## 1063. 談話1031ノ補遺
## (一次連結局所群ノ separability)

岩村聯 (東大學生)

§1. 紙上談話會談話1031定理2デ、「linear continuum $L$ ガ(註1) 右ノ local group ヲナシ(註2) $L$ ノ各元 $x$ ニ對シテ左ノ逆元 $x^*$(註3) ガ存在スレバ、$L$ ハ左ノ separable デアルコトヲ述ベマシタ。コノ條件ノ下デ「$L$ ハ separable デアル」コトガワカリマシタカラ以下ソレヲ證明シマス。證明ニハ上ニ言ッタ定理ハ用ヒマセン。

---

(1) 兩端ノナイ linear order $<$ ガ定義サレタ集合デソノ order topology ニツイテ connected デアルモノ。以下 $L$ ノ topology ハ order topology トスル。

(2) 或ル $x, y \in L$ ニ對シテ積 $xy \in L$ ガ存在シ、若シ $(xy)z$ 及ビ $x(yz)$ ガ存在スレバ $(xy)z = x(yz)$. 右ノ單位元 $e$ ガアッテ、スベテノ $x$ ニ対シテ $xe$ ガ存在シテ $xe = x$. 或ル $x$ ニ對シテ右ノ逆元 $x^{-1}$ ガアッテ $x^{-1}x = e$. $xy$ ノ存在スルヤウナ pair $\{x, y\}$ 及ビ、$x^{-1}$ ノ存在スルヤウナ $z$ ハ夫々積空間 $L \times L$ 及ビ空間 $L$ ノ開集合ヲ作リ、$xy$ 及ビ $z^{-1}$ ハ $\{x, y\}$ 及ビ $z$ ノ連續函數 (Pontrjagin, Topological groups P.83 ニ於テ單ニ local group トイハレテヰルモノ)

(3) $x^*x = e$. 然シ $x^*$ ノ連續性ハ假定シナイ。

§2. 先ヅ $L$ ガ linear continuum デアルトシマス。

補助定理1. $e \in L$ トシ，$(e, +\infty)$ ノ $x$ ニ関スル條件 $\mathfrak{S}(x)$ ガ:

$P_1$ 或ル $a > e$ ニ對シテハ，スベテノ $x \in (e, a)$ ニツイテ $\mathfrak{S}(x)$ ガ満足サレル．（コレヲ簡単ニ「$(e, a)$ デ $\mathfrak{S}(x)$ デアル」トイフ）．

$P_2$ $(e, a)$ デ $\mathfrak{S}(x)$ ナラバ $a$ ノ或ル近傍デ $\mathfrak{S}(x)$ デアル。

トイフ性質 $P_1$ 及ビ $P_2$ ヲ有スレバ，$(e, +\infty)$ デ $\mathfrak{S}(x)$ デアル。

コヽデ $(e, +\infty) = (x;\ e < x)$, $(e, a) = (x;\ e < x < a)$. $L$ ニ於テ下ニ有界ナ部分集合ニ對シテハ，ソレガ空集合デナケレバ，inf. ガ存在シマスカラ，補助定理1ハ明カデス。

更ニ $L$ ガ右ノ local group デアルトシマス。

端点ニ $\pm\infty$ ヲモ許シタ区間ヲ廣義ノ区間、端点ガ何レモ $L$ ノ元デアルヤウナ区間ヲ單ニ區間ト呼ビマス。$I$, $J$ 等ハ $e$（右ノ単位元）ヲ含ム廣義ノ開区間トシマス。$e$ ヲ含ム或ル開区間ハ実数ノ開区間ト homeomorphic デス，ソノ一ツヲ取ッテ $E$ トシマス．3箇以上ノ積ニ括弧ヲツケナイデ書イタトキハ左端カラ順ニ積ヲ作ッタモノトシマス：$xyz = (xy)z$ 等。

（注意）正ノ整数 $n$ ガ與ヘラレタトシマス．$x = \xi \cdots \xi_n$

ナル $e_1, \cdots\cdots, e_n \in E$ ガ存在スルヤウナ $x$ ノ全体ハ，第二可附番性公理ヲ満足スル積空間 $\underbrace{E\times\cdots\cdots\times E}_{n}$ ノ部分集合ノ連續像デスカラ，$L$ ノ separable ナ部分集合トナリマス。從ツテ適當ナ $n$ ニツイテ上ノヤウニ書ケル $x$ ノ全体ノ集合モ separable トナリマス。

定義　「$xy$ ガ定義サレテヰル」コトヲ $x \circ y$ ト書ク。$M, N \subseteq L$ ノトキ $y \in N \rightarrow x \circ y$ ヲ $x \circ N$ ト書キ，$x \in N \rightarrow x \circ N$ ヲ $M \circ N$ ト記ス。$e < a$ ニ對シテ，

$$I_{(a)} = \bigcup_{a \circ I} I, \quad I^{(a)} = \bigcap_{e<x<a} I_{(x)}$$

ト定メル。但シ $\cup$, $\cap$ ハ夫々集合論的 join 及ビ meet.

明カニ，$M_1 \circ N_1$, $M_2 \circ N_2 \rightarrow M_1 \cup M_2 \circ N_1 \cap N_2$ ソシテ $I_{(a)}$ ハ $a \circ I$ ナル $I$ ノ最大ナモノデアリ，$I^{(a)}$ ハ $e$ ヲ含ム廣義ノ區間（又ハ $e$ ノミカラナル集合）デアッテ，$[e, a) \circ I^{(a)}$。又 $e < b < a \rightarrow I^{(b)} \supseteq I^{(a)}$ トナルコトモ明カデス。

補助定理2.　スベテノ $a > e$ ニツイテ，$e$ ハ $I^{(a)}$ ノ内点デアル。

証明.　「$e$ ハ $I^{(x)}$ ノ内点デアル」ヲ $\mathfrak{E}(x)$ トシテ，補助定理1ヲ適用シマス。$e$ ノ或ル近傍ノ $x, y$ ニツイテハ $x \circ y$ デスカラ $P_1$ ハ満足サレテヰマス。次ニ $(e, a)$ デ $\mathfrak{E}(x)$ デアルトシマス。$a \circ e$ デスカラ或ル $(a_1, a_2) \ni a$ 及ビ $I$ ニツイテ $(a_1, a_2) \circ I$。$L$ ハ connected デスカラ $b \in (a_1, a)$ ナル $b$ ガ存在シマス。$(e, b) \cup (a_1, a_2) \circ I^{(b)} \cap I$.

ソコデ, $x=b$ デハ $\mathfrak{L}(x)$ ガ成立シテヰルカラ, $e$ ハ $I^{(b)} \frown I$ ノ内点. 即チ $J \subseteq I^{(b)} \frown I$ ナル $J$ ガ存在シマス. コノ $J$ ニツイテハ

$$x \in (e, a_2) \to x \circ I^{(b)} \frown I \to x \circ J \to I_{(x)} \supseteq J.$$

故ニ $I^{(a_2)} \supseteq J.$

故ニ $x \in (a_1, a_2) \to I^{(x)} \supseteq I^{(a_2)} \supseteq J \to \mathfrak{L}(x).$

結局, $(e, a)$ デ $\mathfrak{L}(x)$ ナラ $a$ ノ或ル近傍 $(a_1, a_2)$ デ $\mathfrak{L}(x)$. 即チ $\mathfrak{L}(x)$ ハ $P_2$ ナル性質ヲ有スル. 從ツテ $(e, +\infty)$ デ $\mathfrak{L}(x)$

（証明終）

§3. 更ニ, $L$ ノ各元 $x$ ニ對シテ左ノ逆元 $x^*$ ガ存在スルトシマス。

補助定理3. 任意ノ $a > e$ 及ビ $I$ ヲ取ル. $x \in (e, a)$ ナラバ正ノ整数 $n$ 及ビ $\varepsilon_1, \cdots\cdots, \varepsilon_n \in I$ ガアッテ, $x = \varepsilon_1 \cdots\cdots \varepsilon_n$, $\varepsilon_1 \cdots\cdots \varepsilon_i \in (e, a)$ $i = 1, \cdots\cdots, n$ トナル。

証明. $b \in (e, a)$ トシマス. $L$ ハ右ノ local group デ, $b$ ノ左ノ逆元 $b^*$ ガ存在スルカラ, 次ノ如キ $J_1$, $J_2$, $J$ 及ビ $b$ ノ近傍 $V$ ヲ取ルコトガ出来マス. (4)ニツイテハ補助定理2参照)

1) $\varepsilon \in J_1 \to e \circ \varepsilon,\ e\varepsilon = \varepsilon.$

2) $x \in V \to b^* \circ x,\ b^* x \in J_1,$

3) $\varepsilon \in J_2 \to b \circ \varepsilon,\ b\varepsilon \in V,$

4) $J \subseteq J_1 \frown J_2 \frown I \cap I^{(a)},$

5) $\varepsilon \in J$ ナラ $\varepsilon^{-1}$ ガ存在シテ $\varepsilon^{-1} \in J$.

コノ $J$ ニツイテハ

$$\varepsilon \in J \to (e \circ \varepsilon,\ b \circ \varepsilon,\ e\varepsilon = \varepsilon,\ b\varepsilon \in V)$$

$$\to (b^* \circ b\varepsilon,\ (b^* b)\varepsilon = e\varepsilon = \varepsilon) \to b^*(b\varepsilon) = \varepsilon.$$

従ツテ a) $J \ni \varepsilon \neq \varepsilon' \in J \to b\varepsilon \neq b\varepsilon'$

b) $J$ ハ廣義ノ開區間, 従ツテ connected

c) $b\varepsilon$ ハ $J \ni \varepsilon$ ニツイテ continuous.

以上ノ a), b), c) カラ容易ニ次ノコトガ分リマス。

d) $bJ$ ハ connected, $b\varepsilon$ ハ $J \ni \varepsilon$ ニツイテ strictly monotone, 従ツテ又 $bJ$ ハ $b$ ヲ含ム廣義ノ開區間デアル。

「正ノ整数 $n$ 及ビ $\varepsilon_1, \cdots\cdots, \varepsilon_n \in I$ ガアッテ, $x = \varepsilon_1 \cdots\cdots \varepsilon_n$, $\varepsilon_1 \cdots\cdots \varepsilon_i \in (e, a)$ $i = 1, \cdots\cdots, n$ トナル」コトヲ $\mathfrak{L}(x)$ ト記シ, linear continuum $(-\infty, a)$ ニ補助定理 I ヲ適用シマス。$\mathfrak{L}(x)$ ガ $P_1$ ナル性質ヲ有スルコトハ trivial デス。今 $b \in (e, a)$ トシテ, $(e, b)$ デ $\mathfrak{L}(x)$ デアルトシマス。d) ニヨッテ $b\varepsilon \in (e, b)$ ナル $\varepsilon \in J$ ガ存在シマス。假定ニヨッテ正整数 $n-1$ 及ビ $\varepsilon_1, \cdots\cdots, \varepsilon_{n-1} \in I$ ガ存在シテ $b\varepsilon = \varepsilon_1 \cdots\cdots \varepsilon_{n-1}$, $\varepsilon_1 \cdots\cdots \varepsilon_j \in (e, a)$ $j = 1, \cdots, n-1$ トナリマス。

今 $\varepsilon_n = \varepsilon^{-1}$ トスレバ $\varepsilon_n \in J \subseteq I^{(a)} \subseteq I^{(b)}$, $b\varepsilon \in (e, b)$ デスカラ $b\varepsilon \circ \varepsilon_n$.

故ニ $b = be = b(\varepsilon\varepsilon^{-1}) = b\varepsilon\varepsilon^{-1} = \varepsilon_1 \cdots\cdots \varepsilon_n$,

$\varepsilon_n \in J \subseteq I$. 即チ，$x=b$ ニ於テ $\mathfrak{S}(x)$ ガ成立スル。
再ビ $\alpha$) ヲ参照スレバ；

$b \in (e, a)$ トシテ，$(e, b)$ デ，$\mathfrak{S}(x)$ ナラバ $b$ ノ或ル近傍デ（即チ $b_J$ デ）$\mathfrak{S}(x)$ デアルコトガワカリマス。即チ $\mathfrak{S}(x)$ ハ $P_2$ ナル性質ヲ有シマス。補助定理1ニヨッテ $(e, a)$ デ $\mathfrak{S}(x)$ デアルコトガ言ヘレマスカラ，証明ハ終ッタワケデス。

定理. $L$ ハ separable デアル。

証明. 補助定理3ニ於テ $I=E$ トオケバ，スベテノ $x \in (e, a)$ ニ対シテ，$x = \varepsilon_1 \cdots\cdots \varepsilon_n$ ナル $n$ 及ビ $\varepsilon_1, \cdots\cdots, \varepsilon_n \in E$ ガ存在スルコトニナリマス。$e < a$ ハ任意デスカラ，$x \in (e, a)$ ナル條件ハ $x > e$ ナル條件デ置キ換ヘラレマス。$x < e$ ナル $x$ ニツイテモ同様ナコトガ言ヘマス。

即チ任意ノ $x$ ガ上ノヤウナ形ニ書ケマス。§2ノ〔注意〕ニヨッテ，$L$ ハ separable デアルコトガワカリマス。

（証明終）

§4. 「定理2ノ証明」ニ於テ「$e$ ノ或ル近傍 $V$ ト $x_0$ ヲ含ム或ル開集合 $G$ トガ $x = x_0 y$, $y = x_0^* x$, $y \in V$, $x \in G$ ニヨッテ homeomorphically ニ対応スル」コトハ証明ヲ要スル。（一般ノ local group デハ單ナル $\alpha^*$ ノ存在カラハ証明サレナイカラ）。以下ハソノ証明デアル。先ヅ

(5)' $L^*$ ハ linear continuum, $f(y)$ ハ linear continuum $L$ デ continuous デ $L \ni y_1 \neq y_2 \in L \longrightarrow L^* \ni f(y_1) \neq f(y_2) \in L^*$, デアルナラバ, $f(y)$ ハ strictly monotone デアル。

証明. $L \ni y_0 < y_1 \in L$ トスル。$f(y_0) < f(y_1)$ トシテモ一般性ヲ犯ケナイ。(5) ニ於テ $L$ ノ代リニ $(y_0, +\infty)$ トシ, $g(y) = f(y_0)$ トシテ見レバ $y_0 < y \to f(y_0) < f(y)$ ガワカル。

同様ニ $y < y_1 \to f(y) < f(y_1)$

コレニヨツテ, 一般ニ $L$ ノ $y_2 < y_3 \in L \to f(y_2) < f(y_3)$ ガ, 場合ヲ分ケテ考ヘレバ, 容易ニ知ラレル。((5)' 証明終リ)

以下 $V_1$, $V_2$ 等ハ $e$ ノ近傍, $G_1$ ハ $x_0$ ノ近傍トスル。

$x_0 e$, $x_0^* x_0$ ハ存在シテ, $x_0 e = x_0$, $x_0^* x_0 = e$ デアルカラ, $V_1$, $V_2$, $G_1$ ヲ次ノヤウニ取ルコトガ出来ル。

$$\begin{cases} y \in V_1 \text{ ナラ } ey \text{ ガ存在シテ } ey = y \\ x \in G_1 \text{ ナラ } x_0^* x \text{ ガ存在シテ } x_0^* x \in V_1 \\ y \in V_2 \text{ ナラ } x_0 y \text{ ガ存在シテ } x_0 y \in G_1 \end{cases}$$

$V_3 \subseteq V_1 \frown V_2$ トスル。

コノ $V_3$ ニツイテハ, $y \in V_3$ ナラ $ey$, $x_0 y$ ガ存在シテ $ey = y$, $x_0 y \in G_1$, 従ツテ $x_0^*(x_0 y)$ ガ存在スル, 従ツテ又 $(x_0^* x_0) y$ ガ存在シテ

$$x_0^*(x_0 y) = (x_0^* x_0) y = ey = y, \quad (y \in V_3)$$

$V_3$ ヲ $E$, $x_0 y$ ヲ $f(y)$, $E$ ヲ $E^*$ ト書キ直シテ見レバ, 上ノ式カラ, (5)' ノ條件ノ成立シテ居ルコトガワカル。從ッテ $x_0 y$ ハ $y \in V_3$ ニ關シテ strictly monotone デアル, ソシテ $V_3$ ハ connected デアルカラ, $f(V_3)$ ハ $x_0$ ヲ含ム開区間トナル。

ソコデ $V = V_3$, $G = f(V_3)$ トスレバ $f(y) = x_0 y \in G$, $y \in V$ ニヨッテ $V$ ガ $G$ ニ $1 \sim 1$ ニ寫像サレル, $f(y) = x_0 y$ ハモトヨリ continuous, ソノ逆寫像ハ上式ニヨッテ, $x_0^* x$, $x \in G$ デアルカラ コレモ continuous デアル。コレデ證明ハ終ッタ。