1078. 一般タウバー型定理ノ環論的証明

深宮　政範（阪大）

Gelfand ノ normed ring ノ考ヘニヨッテ、位相可換群ノ上デ Bochner, Stone-von Neümann, Plancherel 等ノ定理ヤ群ト character トノ双對定理等ガ Gelfand, Raikov, Krein, 河田敬義氏等ニヨッテ新シク論ジラレ、証明サレテ居ル。特ニ Gelfand-Raikov ハ位相可換群ノ上ノ L_1 ノ normed ring ヲ考ヘ、群ノ character ガコノ normed ring ノ maximal ideal ト對應スルコトヲ証明シ、之ガ ring ノ考ヲ用フル場合基礎ニナッテ居ル。

Gelfand ハ別ニ絶對收斂フーリエ級數デ表ハサレル連續函數 $f(x)$ ガ到ルトコロ 0 トナラナケレバ $\frac{1}{f(x)}$ モ亦絶對收斂フーリエ級數デ表ハサレルコトヲ maximal ideal ヲ用ヒテアッサリ證明シ，夫レノ Wiener-Lévy ノ擴張モ導キ出シタ。

茲デハ位相可換群 G ノ上ノ Lebesgue-integrable ナ函數ノ環ノ代數的ナ性質カラ，上ノ絶對收斂フーリエ級數ノ定理ヲ援用セズニ，直接ニ Wiener ノ一般タウバー型定理ヲ證明シ，ソレニ關シテ二，三ノ注意ヲ述ベタイ。

位相可換群 G トシテハ locally bicompact, separable（或ハモット一般デモ良イ）位デ良イ。ソノ上デ Haar 不變測度ガ適當ナ假定ヲ滿足シテ居レバ良イ。然シ茲デハ簡單ノタメ、G ヲ實數全体 $-\infty < X < \infty$ ノ群トシ，Lebesgue 測度ヲ用ヒル。

$G=\{-\infty < X < \infty\}$ 上デ Lebesgue integral

$$\|K\| = \int_{-\infty}^{\infty} |K(x)|\, dx < \infty$$

ナ函數 K ノ全体ヲ L_1 トシ，L_1 デ"積"ヲ

$$K \circ G(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x-\xi)\, G(\xi)\, d\xi$$

デ定義シテ，L_1 ヲ ring ト考ヘル。（和，常數トノ積ハ普通ノ通リ）L_1 ニ unit ヲ附加シタ ring ヲ L トスル。

R ノ元ヲ (α, K) デ表ハス．α ハ complex number, $K=K(x)$ $u(-\infty<u<\infty)$ ハ一對一ニ對應スル。且ツ

$$(\alpha, K) \equiv \alpha + \int_{-\infty}^{\infty} K(x)\, e^{iux} dx \ (\mathrm{mod}\ M)$$

若シ $M=L_1$ ナラバ $(\alpha, K) \equiv \alpha\ (\mathrm{mod}\ L_1)$, 特ニ $K \equiv 0$(*) $(\mathrm{mod}\ L_1)$

証明．略

Lemma 3. (Gelfand-Raikov) R ハ(*)ノ條件ヲ満足シ, semi-simple デアル。

証明．$\mathfrak{z}=(\alpha, K) \in L$ ナラバ $\mathfrak{z}^* = (\bar{\alpha}, \tilde{K}) \in L$, 但シ $\tilde{K} = \overline{K(-x)}$;

且ツ
$$\mathfrak{z}^*(M) = \bar{\alpha} + \int_{-\infty}^{\infty} \overline{K(-x)}\, e^{iux} dx$$

$$= \overline{\alpha + \int_{-\infty}^{\infty} K(x)\, e^{iux} dx} = \overline{\mathfrak{z}(M)} \quad (M \neq L_1)$$

$$\mathfrak{z}^*(L_1) = \bar{\alpha} = \overline{\mathfrak{z}(L_1)}$$

従ツテ $\mathfrak{z}^*$ ハ凡ユル maximal ideal ニ対シ $\mathfrak{z}^*(M) = \overline{\mathfrak{z}(M)}$ ヲ満足スル．従ツテ(*)ノ條件ヲ満足スル。

R ガ semi-simple ナルコトハ之レマデ全然使ハレナカッタ．然シコノ性質ガ一番大切ナノデアル．夫レモGel-

(*) 此ノコトハ可參ニ述ベレバ Riemann-Lebesgue 定理 (Fourier transform ハ∞デ0ニナル) ニナリマス。

fand-Raikov が既ニ証明シテ居ルカラ茲デハ略スル。

Lemma 4. semi-simple デ，(*)-條件ヲ満足スル normed ring R ハ N-ring デアル. 即チ R ノ任意ノ closed ideal ハ夫レハ含ム凡ユル maximal ideal ノ共通部分ト一致スル。（従ッテ $\mathfrak{L}$ ハ N-ring!）

証明. R ノ凡ユル maximal ideal ノ作ル bicompact Hausdorff 空間ヲ $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}$ ノ上ノ凡ユル複素数値連續函數ノノルム環ヲ $C(\mathfrak{M})$ トスル。$C(\mathfrak{M})$ ノノルムハ

$$\|z(M)\| = \sup_{M\in\mathfrak{M}} |z(M)|.$$

然ルトキハ (*)-條件ト semi-simple トカラ R カラ $C(\mathfrak{M})$ ヘノ代數的 isomorphism が存在スル上此ノ isomorphism ハ又位相的 isomorphism ニナル。[Gelfand, Recueil Math., 51-1, 参照]

依ッテ定理ハ $R=C(S)$ ニ對シテ証明スレバヨイ。S ハ任意ノ bicompact Hausdorff 空間. 此ノ場合 $C(S)$ が N-ring デアルコトハ既ニ知ラレテ居ル[Gelfand, N. R. II.]

Lemma 5. R が N-ring トスル. $x\in R$ がアル maximal ideal M_0 ニ對シテ

$$x(M)\neq 0 \quad (\text{for all } M\neq M_0),\ x(M_0)=0$$

デアレバ

$$R(x) = M_0$$

$R(x)$ ハ x ヲ含ム最小ノ *closed ideal* (x ノ生成スル *principal ideal*) ヲ表ハス.

$x(M) \neq 0$ $(M \neq M_0)$ ナル *Wiener* ノ條件* ハ $R(x)=M_0$ ナルタメニ必要且十分ナ事が分リマス.

證明. N－*ring* ダカラ

$$R(x) = \prod_{R(x) \subset M} M = M_0 \qquad (\text{證明}3)$$

m が *metric compact* ノトキハ $C(m)$ ノ *closed ideal* ハ (*closed*) *principal ideal* デアル ($\hat{S}$*ilov*) 事が別ニ云ヘル. 夫モ *Lemma* 4 ヲ用フレバ系トシテ云ヘルヨウデス.

又 $x(M_0) = 0$, $x(M_1) = 0$ デアレバ N－*ring* ダカラ

$R(x) = M_0 \cap M_1 \subsetneqq M_0$ (*maximal* ダカラ)

從ッテ $R(x) \neq M_0$.

Lemma 6. L ハ N－*ring* デアル.

Lemma 7. $f(x)$ ヲ有界可測 $(-\infty < x < \infty)$ ナ函數トスルトキ

$$\lim_{x \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} K(x-\xi) f(\xi)\, d\xi = A \cdot \int_{-\infty}^{\infty} K(\xi)\, d\xi$$

が成立ツ如キ $K(x) \in L_1$ ノ全体ハ L ノ *closed ideal* ヲ

---

* 此場合 $R(x)$ ハ *primär ideal* ニナルワケデス.

成ス。

証明. Wiener, Fourier integral and certains of its application, Chap. II, Lemma 6_2-6_6 参照.

$\boxed{\text{Wiener ノ一般タウバー型定理}}$

$$(1)\quad \lim_{x\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}K(x-\xi)f(\xi)\,d\xi = A\int_{-\infty}^{\infty}K(x)\,dx$$

ナルトキ, 凡テノ $G\in L_1$ ニ対シテ

$$(2)\quad \lim_{x\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}G(x-\xi)f(\xi)\,d\xi = A\int_{-\infty}^{\infty}G(x)\,dx$$

ガ從フタメノ必要充分條件ハ

$$(3)\quad \int_{-\infty}^{\infty}K(x)e^{iux}\,dx \neq 0 \quad \text{for } -\infty < u < \infty$$

証明. (2) ノ成立スル G ノ全体ハ L_1 ノ closed ideal $I(\subset L_1)$ ヲ作ル (Lemma 7.), 條件 (1) ハ $K\in I$, 且ツ條件 (3) ガアレバ L_1 以外ノ L_1 ノ maximal ideal M ニ対シテ $K(M)\neq 0$, $(K(L_1)=0)$ (Lemma 2), 從ッテ $I\supset L(K)\,(=R(X))=L_1$. 從ッテ $I=L_1$ ナルコトガ L_1 ガ N-ring ナルコト (Lemma 6), ト Lemma 5 カラ分ル. Lemma 5 ニヨッテ (3) ガ必要條件デアルコトモ分ル。

Wiener, Fourier integral-----, chap. II, Theorem 5 ハ同様ニ Lemma 5 ヲ用ヒテ得ラレル。

Theorem 6, Theorem 7 ハ Lemma 4 (N-ring デアルコト Lemma 5 デハ足リナイ) ヲ用ヒテ同ジ方法デ容易ニ導キ出セマス。

L, ノ closure ノ定理 (Theorem 8, 9, 10) モ Lemma 4, 5 ソノマヽト云ヘルデセウ。