ可附番部分集合ノl.u.b.デノルムガλトナルモノノ全体ヲE_1トスル. §2. 補題7ノ証明ヲ繰返スコトニヨッテE_1ノウチニ sup Eガ存在スルコトガ判ル. (コノ場合(VI)ヲ使ハナイデスムコトハ, 空間ヲ最初カラBanach束トシタコトカラ).

定理3.5. K^-一空間ハK_6^-型"正則"ベクトル束デ

アル。

(証) §1 ノ (i) ノ成立ヲ証明スレバヨイ。方法ハ定理2.2ノ証明ノ初メノ部分ト同ジ。(証終リ)

K⁻空間ハ K_δ^- 型正則 Banach 束トシテ特性ヅケラレル。K⁻空間ハ必ズシモ K−空間デナイ。例トシテ既述ノ如ク (C_0) ヲトレバヨイ。明カニ

補題4. K⁻空間デハ

$(V)^*$ $x_\delta \downarrow 0$ ナル directed set $\{x_\delta\}$ ニ對シ $\|x_\delta\| \to 0$

コレカラ定理3.4ノ充分條件ノ証明ニイル．Xガ可分デ単位 e ヲモチ $0 \leqq x_n \leqq e$ ノトキ $\{x_n\}$ カラ弱收斂部分列ノ存在ヲ示セバ充分デアル．コレハ定理3.3ノ証明ト同様ニ出来ル。(証終リ)

§4. 共軛空間ノ表現ブール空間

補題1. X ヲ Banach 束トスル．X_0 ガ X ノ正規部分空間デ，K−空間 且ツ X_0 ニ直交スル X ノ要素ガ存在シナイトキハ $X_0 = X$ トナル。

(証) X_0 ガ正規イデヤルナルコトヲ示セバ可．$x \geqq 0$ ガ $x = \vee(x_\alpha;\ 0 \leqq x_\alpha \in X_0)$ ノトキ $\|x_\alpha\| \leqq \|x\|$ カラ K−空間ノ性質ヲ使ッテ $x \in X_0$ トナルコトカラ明カデアル。

補題2. X ヲ σ−完全ベクトル束トスル。(o)−連續線形汎函数 $f(x)$, $g(x)$ ガ $f \frown g = 0$ ノトキ X ノ任意ノ正要素 a ニ對シ $a = a_1 + a_2$, $a_1 \frown a_2 = 0$, $f(a_2) = 0 = g(a_1)$

ナル a_1, a_2 ガ存在スル。

(証) a ヲ X ノ単位トシテ証明スレバ充分. X ノ主イデヤルノ作ル表現ブール空間ヲ Ω トシ $(\Omega, a, \mu(E))$ [1] ヲ考ヘル。$m_f(E) = f(\mu(E))$, $m_g(E) = g(\mu(E))$ トスルト $f(x) = \int_\Omega x(\mathfrak{z})\, dm_f$, $g(x) = \int_\Omega x(\mathfrak{z})\, dm_g$ トナル。

$f \frown g = 0$ ハ $m_f \frown m_g = 0$ ト同義デアル。コレカラ基本開集合 Ω_1, Ω_2, $\Omega_1 + \Omega_2 = \Omega$ ガ存在シ $m_f(E\Omega_2) = 0$, $m_g(E\Omega_1) = 0$ トナル. Ω_1, Ω_2 ノ特性函數ヲ表現函數トスル X ノ要素ヲ a_1, a_2 トスレバ, コレガ上述ノ性質ヲモツコトハ明カデアル。(証終リ)

以下本§ニ於テ明カニ断ラナイ限リ X ハ K^- 空間トスル。

定義4.1. A ヲ X ノ任意ノ部分集合トスル。
$A^+ = (f;\ |f|(|x|) = 0,\ x \in A,\ f \in \overline{X})$ ト定メル。

A ガ正規部分空間ノトキ, 定義ノナカデ $|f|(|x|) = 0$ ノ代リニ $f(|x|) = 0$ 或ハ $f(x) = 0$ トシテヨイコトハ明カデアル。マタ A ガ主イデヤル $\mathfrak{A}(e)$ ノトキハ e ニ関スル特性要素 e_1 ノ全体ヲ考ヘ $f(e_1) = 0$ トシテヨイ。

定義4.2. B ヲ $\overline{X}$ ノ任意ノ部分集合トスルトキ,
$B^* = (x;\ |f|(|x|) = 0,\ f \in B,\ x \in X)$ ト定メル。

コレニツイテ定義4.1ノトキト同様ナ注意ヲナスコト

---

(1) a ヲ恒等的ノ一表現スル x ノ表現. ベクトル値測度函數ハ基本開集合ヲ含ム最小ノ Borel 族デ定義サレル.

ガ出来ル。

補題3. A^{+}, B^{*} ハ夫々 $\overline{X}$, X ノ正規イデヤルデアル。

(証) 定義カラ A^{+}, B^{*} ガ正規部分空間デアルコト明カデアル。$g \in \overline{X}$ ヲ $g = \vee(f_\alpha;\ 0 \leqq f_\alpha \leqq g,\ f_\alpha \in A^{+})$ トスルトキ g ノ定義カラ $g(|x|) = 0$, $x \in A$ ガ成立ツカラ $g \in A^{+}$ 即チ A^{+} ハ正規イデヤルニナル。次ニ

$y = \vee(x_\alpha;\ 0 \leqq x_\alpha \leqq x,\ x_\alpha \in B^{*})$ トスルトキ, X ハ K^{-}空間デアルカラ, 可附番個ノ x_α, 例ヘバ $\{x_n\}$ ノ $l.u.b.$ ニナル。並ニ $x_n \leqq x_{n+1}$ トシテヨイ. $\{x_n\}$ ハ y ニ強収斂スル. 従テ $|f|(x_n) = 0$, $f \in B$ ノトキ $f(y) = 0$ トナルカラ $y \in B^{*}$, 即チ B^{*} ハ正規イデヤルデアル。

補題4. $\mathfrak{a}$ ガ X ノ正規イデヤルノトキ $\mathfrak{a}^{+*} = \mathfrak{a}$

(証) 明カニ $\mathfrak{a}^{+*} \supset \mathfrak{a}$. $\mathfrak{a}^{+*} \neq \mathfrak{a}$ トスルト, $\mathfrak{a}^{+*}$ ガ正規イデヤルデアルカラ $\mathfrak{a}^{+*}$ ノ正要素 $x > 0$ ガ存在シテ $\mathfrak{a}$ ノスベテノ要素ニ直交スル. Hahn-Banach ノ定理ヲ使フト $f(x) > 0$ ナル $0 < f \in \mathfrak{a}^{+}$ ガ存在スルコトガ判ル. コレハ $f \in \mathfrak{a}^{+*}$ ト矛盾スル. 故ニ $\mathfrak{a}^{+*} = \mathfrak{a}$ トナル。

補題5. $\mathfrak{b}$ ガ $\overline{X}$ ノ正規イデヤルノトキ $\mathfrak{b}^{*+} = \mathfrak{b}$.

(証) $\mathfrak{b}^{*+} \supset \mathfrak{b}$ ナルコトハ明カデアル. $\mathfrak{b}^{*+} \neq \mathfrak{b}$ トスルト, $\mathfrak{b}^{*+}$ ガ正規イデヤルデアルカラ, $\mathfrak{b}^{*+}$ ノ正要素 $g > 0$ ガ存在シテ, $\mathfrak{b}$ ノスベテノ要素ト直交スル. $g > 0$ ノ定義カラ $g(a) > 0$ ナル X ノ正要素 a ガ存在スル. コヽニ a ハ $0 \leqq b < a$ ノトキ $g(b) < g(a)$ ト假定シテヨイ。(何者、$0 \leqq a_\alpha$, $a_\beta \leqq a$, $g(a) = g(a_\alpha) = g(a_\beta)$ ノトキ

$g(a)-g(a_\alpha \frown a_\beta)=g((a-a_\alpha)\smile(a-a_\beta)) \leqq g(a-a_\alpha)$ $+g(a-a_\beta)=0$ カラ $g(a_\alpha \frown g_\beta)=g(a)$ トナル．コレカラ $\bigwedge a_\alpha$ ガ上述 a ノ性質ヲモツカラ)．今 f ヲ $\mathfrak{L}$ ノ任意ノ正要素トスル．$f \frown g=0$ カラ，補題2ニヨリ $a=a_1+a_2$，$a_1 \frown a_2=0$，$f(a_2)=0=g(a_1)$ ナル a_1, a_2 ガ存在スル．a ノ性質カラ $a=a_2$ トナル．故ニ $a \in \mathfrak{L}^*$．コレハ $g \in \mathfrak{L}^{*\prime}$ ト矛盾スルカラ $\mathfrak{L}^{*\prime}=\mathfrak{L}$ デナケレバナラヌ。

(証終)

X，$\overline{\mathrm{X}}$ ノイデヤルノ間ニ次ノコトガ成立ツ．$\mathrm{A} \rightarrow \mathrm{A}^{+*}$，$\mathrm{B} \rightarrow \mathrm{B}^{*\prime}$ ハ Birkhoff ノ closure operation デ，閉ヂタ集合ガ正規イデヤルト同義ニナル．A ノ生成スル，即チAヲ含ム，最小ノ正規イデヤルハ A^{+*} デアル．B ニツイテモ同様。

$f<g$ ヲ $g(|x|)=0$ ノトキ $f(x)=0$（即チ f ハ g ニツイテ絶對連續）ト定義スルコトト $f \in \mathfrak{N}(g)$ ト定義スルコトガ同義ニナル。X ノ要素ニツイテモ同様デアル。X ノ正規イデヤルノ作ル完全ブール代数，表現ブール空間及ビソノ点ヲ $\mathbb{N}$，Ω，$\mathfrak{z}$，$\overline{\mathrm{X}}$ ニ對シテハ $\overline{\mathbb{N}}$，$\overline{\Omega}$，$\overline{\mathfrak{z}}$ デ表ス．$\mathfrak{N} \in \mathbb{N}=\mathfrak{N}^{+\prime}$ ($\mathfrak{N}'$ ハ $\mathfrak{N}$ ノ complement) ヲ對應サセルトキ，$\mathbb{N}$ ト $\overline{\mathbb{N}}$ ノ同型對應ヲ定メル。ソノ逆對應ハ $\mathfrak{L} \in \overline{\mathbb{N}}=\mathfrak{L}^{*\prime}$ ニ對應サセル．（補題4,5）從ッテ Ω ト $\overline{\Omega}$ トノ位相的對應ガ定マル。$\mathfrak{z}$ ニ對應スル点ヲ $\overline{\mathfrak{z}}$ デ表ス。

先ヅ X，$\overline{\mathrm{X}}$ ガ単位 e，$\overline{e}$ ヲモツ場合カラ始メル．X ノ表現 $(\Omega, e, \mu(\mathrm{E}))$ ヲ考ヘル．$\overline{e}(\mu(\mathrm{E}))$ ヲ $m(\mathrm{E})$ トスル

ト $m(E)$ ハ完全加法的測度函数デ，$m(E)=0$ ハ E ガ第一種集合デアルコトト同義デアル，コレガ以下ノ推論ニ重要ナ役割ヲスル。$m_f(E)=f(\mu(E))$ ト置クト，$m_f(E)$ ハ $m(E)$ ニ関シテ絶対連續デアルカラ

$$(1)\quad m_f(E)=\int_E F(\mathfrak{z})\,dm$$

$$(2)\quad f(x)=\int_{\Omega} x(\mathfrak{z})F(\mathfrak{z})\,dm$$

ナル第一種集合ヲ除イテ有限値ヲトル連續函数 $F(\mathfrak{z})$ ガ一意ニ定マル．但シ $x(\mathfrak{z})$ ハ x ノ表現函数デアル。

$\overline{X}$ ノ表現 $(\overline{\Omega},\ \overline{e},\ \overline{\mu}(\overline{E}))$ ヲ考ヘル．f ノ表現函数ヲ $f(\overline{\mathfrak{z}})$ トスルトキ，$\mathfrak{z}\to\overline{\mathfrak{z}}$ ニヨリ $E\to\overline{E}$ トスルト

$$(3)\quad f(\overline{\mathfrak{z}})=F(\mathfrak{z})$$

$$(4)\quad \overline{\mu}(\overline{E})(e)=\overline{e}(\mu(E))$$

トナルコトヲ証明スル，(3) ノ証明ハ $[f(\overline{\mathfrak{z}})<\lambda]=[F(\mathfrak{z})<\lambda]$ ガ對應スルコト，結局 $\alpha(\overline{\mu}[f(\overline{\mathfrak{z}})<\lambda])=\alpha(\mu[F(\mathfrak{z})<\lambda])$ ガ對應スルコトヲ証明スレバヨイ。然ルニ (2) カラ

$$(5)\quad (f-\lambda\overline{e})_-(x)=\int_{[F(\mathfrak{z})<\lambda]} x(\mathfrak{z})F(\mathfrak{z})\,dm$$

(5) カラ　$\{\alpha((f-\lambda\overline{e})_-)\}^{*1}=\alpha(\mu[F(\mathfrak{z})<\lambda])$

一方　$\alpha((f-\lambda\overline{e})_-)=\alpha(\overline{\mu}[f(\overline{\mathfrak{z}})<\lambda])$

トナルカラ，$[f(\overline{\mathfrak{z}})<\lambda]$ ト $[F(\mathfrak{z})<\lambda]$ ノ對應，従テ (3) ノ成立ガ判ル。

(4) ハ (2) カラ，f ヲ $\bar{\mu}(\bar{E})$，x ヲ $\mu(E)$ トスルト，(4) ノ各辺ハ何レモ $m(E)$ トナル。

一般ノ場ハ X ノ正要素ノ集合 $\{e_\alpha\}$ ヲ

(i) $\alpha \neq \beta$ ノトキ $e_\alpha \frown e_\beta = 0$

(ii) スベテノ e_α ニ直交スル X ノ要素ハ 0 ニ限ル。

(iii) $\mathfrak{a}(e_\alpha)$ ニハ $\bar{X}$ ノ主イデヤルガ對應スル。(對應ハ勿論 $\mathfrak{a}(e_\alpha) \to \{\mathfrak{a}(e_\alpha)\}^{+1}$

ヲ滿足スル樣定メルコトガ出來ル。$\{\mathfrak{a}(e_\alpha)\}^{+1} = \mathfrak{a}(\bar{e}_\alpha)$ ナル $\bar{e}_\alpha$ ヲトリ $\{\bar{e}_\alpha\}$ ヲ作ルト (i), (ii), (iii) ニ對應シタ性質ヲモツ。$\{(\Omega_\alpha, e_\alpha, \mu_\alpha(E))\}$ デ基本開集合 Ω_α ノ特性函數ガ e_α ノ表現函數トナル X ノ表現デ，$\mu_\alpha(E)$ ヲ Ω_α ノベクトル値測度函數トスル。$\bar{e}_\alpha(\mu_\alpha(E)) = m_\alpha(E)$ トスルトキ $m_\alpha(E)$ ハ Ω_α ノ測函數デアル。f ノ $\mathfrak{a}(\bar{e}_\alpha)$ ニ於ケル射影ヲ f_α デ表シ，$f(\mu_\alpha(E)) = m_{\alpha,f}(E)$ トスルト，(1), (2) ニ對應シテ

$$(6) \quad m_{\alpha,f}(E) = \int_{\Omega_\alpha} F_\alpha(\mathfrak{z})\, dm_\alpha$$

$$(7) \quad f(x_\alpha) = \int_{\Omega_\alpha} x_\alpha(\mathfrak{z}) F_\alpha(\mathfrak{z})\, dm_\alpha, \quad x_\alpha \in \mathfrak{a}(e_\alpha)$$

ガ成立ツ連續函數 $\{F_\alpha(\mathfrak{z})\}$ ガ定マル。コレカラ定マル Ω 上ノ連續函數ヲ $F(\mathfrak{z})$ トスル。一方 $\{(\bar{\Omega}_\alpha, \bar{e}_\alpha, \bar{\mu}_\alpha(\bar{E}))\}$ ヲ考ヘルトキ $f \in X$ ニ對シ，ソノ表現函數ヲ $f(\bar{\mathfrak{z}})$ トスルト，容易ニ $f(\bar{\mathfrak{z}}) = F(\mathfrak{z})$ ナルコト及ビ

$\alpha \neq \beta$ ノトキ $\bar{\mu}_\alpha(\bar{E})(e_\beta) = \bar{e}_\alpha(\mu_\beta(E)) = 0$

及ビ $\bar{\mu}_\alpha(E)(e_\alpha) = \bar{e}_\alpha(\bar{\mu}_\alpha(E)) = m_\alpha(E)$

ガ知ラレル。マタ

$$(8) \quad f(x) = \sum_\alpha \int_{\Omega_\alpha} x(\zeta) F(\zeta)\, dm_\alpha$$

ト書カレル。但シ $\sum_\alpha$ ハ可附番個ノ項ノミ0ナイコト及ビソノ絶對收斂ヲ表ス。

次ニ，更ニ $\bar{X}$ モ K－空間（共軛空間デ(VI)ガ成立ツカラK－空間トシテモ同義）ノトキニ $\bar{\bar{X}}$ ハ如何ニ表現サレルカヲ調ベル。

先ヅ Ω ト $\bar{\Omega}$ ノ点 ζ, $\bar{\zeta}$ ヲ恒等視シ $\bar{\Omega}$ ノ代リニ Ω ト書ク。從テ $\bar{\mu}_\alpha(\bar{E})$ ノ代リニ $\bar{\mu}_\alpha(E)$ ト書ク。(7)カラ $\bar{\mu}_\alpha(E)(x) = \int_E x(\zeta)\, dm_\alpha$，特ニ x ヲ e_α トスレバ $\bar{\mu}_\alpha(E)(e_\alpha) = m_\alpha(E)$. x ヲ $\bar{\bar{X}}$ ノ要素ト考ヘ $f(x)$ ノ代リニ $x(f)$ トカクト

$$(9) \quad x(\bar{\mu}_\alpha(E)) = \int_E x(\zeta)\, dm_\alpha$$

$$(10) \quad x(f) = \sum_\alpha \int_{\Omega_\alpha} x(\zeta) F(\zeta)\, dm_\alpha$$

トナル。

次ニ $\xi \in \bar{\bar{X}}$ ナル任意ノ ξ ニ對シ $\xi(\bar{\mu}_\alpha(E)) = m_{\alpha,\xi}(E)$ トスルト，$m_{\alpha,\xi}(E)$ ハ $m_\alpha(E)$ ニ関シテ絶對連續デアルカラ

$$(11) \quad m_{\alpha,\xi}(E) = \int_E \xi_\alpha(\zeta)\, dm_\alpha$$

ナル Ω_α 上ノ連續函數 $\xi_\alpha(\zeta)$ ガ一意ニ定マリ，コレカラ

Ω上ノ連續函數$\xi(\mathfrak{z})$ガ一意ニ定マッテ

$$(12) \quad \xi(f) = \sum_{\alpha} \int_{\Omega_\alpha} \xi(\mathfrak{z}) F(\mathfrak{z}) \, dm_\alpha$$

トナル。

XガK－空間，$\overline{X}$ガK－空間（K－空間トスルコトト同義）ノトキ補題ノヲ使フト

定理4.1. K－空間ノ共軛空間ガK－空間ノトキ，コノK－空間ハ正則Banach空間デアル。[1]コトガ判ル。共軛Banach束ガK－空間ニナル條件ヲ種々考ヘルト正則Banach空間トナル條件ガ得ラレル。例ヘバ

定理4.2. 局所弱コムパクトBanach束ハ正則Banach空間デアル。

(証) Xガ局所弱コムパクトノトキ弱完備ダカラXハK－空間デアル。Xガ局所弱コムパクトノトキ$\overline{X}$モ局所弱コムパクトナリトノ定理ヲ使ヘバ$\overline{X}$モK－空間ニナル。故ニ前定理ニヨリXハ正則Banach空間ニナル。或$\overline{X}$ノ局所弱コムパクトヲ使ハズニ次ノ様ニシテ$\overline{X}$ガK－空間ニナルコトヲ証明シテモヨイ。

Xノ單位球ノ正要素ノ全体ハ$\overline{X}$ノ要素ノ弱位相デコムパクトデアルカラ§2. 補題3ノ証明法ニヨリ，Diniノ定理ヲ使ッテ$f_n \downarrow 0$ノトキ$\|f_n\| \to 0$ガ成立ツ。(VI)ハ共軛Banach束ノ常ニモツ性質ダカラ$\overline{X}$ガK－空間ニナル。

---

(1) Banach束Xガ正則ナル條件ハX及ビ$\overline{X}$ガK－空間ニナルコトデアル。(定理3.2)

(枚着ノ方法デハ位相的弱コムパクトノ意ニ解シテ定理ノ成立スルコトガ判ル).

定理4.2ハ局所弱コムパクト(列的デモ位相的デモ)ハ局所弱ビコムパクトト同義ニナルコトヲ示ス。

定理4.3. 可分共軛空間ヲモツK-空間ハ正則Banach空間デアル。

(證) K-空間ハ弱完備ナルコトニ注意スレバ,定理ノ條件カラ對角線的方法ニヨッテ,局所弱コムパクトニナリ,前定理カラ正則Banach空間ニナル。

XヲK-空間トシ,Xヲ$\overline{\overline{X}}$ニ埋藏シテ考ヘルト

定理4.4. XヲK-空間トスル. Xハ$\overline{X}$ノ(0)-連續有界線形汎函數ノ全体カラナル。

(證) $\overline{X}$ノ(0)-連續線形汎函數ノ全体ヲX_1トスルト,明ニ$X \subset X_1$, $x \in X$, $\xi \in X_1$ニ對シテ本節(10), (12)ガ成立ツカラ補題1ヲ使ッテ$X_1 = X$ナルコトガ判ル。

定理4.4カラ定理4.1ガ出ル. 又K-空間Xハ$\overline{\overline{X}}$ニ於ケル正規イデヤルデアル。Xニ束的單位eガアルトキXハ$\overline{\overline{X}}$ニ於テeノ生成スル主イデヤルデアル。定理4.4ノ逆ガ成立ツ。

定理4.5. Banach束Xガ$\overline{X}$ノ(0)-連續,有界線形汎函數ノ全体ト一致スルトキXハK-空間デアル。

(證) $\overline{X}$ハ完全ベクトル束デアル。ソノ表現ブール空間ヲ$\overline{\Omega}$トシ,表現$\{(\overline{\Omega}_\alpha, \overline{E}_\alpha, \mu_\alpha(\overline{E}))\}$ヲ考ヘル。

ナル表現函数ヲ $f(\mathfrak{p})$ トスル。$x \in X$ ニ對シ $m_{\alpha,x}(\bar{E}) = \bar{\mu}_\alpha(\bar{E})(x)$ ト定義スルト $m_{\alpha,x}(\bar{E})$ ハ完全加法的デアル。

且ツ $f(x) = \sum_\alpha \int_{\Omega_\alpha} f(\mathfrak{p})\, dm_{\alpha,x}$ ガ成立ツ。X ハ明ニ完全ベクトル束デアル。故ニ $0 \leqq x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots\cdots$ 且 $\|x_n\|$ ガ有界ノトキ $\{x_n\}$ ガ或ル X ノ要素ニ弱收斂スルコトヲ示セバヨイ。コノトキ $\lim f(x_n)$ ガ存在スルカラ

$$\xi(f) = \lim f(x_n)$$

トスルト $\xi \in \bar{\bar{X}}$, $f(x_n) = \sum_\alpha \int_{\Omega} f(\mathfrak{p})\, dm_{\alpha,x_n}$,

$m_{\alpha,x_n}(\bar{E}) \leqq \|x_n\| \|\bar{\mu}_\alpha(\bar{E})\|$ カラ

$$m_\alpha(\bar{E}) = \lim m_{\alpha,x_n}(\bar{E})$$

トスルト $m_\alpha(E)$ ハ完全加法的デ

$$\xi(f) = \sum_\alpha \int_{\Omega_\alpha} f(\mathfrak{p})\, dm_\alpha$$

トナル。$f_n \downarrow 0$ トスルト第一種集合ヲ除イテ $f_n(\mathfrak{p}) \downarrow 0$. 且ツ第一種集合デハ $m_\alpha(\bar{E}) = 0$ トナルカラ $\xi(f_n) \to 0$ 即チ $\xi(f)$ ハ (0)－連續, 有界線形汎函數ニナル。故ニ $\xi \in X$ デアル。$f(x_n) \to f(\xi)$ トナルカラ x_n ハ ξ ニ弱收斂スル。

定理4.6. K－空間ノ任意ノ區間ハ弱ビコムパクトデアル。

(証) $(0, a)$ デ $0 \leqq x \leqq a$ ナル K－空間 X ノ点 x ノ集合ヲ表ス。$\bar{X}$ ノ要素ニヨル弱位相デ $(0, a)$ ガ ビコ

ムパクトナルコトヲ証明スル。$\bar{\bar{X}}$ノ単位球ガ$\bar{X}$ニヨル弱位相デビコムパクトデアルカラ$(0, a)$ヲ$\bar{\bar{X}}$ニ埋蔵シタトキ$\bar{X}$ニヨル弱位相デ閉ヂテヰルコトヲ示セバヨイ。$(0, a)$ノ集積点ノ一ツヲξトスルト，任意ノ$0 \leqq f \in \bar{X}$ニ對シ，明カニ$0 \leqq \xi(f) \leqq f(a)$，コレカラ$\bar{\bar{X}}$デ$0 \leqq \xi \leqq a$．故ニ定理4.4カラ$\xi \in X$トナリ，$\xi \in (0, a)$ガ成立ツ。

$\bar{K}$一空間ニ對シテモ，本節(10)，(12)カラ，Xガ$\bar{K}$一空間ノトキ，Xハ$\bar{\bar{X}}$ニ於テ正規部分空間ヲ作ルコトガ判ルカラ定理4.6ト同一法デ

定理4.7. $\bar{K}$一空間ノ任意ノ區間ハ弱ビコムパクトデアル。

ガ判ル。従ッテ$\bar{K}$一空間ハ任意ノ區間ガ弱ビコムパクトナ*Banach*束トシテ特性ヅケラレル。(定理3.4)．換言スレバ*Banach*束ノ任意ノ區間ガ弱ビコムパクトト任意ノ區間ガ弱コムパクト(列的或ハ位相的)ハ全ク同義デアル。

§5. 共軛空間ガ可分ナ*Banach*束

Xヲ*Banach*束トシ，ソノ共軛*Banach*束$\bar{X}$ガ可分トスル。$\bar{X}$ノ単位球デ稠密ナ可附番集合ヲ$\{f_n\}$トスル。

ξヲ$\bar{\bar{X}}$ノ任意ノ要素トスルト，*Helly*ノ定理ヲ使ヘバ，ξハXノ要素列$\{x_n\}$ノ弱極限ニナルコトガ知ラレル。(何者，x_nヲ$\xi(f_1) = f_1(x_n), \cdots\cdots, \xi(f_n) = f_n(x_n)$，$\|x_n\| \leqq \|\xi\| + 1$トスレバヨイ。) $\bar{X}$ハ共軛*Banach*束デ

アルカラ完全デアル，且ツ単位ガ存在スル。之ヲ$\bar{e}$トスル。
$\bar{X}$ノ表現$(\bar{\Omega}, \bar{e}, \bar{\mu}(\bar{E}))$ヲ考ヘ$f$ノ表現函数ヲ$f(\bar{\mathfrak{z}})$デ表ス。

Xガ可分ニナルカラ，Xモ単位ヲモツ。コレヲeトスル。$\bar{\mu}(\bar{E})(e) = m(\bar{E})$ト置クト$m(\bar{E})$ハ完全加法的，且$m(\bar{E})=0$ト$\bar{E}$ガ第一種集合トガ同等ニナル様$e$ヲトルコトガ出来ル。$m_x(\bar{E}) = \bar{\mu}(\bar{E})(x)$トスレバ，$m_x(\bar{E})$ハ完全加法的デ$m(E)$ニ関シテ絶対連続デアル。故

$$(1)\quad m_x(\bar{E}) = \int_{\bar{E}} x(\bar{\mathfrak{z}})\,dm$$

ナル連続函数$x(\bar{\mathfrak{z}})$ガ一意ニ定マリ，任意ノ$f \in \bar{X}$ニ対シ

$$(2)\quad f(x) = \int_{\bar{\Omega}} x(\bar{\mathfrak{z}})\, f(\bar{\mathfrak{z}})\,dm$$

トナル。$\xi \in \bar{\bar{X}}$ヲ$\bar{X}$ノ任意ノ(O)-連続線形汎函数トスルトキ，$m_\xi(\bar{E}) = \xi(\bar{\mu}(\bar{E}))$トオクトキ

$$(3)\quad m_\xi(\bar{E}) = \int_{\bar{E}} \xi(\bar{\mathfrak{z}})\,dm$$

ナル連続函数$\xi(\bar{\mathfrak{z}})$ガ一意ニ定マリ，任意ノ$f \in \bar{X}$ニ対シ

$$(4)\quad \xi(f) = \int_{\bar{\Omega}} \xi(\bar{\mathfrak{z}})\, f(\bar{\mathfrak{z}})\,dm$$

ガ成立ツ。カヽルξノ全体ヲX_1トスル。X_1ハBanach束デXヲ担識スル。$\bar{\bar{X}} = X_1$ナルコトヲ証明スル。ξヲ$\bar{\bar{X}}$ノ任意ノ要素トスルトキ，ξハXノ$\{x_n\}$ノ弱収斂極限

デアルカラ

$$(5)\quad \xi(f) = \lim \int_{\Omega} x_n(\mathfrak{z}) f(\mathfrak{z})\, dm$$

可積分函数空間ノ定理ニヨリ，スベテノ有界ナ $f(\mathfrak{z})$ ニ對應スル f ニ對シ

$$(6)\quad \xi(f) = \lim \int_{\Omega} x_n(\mathfrak{z}) f(\mathfrak{z})\, dm = \int_{\Omega} \xi(\mathfrak{z}) f(\mathfrak{z})\, dm$$

ナル連續函數 $\xi(\mathfrak{z})$ ガ存在スル。(6) ガ任意ノ f ニツイテ成立ツコトヲ言ヘバ $\xi \in X$，トナルコトガ容易ニイヘル。

先ヅ，任意ノ f ニツイテ (6) ノ最後ノ辺ノ積分ガ存在スルコトヲ示スニハ，$\xi(\mathfrak{z}) \geqq 0$，$f(\mathfrak{z}) \geqq 0$ トシテ差支ヘナイ。

$f_n(\mathfrak{z}) = \min(f_n(\mathfrak{z}), n)$ ト置クト，

$\int_{\Omega} \xi(\mathfrak{z}) f_n(\mathfrak{z})\, dm \leqq (\|\xi\|+1)\|f_n\| \leqq (\|\xi\|+1)\|f\|$ カラ

$\int_{\Omega} \xi(\mathfrak{z}) f(\mathfrak{z})\, dm$ ノ存在ガ判ル。後ハ定理3.1ノ証明ノ最後ノ部分ニナラヘバヨイ，

定理5.1 Banach 束 X ノ共軛 Banach 束 $\overline{X}$ ガ可分ノトキ $\overline{X}$ ハ K-空間デアル。

（証） (VI) ハ共軛 Banach 束ガ常ニモツ性質ダカラ，(V) ノ成立ヲ証明スレバヨイ。$f_n \downarrow 0$ トスレバ第一種集合ヲ除イテ $f_n(\mathfrak{z}) \downarrow 0$．且ツ第一種集合 E ハ $m(E) = 0$ トナルカラ

$$\xi(f_n) = \int_{\Omega} \xi(\mathfrak{z}) f_n(\mathfrak{z})\, dm$$

カラ $\xi(f_n)\to 0$ トナル．故ニコレカラ (V) ノ成立ガ判ル。

定理5.2. Banach束Xニ対シ$\overline{\overline{X}}$ガ可分ノトキXハ正則Banach空間デアル。

(証) $\overline{X}$ハ可分ニナルカラ，$\overline{X}$モ$\overline{\overline{X}}$モK－空間ニナル．故ニ$\overline{X}$ハ正則，従テXモ正則デアル。

定理5.3. Banach束Xガ$\overline{\overline{X}}$トBanach束トシテ同型トスル．Xガ可分ナラバXハ正則デアル。

(証) 定理5.2カラ．

次ニBanach束Xガ$\overline{X}$トBanach束トシテ同型トスル．Xガ可分トスルトキ，$\overline{X}$モ可分，コレカラ$\overline{\overline{X}}$モ可分トナルカラXハ正則トナル．$x\in X$ニ対応スル要素ヲ$\bar{x}$デ表スト，$f(\mathfrak{z})$ノ代リニ$\bar{x}(\mathfrak{z})$ト書イテ

(2) カラ

$$(1)\quad \bar{x}(x)=\int_{\mathfrak{R}} x(\mathfrak{z})\bar{x}(\mathfrak{z})\,dm$$

ガ成立スル．$\bar{x}(\mathfrak{z})$ハ$\bar{x}$ノ表現函数デアル．今$x(\mathfrak{z})$ヲ$\bar{x}$ノ表現函数ト見ルト表現ノ単独性カラ$\mathfrak{R}$ヲ$\mathfrak{R}$ニ移ス位相的変換$T\mathfrak{z}$ガ存在シテ$x(\mathfrak{z})=\bar{x}(T\mathfrak{z})$トナル．$T\mathfrak{z}\neq\mathfrak{z}$ナル$\mathfrak{z}$ガ存在スルトキハ正要素$x>0$デ$\bar{x}(x)=0$ナルモノガアル．故ニ$x>0$ノトキ$\bar{x}(x)>0$ナル條件ヲ満足スレバ$\mathfrak{z}=T\mathfrak{z}$トナル．コノトキ$\bar{x}(\mathfrak{z})=x(\mathfrak{z})$トナルカラ

定理5.4. Banach束Xガ$\overline{X}$トBanach束トシテ同型デ，$x\in X$ニ対応スル$\overline{X}$ノ要素ヲ$\bar{x}$トスルトキ，

$x>0$ ナラバ $\bar{x}(x)>0$ ヲ満足スルモノトスル。モシ X ガ可分ナラバ $\|x\|^2=\bar{x}(x)$ トナル。コレカラ X ハヒルベルト空間デ $\bar{x}(y)$ ハ x, y ノ内積ニナル。

ガ成立ツコトガ判ル。

定理5.5. 前定理ニ於テ $x>0$ ノトキ $\bar{x}(x)>0$ ナル條件ヲ $x \frown y=0$ ノトキ $\bar{x}(y)=0$ デオキカヘテモヨイ。

(証) アル $x>0$ ニ對シ $\bar{x}(x)=0$ トスル。x ノスベテノ直交要素ノ作ル正規イデヤルヘノ e ノ射影ヲ e_1 トスルト $x+e_1$ ハ X ノ単位デアル。$\bar{x}(x+e_1)=\bar{x}(x)+\bar{x}(e_1)=0$ カラ $\bar{x}=0$ 即チ $x=0$ トナリ矛盾ヲ起ス。

§6. 問題

X ガ K-空間ノトキ、恐ラク $\bar{\bar{X}} \in$ K-空間ニナルモノト予想サレルガ、コレニ對スル解答ガ與ヘラレナイ。Banach 空間デイフト、X ガ弱完備ノトキ $\bar{\bar{X}}$ モ弱完備デアルトイフ問題ニナル。Banach 空間論デハ X カラ $\bar{X}$ ヘノ移行ニ於テ保存サレル性質ノ研究ハアルガ X カラ $\bar{\bar{X}}$ ヘノ移行ニ於テ保存サレル性質ノ研究ハ乏シイ。

上ノ問題ニ對スル解答デハナイガ、共軛 Banach 束ガ K-空間ニナル條件ヲ與ヘテオク。

定理6.1. Banach 束 X ノ共軛 Banach 束 $\bar{X}$ ガ K-空間ニナル條件ハ、X ヲ $\bar{\bar{X}}$ ニ埋藏シタトキ X ニ直交スル $\bar{\bar{X}}$ ノ要素ハ0以外ニ存在シナイコト、換言スレバ X ヲ含ム最小ノ正規イデヤルガ $\bar{\bar{X}}$ ト一致スルコトデアル。

(証) 必要ナルコトノ証。$\bar{X}$ ガ K-空間トナッタトス

ル。X ヲ $\overline{\overline{X}}$ ニ埋藏スルトキ，§1ノ記法ヲ使ツテ，$\overline{X}$ ト $\overline{\overline{X}}$ ノ正規イデアルノ對應デ $X^{\times +} = \{0\}^+ = \overline{\overline{X}}$ トナル。

充分ナルコトノ証　$\{e_\alpha\}$ ヲ $\alpha \neq \beta$ ノトキ $e_\alpha \frown e_\beta = 0$ スベテノ e_α ニ直交スル X ノ要素ハ 0 以外ニ存在シナイ様ナ X ノ正要素ノ集合トスル。$\overline{X}$ ニ埋藏シテモ $\overline{\overline{X}}$ デ同ジ性質ヲモツ。ξ ヲ $\overline{\overline{X}}$ ノ任意ノ正要素トシ，$\overline{X}$ ニ於テ e_α ノ生成スル主イデアル $\mathfrak{n}(e_\alpha)$ ヘ ξ ノ射影ヲ ξ_α トスレバ，
$\xi_\alpha = \lim (\xi_\alpha \frown n e_\alpha)$. $e_\alpha(f)$ ハ (o)-連續デアルカラ $\xi_\alpha(f)$ モ (o)-連續ニナル。何若 $f_n \downarrow 0$ トシ，ε ヲ任意ノ正數トスルトキ $\xi_\alpha(f_1) - (\xi_\alpha \frown n e_\alpha)(f_1) < \varepsilon$ ヲ滿足スル n ガ存在スル。$\xi_\alpha(f_m) \leqq (\xi_\alpha \frown n e_\alpha)(f_m) + \xi_\alpha(f_1) - (\xi_\alpha \frown n e_\alpha)(f_1) \leqq (\xi_\alpha \frown n e_\alpha)(f_m) + \varepsilon$ カラ $\xi_\alpha(f_m) \to 0$ ナルコトヲ知ル。マタ $\xi_\alpha(f_1) > 0$ ナル α ハ高々可附番個デアツテ $\xi(f_1) = \sum_\alpha \xi_\alpha(f_1)$. コレカラ $\xi(f_n) \to 0$ ヲ証明スルコトガ出來ル。故ニ $\|f_n\| \to 0$ トナリ (V) ガ成立ツ。(VI) ハ共軛 Banach 束ガ常ニモツ性質ダカラ $\overline{X}$ ハ K-空間ニナル。

コノ定理カラ $\overline{X}$ ガ K-空間ノトキ X ニ單位ガ存在スレバソレハ $\overline{\overline{X}}$ ノ單位ニナルコトガ判ル。

§7. ベクトル束

§6マデニ述ベタ結果ヲ，ベクトル束ヘ擴張スルニハ，証明法ガベクトル束ヘ適合スルヤウ概念構成ヲスレバヨイ。ベクトル束自体ハ空間トシテ豊富ナ内容ヲモツモノデナイカラ，興味アル結果ヲ期待スルコトハ出來ナイ。二三

蛇足ヲ加ヘテミル。

Xヲベクトル束トシ，Xノ有界線形汎函数[1]ノ全体ヲ$\overline{X}$トスル。$\overline{X}$ハ完全ベクトル束トナルコトハ周知ノ通リデアル。Xガ條件

(※)　任意ノ正要素$x>0$ニ正値ヲ與ヘル有界線形汎函数ガ存在スル。

ヲ満足スレバ明カニアルキメデス的デアル。共軛ベクトル束ハ常ニ(※)ヲ満足スル。

補題1.[2]　(※)ヲ満足スルベクトル束ニ對シ，任意ノ$0<f\in\overline{X}$ニ對シ$f(x_0)\geqq 0$ガ常ニ成立スルx_0ハ$x_0\geqq 0$デアル。

(証)　$x_0=(x_0)_+-(x_0)_-$トシ，$(x_0)_-=0$ナルコトヲ示セバヨイ。$(x_0)_->0$ナラバ(※)トHahn-Banachノ定理カラx_0ニ負値ヲ與ヘル$0<f\in\overline{X}$ノ存在ヲ証明スルコトガ出来ル，故ニ$(x_0)_-=0$デナケレバナラヌ。

K-空間ニ對應スルベクトル束ノ概念ニ到達スルタメ次ノ條件ヲ設ケル。

(α)　$x_\delta\downarrow 0$ナルdirected setニ對シ，スベテノ$f\in\overline{X}$ニツイテ$f(x_\delta)\to 0$

(β)　Eヲ$x,y\in E$ノトキ，$x,y\leqq z\in E$ナルzノ存在スル，Xノ正要素カラナルdirected setトスル，モシ各々ノ$0\leqq f\in\overline{X}$ニ對シ$l.u.b.(f(x);x\in E)<+\infty$

(1)　Birkhoff：前掲115–116ノ意

(2)　コレニヨリXハ$\overline{X}$ニベクトル束トシテ埋藏サレル

ノトキ $\sup E \in X$.（$\sup E$ ガ存在シ $\sup E \in X$ ノ意）

K−空間ハ(※), (α), (β) ヲ満足スル. 逆ニ (α), (β) ヲ満足スル Banach 束ハ K−空間デアル. $\bar{K}$−空間ハ (※), (α) ヲ満足スル. 又 (α) ヲ満足スル σ−完全ナ Banach 束ハ $\bar{K}$−空間デアル。

X ヲ (※), (α) ヲ満足スルベクトル束トスル. §4 ノ記法ヲ踏襲スルト §4 ノ補題 2.3.4.5 ガ成立ツカラ X ノ表現ブール空間 Ω ト $\bar{X}$ ノ表現ブール空間 $\bar{\Omega}$ ノ位相的對應ガ正規イデヤルノ對應デ定メラレル。コレカラ Ω, 或ハ $\bar{\Omega}$ 上ヘ, X ハ或ハ $\bar{X}$ ノ表現ノ一ツヲ知レバ, 他ハ線形汎函數ノ積分表示ニヨッテ表現ガ得ラレル. §4 ノ記法デ $x \in X$, $f \in F$ ニ對シ, ソコノ式 $(\mathfrak{p})$

$$f(x) = \sum_{\alpha} \int_{\Omega_\alpha} x(\mathfrak{p}) F(\mathfrak{p})\, dm_\alpha ;$$

可附番個ノ項ノミガ 0 デナイ。

ガ成立スル. $x \in X$ ヲ $\bar{\bar{X}}$ ニ埋藏シテ $f(x)$ ノ代リニ $x(f)$ ト書イテモ同ジ等式ガ成立ツ。

Moore-Smith ノ意味デ (o)−連續ナ $\bar{X}$ ノ有界線形汎函數ノ形ヲ求メル, ξ ヲカヽル正線形汎函數トスル。

§4 ノ記法デ, $m_{\alpha,\xi}(E)$ ハ完全加法的且 $m_\alpha(E)$ ニ關シテ絶對連續ニナリ, (11), (12) ガ成立ツ. 逆ニ (12) ノ右辺ガ意味ヲモツ連續函數 $\xi(\mathfrak{p})$ ヲ考ヘルト, コレハ $\bar{X}$ ノ有界線形汎函數ヲ定義スル. 即チ $\bar{\bar{X}}$ ノ要素ヲ定メル. コレヲ ξ デ表シ $\xi(f)$ ヲ (12) ノ式デ與ヘルモノトスル。$\xi(f)$ ガ Moore-

Smith ノ意味デ (o)-連續ナルコトヲ示スニハ, $\xi(\mathfrak{z}) \geqq 0$ トシ $\xi(f)$ ガ $f_\delta \downarrow 0$ ナル directed set $\{f_\delta\}$ ニ對シ $\xi(f_\delta) \to 0$ ヲ滿足スルコトヲ示セバヨイ。一ツノ f_{δ} ヲトルト (1) ノ $\sum_{1}^{\infty}$ ノ 0 デナイ項ニ對應スル α ヲ $\{\alpha_n\}$ トスル. ε ヲ任意ニ與ヘタ正數トシ, 自然數 N ヲ $\sum_{N+1}^{\infty}\int_{\Omega_{\alpha_n}} \xi(\mathfrak{z}) F_{\delta_0}(\mathfrak{z})\, dm_{\alpha_n} < \varepsilon$ ナル樣ニトル. 次ニ自然數 p ニ對シ $\xi_p(\mathfrak{z})$ ヲ $\sum_{1}^{N} \Omega_{\alpha_n}$ 上デ $\min(\xi(\mathfrak{z}), p)$, ソノ他ノ点デハ 0 ト定メル. p ヲ充分大ニトル

$$\sum_{1}^{N}\int_{\Omega_{\alpha_n}} (\xi(\mathfrak{z}) - \xi_p(\mathfrak{z})) F_{\delta_0}(\mathfrak{z})\, dm_{\alpha} < \varepsilon$$

ナラシメルコトガ出來ル. $f_\delta \leqq f_{\delta_0}$ ニ對シ

$$\xi(f_\delta) = \sum_{1}^{\infty}\int_{\Omega_{\alpha_n}} \xi(\mathfrak{z}) F_\delta(\mathfrak{z})\, dm_{\alpha_n}$$

$$\leqq \sum_{1}^{N}\int_{\Omega_{\alpha_n}} \xi(\mathfrak{z}) F_\delta(\mathfrak{z})\, dm_{\alpha_n} + \sum_{N+1}^{\infty}\int_{\Omega_{\alpha_n}} \xi(\mathfrak{z}) F_{\delta_0}(\mathfrak{z})\, dm_{\alpha_n}$$

$$< \sum_{1}^{N}\int_{\Omega_{\alpha_n}} \xi_p(\mathfrak{z}) F_\delta(\mathfrak{z})\, dm_{\alpha_n} + 2\varepsilon$$

然ルニ $\xi_p(\mathfrak{z})$ ハ X ノ要素ニ對應スル $\overline{X}$ ノ線形汎函數デアル. コノ X ノ要素ヲ ξ_p ト書クト上式ハ

$$\xi(f_\delta) < f_\delta(\xi_p) + 2\varepsilon$$

故ニ $f_\delta \downarrow 0$ ノトキ $\xi(f_\delta) \to 0$ ガ成立ツコトガ判ル。

上述ハ X ガ (※), (α), $\overline{X}$ ガ (d) ヲ滿足スルトキ, $\overline{X}$ ノ有界線形汎函數ニシテ Moore-Smith ノ意味デ (o)-連

續ナモノノ全体ハ X ヲ含ムコトヲ示シテイル．X ガ (β) ヲ満足スルコトガ保証サレナイ限リ，一致スルコトハナイ。

§4ノ補題1ニ對シテハ次ノ補題2ヲ使ヘバヨイ。

補題2．ベクトル束 X ノ部分ベクトル束 X_0 ガ $(※)$, (α), (β) ヲ満足スル X ノ正規部分空間デ X_0 ニ直交スル X ノ要素ハ 0 以外ニ存在セズトスル。X_0 ノ任意ノ有界線形汎函數ガ X ノソレニ拡大サレルナラバ $X_0 = X$ ガ成立ツ。

（証）§4ノ補題4ニ準ジテ行ヘバヨイ。

定理7.1．X ガ $(※)$, (α), (β) ヲ満足スルベクトル束ノトキ，X ハ $\overline{X}$ ノ有界線形汎函數ノウチ Moore-Smith ノ意味デ (0) 連續ナルモノノ全体カラナル。

（証）X_1 ヲ $\overline{X}$ ノ有界線形汎函數ノウチ Moore-Smith ノ意味デ (0) 連續ナモノノ全体トスル。X ハ X_1 ノ正規部分空間デ補題2ノ條件ヲ満足スルカラ $X = X_1$ トナル。

定理7.2．X ガ $\overline{X}$ ノ有界線形汎函數ノウチ Moore-Smith ノ意味デ (0) − 連續ナルモノノ全体カラナリ，且 X ノ相異ナル要素ハ，異ナッタ $\overline{X}$ ノ有界線形汎函數ヲ表ストキ，X ハ $(※)$, (α), (β) ヲ満足スル。

（証）X ガ $(※)$ ヲ満足スルコトハ自明．$x_\delta \downarrow 0$ トスル．$\overline{X}$ ノ正要素 f ニツイテ $f(x_\delta) \to 0$ デナイモノガアレバ $\overline{\overline{X}}$ デハ $\bigwedge x_\delta = \xi$ トスルト $\xi > 0$

$\overline{X}$ ノ正要素 f ニ對シ $\xi(f) \leqq f(x_\delta)$ ガ成立ツカラ，$\xi(f)$ ハ Moore-Smith ノ意味デ (0) − 連續ニナル．故ニ $\xi \in X$ トナレ。コレハ $\xi > 0$ ト矛盾スル，故ニ (α) ガ成立ツ．(β)

ヲ満足スルコトモ同様ナ論法デ判ルカラ，結局 $\mathfrak{X}$ ガ (※), (α), (β) ヲ満足スルコトニナル。

定理7.2. ベクトル束 $\mathfrak{X}$ ガ $\mathfrak{X} = \bar{\bar{\mathfrak{X}}}$ ヲ満足スル條件ハ $\mathfrak{X}$ ガ (※), (α), (β) ヲ，$\bar{\mathfrak{X}}$ ガ (α) ヲ満足スルコトデアル。

(証) 必要ナルコトノ証 $\mathfrak{X} = \bar{\bar{\mathfrak{X}}}$ カラ $\mathfrak{X}$ ハ明カニ (※) ヲ満足スル．$\mathfrak{X}$ ヲ $\bar{\mathfrak{X}}$ ノ共軛ベクトル束ト考ヘレバ (α), (β) ノ成立モ容易ニ判ル．$\bar{\mathfrak{X}}$ ガ $\bar{\bar{\mathfrak{X}}} = \mathfrak{X}$ ノ共軛ベクトル束ト考ヘテ (α) ノ成立モ容易ニ証明サレル。

充分デアルコト。定理7.1カラ。

定理7.3. (※) ヲ満足スルベクトル束 $\mathfrak{X}$ ノ任意ノ區間ガ弱ビコムパクトナルタメノ條件ハ $\mathfrak{X}$ ガ (α) ヲ満足スル完全ベクトル束ニナルコトデアル。

(証) 必要デアルコトノ証 $x_\delta \downarrow 0$ トスルトキ，E_δ ヲ $x_{\delta'} \leqq x_\delta$ ナル $x_{\delta'}$ ノ集合ノ弱位相デノ閉包トスル．スベテ E_δ ニ共通ナ点ガ存在スル。コレハ 0 ニ外ナラヌ。$\bar{\mathfrak{X}}$ ノ任意ノ正要素 f ニ對シ，與ヘラレタ正数 ε ニ對シ $f(x_\delta) < \varepsilon$ ナル x_δ ガ存在スル．コレカラ $f(x_\delta) \longrightarrow 0$ ナルコトガ判ル。

充分デアルコトノ証 $0 \leqq x \leqq a$ ヲ満足スル $x \in \mathfrak{X}$ ノ全体ヲ $(0, a)$ トスル．各々ノ正要素 $f \in \bar{\mathfrak{X}}$ ニ對シ，実数區間 $[0, f(a)]$ ヲ考ヘ，コノ直積ヲ作ルト，ビコムパクト空間ヲ得ル。$x \in (0, a)$ ニハコノ積空間ノ点 $\{f(x)\}$ ガ應ズル．カヽル点ノ集合ガ閉ヂラレルコトヲ示セバヨイ。コノ集合ノ集積点ノ一ツヲ考ヘ，f ニ應ズル區間 $[0, f(a)]$ ヘノ座標ヲ

$\xi(f)$ トスルト $\xi(f)$ ハ $\overline{\overline{X}}$ ノ要素ヲ定メル。$0 \leqq \xi(f) \leqq f(a)$ カラ $\overline{\overline{X}}$ デ $0 \leqq \xi \leqq a$ トナル。$\xi(f)$ ハ Moore-Smith ノ意味デ (o) 連続トナル。$\xi(f)$ ノ積分表示式 (12) ヨリ $0 \leqq \xi(\mathfrak{z}) \leqq a(\mathfrak{z})$ トナリ $\xi \in X$ トナルコトガ判ル。

$X = \overline{\overline{X}}$ ナルベクトル束ヲ Banach 束或ハ空間ノ弱位相ニヨル特性ツケニ並行ナ概念ヲ作ルコトガ問題ニナル。例ヘバスベテノ X ノ正要素 f ニ対シ正数 c ガ対應シ (コレヲ $c(f)$ トカク) $f(|x|) \leqq c(f)$ ヲ満足スル x ノ集合ガ弱ニコムパクトト置クト X ハ (※), (α), (β) ノ成立タイヘルガ $\overline{X}$ ガ (α) ヲ満足スルカ否カハ判ラナイ。(Banach 束デハ $\overline{X}$ ガ (α) ヲ満足スルコトハイヘルガ)

(※), (α) ヲ満足スル完全ベクトル束ノ任意ノ区間ハ列的弱コムパクトナリヤヲ考ヘルガ自然デアル。$\overline{X}$ ノ単位或ハ $\{\bar{e}_\alpha\}$ ニ関スル條件ガ必要ニナルト思ハレルカラ形ガキタナクナルノデ略スル。

定理17.4. (※), (α), (β) ヲ満足スルベクトル束ハ弱完備デアル。

(証) X ヲ (※), (α), (β) ヲ満足スルベクトル束トシ、スベテノ $f \in \overline{X}$ ニ対シ $\lim f(x_n)$ ガ有限確定ノトキ、$\lim f(x_n) = f(y)$ ナル $y \in X$ ノ存在ヲ証明スレバヨイ。§4 ノ記法ヲ使フ。先ヅ $f \in \mathfrak{a}(\bar{e}_\alpha)$ ナルトキヲ考ヘル。コノトキ

$$f(x_n) = \int_{\mathfrak{B}_\alpha} x_n(\mathfrak{z})\, F(\mathfrak{z})\, dm_\alpha$$

トナル. コレカラ Ω_α 上ノ連續函數 $\xi_\alpha(\mathfrak{z})$ ガ定マリ, スベテノ $f \in \mathfrak{A}(\bar{e}_\alpha)$ ニ對シテ $\lim_n f(x_n) = \int_{\Omega_\alpha} \xi_\alpha(\mathfrak{z}) F(\mathfrak{z}) dm_\alpha$ ガ證明サレル. (定理3.1ノ證明ト同ジ考ヘ方) コノ $\xi_\alpha(\mathfrak{z})$ ヲ $\alpha < \beta$ ナル β ニ對シ Ω_β 上デ 0 トスルト, $\mathfrak{X}$ ノ要素ガ應ズル. コレヲ ξ_α トスル. コノトキ $\lim f(x_n) = f(\xi_\alpha)$.
スベテノ $\xi_\alpha(\mathfrak{z})$ カラ定マル Ω ノ連續函數ヲ $\xi(\mathfrak{z})$ トスル. $\xi(\mathfrak{z})$ ニ $\mathfrak{X}$ ノ要素ガ應ズルコトヲ示スニハ $\xi(\mathfrak{z}) \geqq 0$ トシテヨイ. $f \in \overline{\mathfrak{X}}$ ナル任意ノ正要素 f ヲ考ヘ, コレヲ固定スル. $\int_{\Omega_\alpha} x_n(\mathfrak{z}) F(\mathfrak{z}) dm_\alpha$ ハ高々可附番個ノ α ニ對シテノミ 0 デナイ. カヽル α ヲ $\alpha_n = 1, 2, \cdots\cdots$ トシ, 今正數列 λ_n ヲ $\sum \lambda_n m_{\alpha_n}(\Omega_{\alpha_n}) < +\infty$ ナル樣ニトリ

$$m(E) = \sum \lambda_n m_{\alpha_n}(E\Omega_{\alpha_n}),$$

E ハ $\sum_n \Omega_{\alpha_n}$ ノ Borel 集合

ト置クト $f(x_n) = \sum \int_{\Omega_{\alpha_n}} x_n(\mathfrak{z}) \dfrac{F(\mathfrak{z})}{\lambda_n} dm$ トナル.

$$f_E(x_n) = \sum \int_{E\Omega_{\alpha_n}} x_n(\mathfrak{z}) \frac{F(\mathfrak{z})}{\lambda_n} dm$$ ト置キコレニ Hahn ノ定理ヲ使ツテ $\lim f(x_n) = \sum \int_{\Omega_{\alpha_n}} \xi(\mathfrak{z}) F(\mathfrak{z}) dm_{\alpha_n}$ ガ證明サレル. コレガ條件 (β) ヲ使ツテ $\xi(\mathfrak{z})$ ガ $\mathfrak{X}$ ノ要素ニ對應スルコト, コノ要素ヲ y トスルト $\lim f(x_n) = f(y)$ ガ成立ツ.

定理1.5. (※) ヲ滿足スルベクトル束 $\mathfrak{X}$ ノ共軛ベクトル束 $\overline{\mathfrak{X}}$ ガ (α), (β) ヲ滿足スル條件ハ, $\mathfrak{X}$ ヲ $\overline{\overline{\mathfrak{X}}}$ ニ埋藏スルトキ $\overline{\overline{\mathfrak{X}}}$ ガ $\mathfrak{X}$ ヲ含ム最小ノ正規イデヤルトナルコトデアル.

(註) 定理6.1ト同論法。

次ニ條件(α), (β)ガ簡單ナ條件ニ置キカヘラレル場合ヲ調ベルコトニナルガ, trivialナコトヲ繰返スニスギナイカラ唯Bochner束ヲ擧ゲテオク。

定義 ベクトル束Xガ次ノ條件ヲ滿足スルトキBochner束トイフ。Xニ高々可附番個ノ正線形汎函數f_nガ存在シテ

(i) $x_n \downarrow 0$ ノトキ各々ノf_mニツイテ$f_m(x_n) \to 0$

(ii) $0 \leqq x_n < x_{n+1}$, $n = 1, 2, \cdots\cdots$ 各々ノmニツイテ$\lim_n f_m(x_n) < +\infty$ ノトキ$\vee x_n$ガ存在スル。

Bochner束ハK_6型デ正則ナベクトル束デ, 任意ノ區間ガ列的弱コムパクトデアルコトガ証明サレル。(開登)

コレカラ明ニ(※), (α), (β)ヲ滿足スルベクトル束ニナリ, 任意ノ區間ハ弱ビコムパクトニナル。又弱完備デアル。((i), (ii)ヲ滿足スルベクトル束ヲ以前ニハBochnerノ條件ヲ滿足スルベクトル束ト呼ンダ)