1090. 群ト群環ニ於ケルIdealトノ對應ニ就イテ

岩澤 健吉(東大)

1. $\mathfrak{G}$ハ任意ノ有限群, $\mathfrak{R}$ハ單位元ヲ有スル任意ノ環トシ, $\mathfrak{R}$上ノ$\mathfrak{G}$ノ群環ヲ$\mathfrak{R}(\mathfrak{G})$トシマス. $\mathfrak{R}(\mathfrak{G})$

ハ勿論 $\mathfrak{G}$ ノ左加群ト考ヘラレマスガコノ時

$$(1)\quad \sigma \to \sigma a,\quad a \in \mathfrak{G},\quad \sigma = \sum_{b \in \mathfrak{G}} \alpha_b\, b \in \mathfrak{R}(\mathfrak{G})$$

$$(\alpha_b \in \mathfrak{R})$$

ニヨリ $\mathfrak{G}$ ノ各要素ハ $\mathfrak{R}(\mathfrak{G})$ ノ作用自己同型ヲ與ヘルモノト考ヘルコトガ出来マス。ヨッテ $\mathfrak{G}$ ト $\mathfrak{R}(\mathfrak{G})$ トカラ Holomorph ヲ作レバ $\mathfrak{G}$ モ $\mathfrak{R}(\mathfrak{G})$ モ共ニ同一ノ群ノ部分群トナリマスガ特ニコヽデ交換子 (Kommutator) ヲ考ヘレバ

$$(2)\quad (a, \sigma) = \sigma a - \sigma = \sigma(a-1)$$

トナリマス。

サテ $\mathfrak{G}$ ノ任意ノ部分群 $\mathfrak{H}$ ガ與ヘラレタトキ $\mathfrak{H}$ ニ上ノ意味デノ交換子群 $(\mathfrak{H}, \mathfrak{R}(\mathfrak{G}))$ ヲ對應サセルコトニスル:

$$(3)\quad I(\mathfrak{H}) = (\mathfrak{H}, \mathfrak{R}(\mathfrak{G}))$$

$I(\mathfrak{H})$ ハ $\mathfrak{R}(\mathfrak{G})$ ノ部分群即チ $\mathfrak{R}(\mathfrak{G})$ ノ左-Ideal デアリマスガ, ソレハ (2) ニヨリ $\sigma(a-1)$, $\sigma \in \mathfrak{R}(\mathfrak{G})$, $a \in \mathfrak{H}$ ノ全体, 即チ $(a-1)$, $a \in \mathfrak{H}$ ノ全体カラ生成サレタ左-Ideal デアリマス。

次ニ $\mathfrak{l}$ ヲ $\mathfrak{R}(\mathfrak{G})$ ノ任意ノ左-Ideal, 即チ今ノ場合 $\mathfrak{R}(\mathfrak{G})$ ノ部分群トスルトキスベテノ $\sigma \in \mathfrak{R}(\mathfrak{G})$ ニ對シテ

$$(4)\quad (a, \sigma) \in \mathfrak{l}$$

トナル如キ $a \in \mathfrak{g}$ ノ全体ハ容易ニワカルヤウニ $\mathfrak{g}$ ノ部分群ヲ作リマス。$\mathfrak{l}$ ハ左-Ideal デスカラ (2) ニヨリ (4)

$$(5)\qquad a-1 \in \mathfrak{l}$$

ト言ッテモ同ジデス。コノ様ナ $\mathfrak{l}$ ニ對スル部分群ヲ

$$(6)\qquad G(\mathfrak{l}) = (a;\ a-1 \in \mathfrak{l})$$

ト書クコトニシマス。後ニ (6) ガ (3) ノ逆ノ對應デアルコトヲ証明シマス。

2. $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}(\mathfrak{g})$ 等ハ前ト同ジモノトシ今度、$\mathfrak{R}(\mathfrak{g})$ ヲ $\mathfrak{g}$-右加群ト考ヘ

$$(7)\qquad \sigma \longrightarrow a\sigma,\quad a \in \mathfrak{g},\quad \sigma \in \mathfrak{R}(\mathfrak{g})$$

ニヨリ $\mathfrak{g}$ ヲ $\mathfrak{R}(\mathfrak{g})$ ノ作用素-自己同型群ト考ヘマス。サウシテ矢張リ $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{R}(\mathfrak{g})$ ガ一ツノ Holomorph ノ部分群デアルト考ヘ、$\mathfrak{g}$ ノ任意ノ部分群 $\mathfrak{h}$ ガ與ヘラレタ場合上ノ意味デ $\mathfrak{h}$ ノ各要素ト交換可能ナ $\mathfrak{R}(\mathfrak{g})$ ノ要素ノ全体ヲトレバコレハ明ニ $\mathfrak{R}(\mathfrak{g})$ ノ部分群即チ $\mathfrak{R}(\mathfrak{g})$ ノ右-Ideal トナリマス。之ヲ

$$(8)\qquad I^*(\mathfrak{h}) = (\sigma;\ (a,\sigma)^* = 0,\quad a \in \mathfrak{h})$$

ト書クコトニシマス。$I^*(\mathfrak{h})$ ハ云ヒ換ヘレバ $\mathfrak{h}$ ニ屬スル自己同型ニヨリ不変ナ要素ノ全体デアッテ、ソレハ (2) ニ對應スル公式 $(a,\sigma)^* = (a-1)\sigma = 0$ カラモ明カデス。ソシテ容易ニ分ル如クソレハ

$$(9)\qquad e(\mathfrak{h}) = \sum_{a \in \mathfrak{h}} a$$

カラ生成サレタ右-Idealデアリマス。

次ニ逆ニ $\mathfrak{R}(\mathfrak{g})$ ノ任意ノ右-Ideal $\mathfrak{r}$ ガ與ヘラレタ場合スベテノ $\sigma\in\mathfrak{r}$ ニ對シ $(a,\sigma)^*=0$ ナル如キ $a\in\mathfrak{g}$ ノ全体，即チ $\mathfrak{r}$ ノ要素ヲ不変ナラシムル自己同型全体ヲ

(10) $G^{(*)}(\mathfrak{r})=(a;(a,\sigma)^*=0,\ \sigma\in\mathfrak{r})$

ト書ケバ $G^*(\mathfrak{r})$ ハ勿論 $\mathfrak{g}$ ノ部分群デアリマス。次ニコノ(9)ガ(8)ノ逆ノ對應デアルコトヲ示シマス。

3. サテ次ノ定理ガ成立シマス。

補助定理1. 上ノ如キ對應ニ於テ

(11) $l(I^*(\mathfrak{h}))=I(\mathfrak{h}),\ \ r(I(\mathfrak{h}))=I^*(\mathfrak{h}).$

コヽニ l, r トハ $\mathfrak{R}(\mathfrak{g})$ ニ於ケル左及ビ右ノAnnihilatorデアル。

證明. $I^*(\mathfrak{h})$ ハ $e(\mathfrak{h})$ カラ生成サレタ右-Idealデアリ又 $I(\mathfrak{h})$ ハ $a-1,\ a\in\mathfrak{h}$ カラ生成サレタ左-Idealデスカラ明カニ

$$l(I^*(\mathfrak{h}))\geqq I(\mathfrak{h})$$

逆ニ $a\in l(I^*(\mathfrak{h}))$ ヲ任意ニトレ，$\mathfrak{g}=\sum_i a_i\mathfrak{h}$ トスレバ $\mathfrak{R}(\mathfrak{g})=\sum_i a_i\mathfrak{R}(\mathfrak{h})$ ナル故 $\sigma=\sum_i a_i\sigma_i$，$\sigma_i\in\mathfrak{R}(\mathfrak{h})$ トカケマス。

假定ニヨリ $\sigma e(\mathfrak{h})=0$，$\sum_i a_i\sigma_i e(\mathfrak{h})=0.$

コレカラ $\sigma_i e(\mathfrak{h})=0.$

ヨッテ容易ニ分レマウニ σ_i ハ $a-1,\ a\in\mathfrak{h}$ カラ

生成サレタ Ideal ニ属シマス。

故ニ $\sigma \in I(\mathfrak{h})$, $r(I(\mathfrak{h})) = I^*(\mathfrak{h})$ ニツイテモ同様デス。

コノ補助定理ニヨリ次ノ定理ヲ得ル。

定理 1.

$$(12) \quad G(I(\mathfrak{h})) = \mathfrak{h}, \quad G^*(I^*(\mathfrak{h})) = \mathfrak{h}.$$

証明. 定義ニヨリ $G(I(\mathfrak{h})) \supseteqq \mathfrak{h}$ ハ明カ. 逆ニ $a \in G(I(\mathfrak{h}))$ トセヨ。

(5) ニヨリ $a-1 \in I(\mathfrak{h})$. (11) カラ $a-1 \in l(I^*(\mathfrak{h}))$, ヨッテ $(a-1)e(\mathfrak{h}) = 0$. コレカラ $a \in \mathfrak{h}$ ナルコト明カデス. $G^*(I^*(\mathfrak{h})) = \mathfrak{h}$ モ同様.

注意. $\mathfrak{R}$ ガ可換体デ従ッテ $\mathfrak{R}(\mathfrak{G})$ ガ Frobenius 環デアレバ任意ノ左-Ideal $\mathfrak{l}$ 及ビ右-Ideal $\mathfrak{r}$ ニ対シテ

$$(13) \quad l(r(\mathfrak{l})) = \mathfrak{l}, \quad r(l(\mathfrak{r})) = \mathfrak{r}$$

ナル故 (11) ハ互ニ dual ナ関係ニアリマス. 又コノ時ハ一般ニ

$$(14) \quad G(\mathfrak{l}) = G^*(r(\mathfrak{l})), \quad G(l(\mathfrak{r})) = G^*(\mathfrak{r})$$

ナルコトガ容易ニ分リマスカラ (12) モ亦互ニ dual ナ関係デアルコトガ分リマス。

(12) ニ対シ逆ニ $I(G(\mathfrak{l})) = \mathfrak{l}$, $I^*(G^*(\mathfrak{r})) = \mathfrak{r}$ ハ一般ニ成立シマセンガ

$$I(G(\mathfrak{l})) \subseteqq \mathfrak{l}, \quad I^*(G^*(\mathfrak{r})) \supseteqq \mathfrak{r}$$

ナルコトハ明カデアリマス。

上ノ様ニシテ $\mathfrak{G}$ ノ部分群ト $\mathfrak{R}(\mathfrak{G})$ ノ Ideal ノ一部トノ間ニ一對一ノ對應ガツイタワケデスガ，ソノ對應ヲ與ヘルノニワザワザ $\mathfrak{G}$ ト $\mathfrak{R}(\mathfrak{G})$ トノ Holomorph ニ於ケル交換子ヲ持出シタノハ，一ツニハ上ノ I, G ト I^*, G^* トノ間ノ Duality ガ群論ニ於ケル "Kommutator ト Zentralizator" ノ Duality ノ原理ニヨルモノデアルコトヲ明カニシタイタメト又以下ノ考察ニ於ケル如ク特ニ $I(\mathfrak{G})$ ヲ $\mathfrak{G}$ ト $\mathfrak{R}(\mathfrak{G})$ ノ交換子群ト考ヘルコトガ對應ノ群論的意味ヲハッキリサセルヤウニ思ハレルカラデアリマス。[1]

尚 §1—3 ニ述ベタ部分群ト Ideal トノ對應ハ種々ナ方向ニ拡張スルコトガ可能デアリマス。

先ヅ $\mathfrak{R}(\mathfrak{G})$, $\mathfrak{G}$ ノ代リニ一般ニ Abel 群 $\mathfrak{A}$ 及ビソノ自己同型群 $\mathfrak{G}$ ガ與ヘラレタトキ上ト全ク同様ニシテ對應 I, G, I^*, G^* ヲ考ヘルコトガ出来マス。

特ニ $\mathfrak{G}$ ガ有限デ $g \in \mathfrak{G}$ ニヨリ $a \in \mathfrak{A}$ ガ a^g ニ変換サレルモノトスレバ有理整数上ノ $\mathfrak{G}$ ノ群環 $\mathfrak{R}(\mathfrak{G})$ ノ任意ノ要素 $\sigma = \sum_{g \in \mathfrak{G}} \alpha_g g$ ニ對シ a^σ ガ一意的ニ定義サレマスガ，コノ時

(*) 凡テノ $a \in \mathfrak{A}$ ニ対シ $a^\sigma = 1$ ナラバ凡テノ $a \in \mathfrak{A}$

---

1) コノ様ナ對應ノ一般論ニツイテハ筆者ノ"核心群列ノ一拡張ニツイテ"ヲ参照サレタイ。

ニ對シ $a^{\alpha g}=1$, ($g \in \mathfrak{G}$) デアルトイフ條件ガ滿足サレテヰレバ定理 L ガコノ場合ニモ成立スルコトガ容易ニ證明サレマス。實際 Galois ノ基本定理ノ一半ハコノヤウナ場合デアリマス。

次ニ $\mathfrak{G}$ ガ無限群ノ場合 $\mathfrak{R}(\mathfrak{G})$ ヲ $\mathfrak{G}$ ノ有限個ノ要素 $\mathfrak{R}$ ニヨル一次結合式ノ全體トシテ定義スレバ矢張リ §1 ― 3 ニ述ベタ對應ヲ定義スルコトガ出來マス。コノ時定理 1 ノ $G^*(I^*(\mathfrak{h}))=\mathfrak{h}$ ノ方ハ成立シマセンガ $G(I(\mathfrak{h}))=\mathfrak{h}$ ハ矢張リ成立スルコトガ證明サレマス。Magnus ノ Dimensionstheorie[2] ニ於ケル群ト Ideal トノ對應ガコノヤウナ場合ニ屬スルコトハ後ニ述ベマス。

$\mathfrak{G}$ ガ無限群デアル場合ニハ，然シナガラ上ノ如キ $\mathfrak{R}(\mathfrak{G})$ ヨリモムシロ $\mathfrak{G}$ 上ノ概週期函數全體ヲトッタ方ガ自然デアリマセウ。ヨッテ次ニソレヲ調ベテ見マス。

5. $\mathfrak{G}$ ハ一般ニ無限群トシ（有限ノ場合ハ勿論含マ

---

2) W. Magnus, Beziehungen zwischen Gruppen und Idealen in einem speziellen Ring, Math. Ann. 111, (1935), S. 259–280, 又 W. Magnus, Über Beziehungen zwischen höheren Kommutatoren, Jour. reine u. ange Math. 177 (1937), S. 105–115.

レル）$\mathfrak{R}(\mathfrak{g})$ ハ $\mathfrak{g}$ 上ノ概週期函數全体カラ成ル環トスル．但シ乗法ハ"Faltung"ヲトルモノトシマス。$\mathfrak{R}(\mathfrak{g})$ ノ要素ヲ $f=f(x)$, $g=g(x)$, ----- トスレバコヽデモ $\mathfrak{R}(\mathfrak{g})$ ハ $\mathfrak{g}$-加群ト考ヘラレ然モ

$$(15) \qquad f \to fa = f(xa^{-1})$$

$$(16) \qquad f \longrightarrow af = f(a^{-1}x)$$

ニヨリ $\mathfrak{g}$ ハ矢張リ $\mathfrak{R}(\mathfrak{g})$ ノ自己同型群トナリマス。ヨッテ前ト同ジク對應 I, G, I,* G* ヲ考ヘルコトが出来マスが，コノトキ $I^*(\mathfrak{h})$ ハ $a\in\mathfrak{h}$ ニ対シ $af=f$ 即チ $f(a^{-1}x)=f(x)$ 或ハ $f(ax)=f(x)$ ナル如キ函數全体トナリマスが，ソレハ実際 $\mathfrak{R}(\mathfrak{g})$ ニ於ケル $\|f(x)\|=\sqrt{\underset{x}{M}|f(x)|^2}$ ニ関シテ閉ヂタ右-Ideal トナッテ居マス。ヨッテ $I(\mathfrak{h})$ モ亦 $f-fa$, $a\in\mathfrak{h}$ デ生成サレ且ツ $\|\quad\|$ ニ関シテ閉ヂタ $\mathfrak{R}(\mathfrak{g})$ ノ左-Ideal トスベキデアリマセウ。

コノ $\mathfrak{R}(\mathfrak{g})$ ニ於テモ閉ヂタ Ideal ニ對シテハ (13) が成立スルが更ニ (14) モ成立シマス。ソレニハ次ノコトニ注意スレバヨイ。

$$f\times g(x) = \underset{y}{M}\, f(xy^{-1})\, g(y)$$

$$= \underset{y}{M}\, f(xy^{-1}a^{-1})\, g(ay) = fa\times a^{-1}g(x)$$

故ニ　$f\times g = fa\times a^{-1}g$

同様ニ　$f\times g = af\times ga^{-1}$

即チ先ヅ $a\in G(\mathfrak{l})$ ナラバ凡テノ $f\in\mathfrak{R}(\mathfrak{g})$ ニ對シ

$f-fa\in \mathfrak{l}$. ヨッテ任意ノ $g\in \mathfrak{r}(\mathfrak{l})$ ニ対シ $(f-fa)\times g=0$. ヨッテ

$$f\times g=fa\times g=fa\times a^{-1}ag=f\times ag$$

即チ $\quad f\times(g-ag)=0$

コレガ凡テノ $f\in \mathfrak{R}(\mathfrak{g})$ ニ対シ成立スルノダカラ $g-ag=0$, $g=ag$, ヨッテ $a\in G^*(\mathfrak{r}(\mathfrak{l}))$. 逆ニ $a\in G^*(\mathfrak{r}(\mathfrak{l}))$ デアレバ任意ノ $g\in \mathfrak{r}(\mathfrak{l})$ ニ対シ $ag=g$ デアル。カラ凡テノ $f\in \mathfrak{R}(\mathfrak{g})$ ニ対シ

$$(f-af)\times g=f\times g-af\times g=f\times g-af\times a^{-1}ag$$
$$=f\times g-f\times ag=f\times g-f\times g=0$$

ヨッテ $f-af\in \mathfrak{l}(\mathfrak{r}(\mathfrak{l}))=\mathfrak{l}$. 即チ $G(\mathfrak{l})=G^*(\mathfrak{r}(\mathfrak{l}))$

$G(\mathfrak{l}(\mathfrak{r}))=G^*(\mathfrak{r})$ ハ dual ナ関係デアルカラコレデヨイ。

次ニ $\mathfrak{R}(\mathfrak{g})$ ニ属スル函数ニヨリ $\mathfrak{g}$ ニ weak topology ヲ入レレバ $G(\mathfrak{l})$, $G^*(\mathfrak{r})$ ハイヅレモ閉デアリマス。ソレハ (14) ニヨリ $G^*(\mathfrak{r})$ ニツイテダケ云ヘバ充分デスガ $f(x)\in \mathfrak{R}(\mathfrak{g})$ ハスベテ $\mathfrak{g}$ 上デ連続ナル故 $\mathfrak{r}$ ニ属スル凡テノ f ニ対シ $af=f$ 即チ $f(ax)=f(x)$ トナル如キ a ノ全体 $G^*(\mathfrak{r})$ ハ閉集合デアリマス。

サテコノ時定理 I ガ成立スルデアラウカ。上ノ考察ニヨレバ定理 I ガ成立スルタメニハ先ヅ $\mathfrak{f}_g$ ヲ $\mathfrak{g}$ ノ部分群ノ中デ weak topology ニヨリ閉ダタモノダケニ制限シナケレバナラヌコトガ分リマス。凡テノ $f\in \mathfrak{R}(\mathfrak{g})$

ニ對シ $f(a)=f(1)$ トナル如キ a ノ全体ヲ $\mathfrak{N}$ トスレバ明カニ $\mathfrak{N}$ ハ $\mathfrak{G}$ ノ不変部分群デ $\mathfrak{N}(\mathfrak{G})$ ハ $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ 上ノ概週期函数全体ト一致シマス. 又上ノ如キ閉ヂタ $\mathfrak{h}$ ハ凡テ $\mathfrak{N}$ ヲ含ミ、$\mathfrak{h}/\mathfrak{N}$ ハ $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ ノ部分群トナルカラ我々ハ定理 1 ヲ $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ ニツイテ証明スレバヨイワケデス。即チ始メカラ $\mathfrak{N}=1$ デ $\mathfrak{G}$ ハ所謂"maximally almost periodic"デアルト考ヘテヨイ. コノトキ次ノ定理ガ成立シマス。

補助定理 2.[3] $\mathfrak{G}$ ヲ maximally almost periodic ナ群ノ $\mathfrak{h}$ ヲ $\mathfrak{G}$ ノ weak topology デ閉ヂタ任意ノ部分群トシ $x_0 \neq \mathfrak{h}$ トスル。

然ルトキ次ノ條件ヲ滿足スル $\mathfrak{G}$ 上ノ概週期函数 $f(x)$ ガ存在スル:

(i) $f(x)$ ハ $\mathfrak{h}$ ノ右副群上デ一定ノ値ヲ有ス. 即チ
$h \in \mathfrak{h}$ ナラバ $f(x)=f(hx)$

(ii) $f(1) \neq f(x_0)$

証明. $\mathfrak{h}x_0$ モ亦閉集合デアルカラ $\varphi(1)=0$, $\varphi(x)=1$, $x \in x_0\mathfrak{h}$, 且ツ常ニ $0 \leq \varphi(x) \leq 1$ ナル如キ $\mathfrak{G}$ 上ノ一様連続函数 $\varphi(x)$ ガ存在シマス。$\varphi(x)$ ハ

3) van Kampen, almost periodic functions and compact groups. Ann. Math. vol. 37 (1936), p. 78 參照。

勿論 $\mathfrak{G}$ 上ノ概週期函数デスガ

$$f(x) = \underset{h \in \mathfrak{h}}{M}\, g(hx)$$

トオケバ $f(x)$ モ概週期函数デ明カニ (i), (ii) ヲ満足シマス．（$f(x_0)=1$, $f(1)<1$ ナル故）．

コレヲ用ヒテ定理1ヲ今ノ場合ニモ証明スルコトガ出来マス．$G^*(I^*(\mathfrak{h}))=\mathfrak{h}$ ヲ云ヘバ良イガ $G^*(I^*(\mathfrak{h})) \supseteq \mathfrak{h}$ ナルコトハ定義ニヨリ明カ．逆ニ $a \in G^*(I^*(\mathfrak{h}))$ トセヨ．$I^*(\mathfrak{h})$ ハ $\mathfrak{h}$ ニ属スル凡テノ h ニ対シ $g(hx) = g(x)$ ナル如キ函数 g ノ全体デアルカラ定義ニヨリソノ凡テノ g ニ対シ $g(ax)=g(x)$．

特ニ $g(a) = g(1)$：ソコデ今 $a \notin \mathfrak{h}$ トスレバ補助定理2ニヨリ $I^*(\mathfrak{h})$ ニ属スル f デ $f(a) \neq f(1)$ ナルモノガ存在スルカラ矛盾ヲ生ジマス。

ヨッテ $a \in \mathfrak{h}$, $G^*(I^*(\mathfrak{h})) = \mathfrak{h}$

カクテ次ノ定理ガ証明サレマシタ。

定理2. (12) ハ任意ノ群 $\mathfrak{G}$ 及ビソノ上ノ概週期函数環 $\mathfrak{R}(\mathfrak{G})$ ニツイテモ成立スル．但シ部分群及ビ Ideal ハソレゾレノ topology デ閉ヂタモノノミヲ考ヘルコトニスル。

6. 再ビ §1 ノ立場ニ戻リ $\mathfrak{G}$ ハ有限群 $\mathfrak{R}(\mathfrak{G})$ ハ $\mathfrak{G}$ 上ノ普通ノ群環トシ、ソコデ述ベタ對應 I, G, I^*, G^* 等ノ性質ヲ調ベテミルコトニシマス。之等ノコトノ多クハ

句論𝔊ガ有限デナイ場合ニモ拡張サレマスガ面倒ダスカラ一々述べヌコトニシマス。

定理3　$\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$ ヲ 𝔊ノ任意ノ部分群トスル時

(17) $I(\mathfrak{H}_1 \cup \mathfrak{H}_2) = I(\mathfrak{H}_1) \cup I(\mathfrak{H}_2)$,

$$I^*(\mathfrak{H}_1 \cup \mathfrak{H}_2) = I^*(\mathfrak{H}_1) \cap I^*(\mathfrak{H}_2)$$

従ッテ𝔊ノ部分群全体ノ作ル束ハ I, I^* ニヨリソレゾレ $R(\mathfrak{G})$ ノ左乃至右-Ideal ノ作ル束ノ中ニ join-isomorphic 乃至ソレニ dual ニ写像サレル。

証明。(11) ニヨリ (17) ノ両式ノ ウチドチラカ一方ヲ云ヘバヨイガ 𝔊ガ無限ノ場合モ考慮ニ入レテ

$$I(\mathfrak{H}_1 \cup \mathfrak{H}_2) = I(\mathfrak{H}_1) \cup I(\mathfrak{H}_2)$$

ヲ証明シテオキマス。一般ニ $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}$ ナラバ $I(\mathfrak{N}) \subseteq I(\mathfrak{M})$ ナルコトハ明カデスカラ $I(\mathfrak{H}_1 \cup \mathfrak{H}_2) \supseteq I(\mathfrak{H}_1) \cup I(\mathfrak{H}_2)$.
サテ $I(\mathfrak{H}_1 \cup \mathfrak{H}_2)$ ハ例ヘバ

$$1 - h_1^{(1)} h_2^{(1)} h_1^{(2)} h_2^{(2)} \cdots\cdots h_1^{(r)} h_2^{(r)};$$

$$h_1^{(i)} \in \mathfrak{H}_1, \quad h_2^{(i)} \in \mathfrak{H}_2$$

ナル形ノ項ニヨリ生成サレタ左-Ideal デアリマスガ,

$$1 - h_1^{(1)} h_2^{(1)} \cdots\cdots h_1^{(r)} h_2^{(r)}$$

$$= (1 - h_1^{(1)}) + h_1^{(1)}(1 - h_1^{(2)}) + \cdots\cdots + h_1^{(1)} h_2^{(1)} \cdots\cdots h_1^{(r)} (1 - h_2^{(r)})$$

ナル故コレラハ $I(\mathfrak{H}_1) \cup I(\mathfrak{H}_2)$ ニ含マレマス。ヨッテ

$I(\mathfrak{h}_1 \cup \mathfrak{h}_2) \subseteq I(\mathfrak{h}_1) \cup I(\mathfrak{h}_2)$

$\mathfrak{R}(\mathfrak{G})$ ノ任意ノ左-Ideal $\mathfrak{l}$ ガ與ヘラレタ場合

$I(\mathfrak{h}_1) \subseteq \mathfrak{l}$,

$I(\mathfrak{h}_2) \subseteq \mathfrak{l}$ ナラバ定理3ニヨリ $I(\mathfrak{h}_1 \cup \mathfrak{h}_2) \subseteq \mathfrak{l}$. ヨッテ $I(\mathfrak{h}) \subseteq \mathfrak{l}$ トナル如キ最大ノ部分群 $\mathfrak{h}$ ガ存在スルワケデ，ソレガ $G(\mathfrak{l})$ ニ當ルワケデス。同様ニ $\mathfrak{r}$ ヲ右-Ideal トスルトキ $G^*(\mathfrak{r})$ ハ $I^*(\mathfrak{h}) \supseteq \mathfrak{r}$ ナル如キ最大ノ部分群 $\mathfrak{h}$ デアリマス。

次ニ a ヲ $\mathfrak{G}$ ノ任意ノ要素トスルトキ (3) ニヨリ

$$I(a^{-1}\mathfrak{h}a) = (a^{-1}\mathfrak{h}a, \mathfrak{R}(\mathfrak{G}))$$
$$= (a^{-1}\mathfrak{h}a, a^{-1}\mathfrak{R}(\mathfrak{G})a) = a^{-1}(\mathfrak{h}, \mathfrak{R}(\mathfrak{G}))a$$
$$= a^{-1}I(\mathfrak{h})a = I(\mathfrak{h})a$$

コレト (11) トカラ

(18) $I(a^{-1}\mathfrak{h}a) = I(\mathfrak{h})a, \quad I^*(a^{-1}\mathfrak{h}a) = a^{-1}I^*(\mathfrak{h})$

ヨッテ $\mathfrak{h}$ ガ $\mathfrak{G}$ ノ不変部分群ナルタメニハ凡テノ $a \in \mathfrak{G}$ ニ對シテ $I(\mathfrak{h})a = I(\mathfrak{h})$ 或ヒハ $a^{-1}I^*(\mathfrak{h}) = I^*(\mathfrak{h})$ ナルコトガ必要十分デアリマス．（定理1ニヨル）、即チ $I(\mathfrak{h})$，$I^*(\mathfrak{h})$ ガ両側-Ideal トナルコトガ條件ニナリマス。

次ニ $\mathfrak{N}$ ヲ $\mathfrak{G}$ ノ不変部分群トシ $\mathfrak{G}$ カラ $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ ヘノ準同型寫像ヲ φ トスル。

$$\varphi(\mathfrak{G}) = \mathfrak{G}/\mathfrak{N}$$

コノトキ明ラカニ $\mathfrak{R}(\mathfrak{G})$ カラ $\mathfrak{R}(\mathfrak{G}/\mathfrak{N})$ ヘノ環トシ

テノ準同型寫像ガ生ジマスガ之モ亦 α ト書クコトニスレバ容易ニ分ル様ニ

$$\alpha \mid \mathfrak{A}(\mathfrak{G}) = \mathfrak{A}(\mathfrak{G}/\mathfrak{N}) \simeq \mathfrak{A}(\mathfrak{G})/I(\mathfrak{N})$$

α ハ又 $\mathfrak{G}$ ト $\mathfrak{A}(\mathfrak{G})$ トノ Holomorph カラ $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ ト $\mathfrak{A}(\mathfrak{G}/\mathfrak{N})$ トノ Holomorph ヘノ寫像ニ拡張サレマスカラ任意ノ部分群 $\mathfrak{h}$ ニ対シ

$$\alpha(I(\mathfrak{h})) = \alpha(\mathfrak{h}, \mathfrak{A}(\mathfrak{G})) = (\alpha(\mathfrak{h}), \alpha\mathfrak{A}(\mathfrak{G}))$$
$$= I(\alpha(\mathfrak{h}))$$

ヨッテ次ノ定理ガ得ラレマス。

定理4. $\mathfrak{N}$ ガ $\mathfrak{G}$ ノ不変部分群ナルタメニ必要且十分ナル條件ハ $I(\mathfrak{N})$ (又ハ $I^*(\mathfrak{N})$) ガ $\mathfrak{A}(\mathfrak{G})$ ノ両側-Ideal トナルコトデアッテ コノ時

$$(19) \quad \mathfrak{A}(\mathfrak{G}/\mathfrak{N}) \simeq \mathfrak{A}(\mathfrak{G})/I(\mathfrak{N})$$

又 $\mathfrak{G} \to \mathfrak{G}/\mathfrak{N}$, $\mathfrak{A}(\mathfrak{G}) \to \mathfrak{A}(\mathfrak{G}/\mathfrak{N})$ ナル準同型寫像ヲ α トスレバ $\mathfrak{G}$ ノ任意ノ部分群 $\mathfrak{h}$ ニ対シ

$$(20) \quad \alpha(I(\mathfrak{h})) = I(\alpha(\mathfrak{h}))$$

特ニ $\mathfrak{h}$ ガ $\mathfrak{N}$ ヲ含メバ

$$(21) \quad I(\mathfrak{h})/I(\mathfrak{N}) \simeq I(\mathfrak{h}/\mathfrak{N})$$

例ヘバ $\mathfrak{G}$ ノ交換子群ヲ $\mathfrak{G}'$ トスレバ $I(\mathfrak{G}')$ ハ $1-aba^{-1}b^{-1}$ カラ生成サレタ両側-Ideal 即チ $ab-ba$ カラ生成サレタ両側-Ideal デアリマスカラ，ソレハ $\mathfrak{A}(\mathfrak{G})$ ノ両

側-Ideal デ剰余環ガ可換トナル如キ最小ノIdeal デアリマス。

Ⅶ. $\mathfrak{h}$ ヲ $\mathfrak{G}$ ノ任意ノ部分群トシ $\mathfrak{R}(\mathfrak{G})$ ヲ $\mathfrak{G}$-左加群ト考ヘ $\mathfrak{G}$ ヲ右カラノ自己同型トスル時 §1 ノ如クニシテ $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{R}(\mathfrak{G})$ ノ Holomorph ノ中デ

$$(22)\quad \mathfrak{t}_0=\mathfrak{R}(\mathfrak{G}),\ \mathfrak{t}_1=(\mathfrak{h},\mathfrak{t}_0),\ \mathfrak{t}_2=(\mathfrak{h},\mathfrak{t}_1),$$
$$\mathfrak{t}_3=(\mathfrak{h},\mathfrak{t}_2),\ \text{-------}$$

ヲ作ル. 之レ等ハ何レモ $\mathfrak{R}(\mathfrak{G})$ ノ左-Ideal デ $\mathfrak{t}_0\supseteq\mathfrak{t}_1\supseteq\mathfrak{t}_2\supseteq$ ------- トナッテ居マス。コレヲ $\mathfrak{R}(\mathfrak{G})$ ノ $\mathfrak{h}$-降核心-Ideal 列ト呼ブコトニシマス。[4)]

特ニ $\mathfrak{t}_1=I(\mathfrak{h})$.

次ニ $\mathfrak{R}(\mathfrak{G})$ ヲ $\mathfrak{G}$-右加群トシ $\mathfrak{G}$ ヲソノ左カラノ自己同型ト考ヘ　$\mathfrak{R}(\mathfrak{G})$ ノ任意ノ右-Ideal $\mathfrak{r}$ ガ與ヘラレタトキ, $\mathfrak{h}$ ニ含マレル凡テノ h ニ對シテ $(h,\sigma)=(h-1)\sigma$ ガ $\mathfrak{r}$ ニ含マレル様ナ σ ノ全体ヲ

$$\{\mathfrak{h},\mathfrak{r}\}$$

ト書クコトニシマス。ソコデ

$$(23)\quad \mathfrak{r}_0=0,\ \mathfrak{r}_1=\{\mathfrak{h},\mathfrak{r}_0\},\ \mathfrak{r}_2=\{\mathfrak{h},\mathfrak{r}_1\},$$
$$\mathfrak{r}_3=\{\mathfrak{h},\mathfrak{r}_2\},\ \text{-------}$$

トオケバ之等ハ何レモ $\mathfrak{R}(\mathfrak{G})$ ノ右-Ideal デ $\mathfrak{r}_0\subseteq\mathfrak{r}_1\subseteq\mathfrak{r}_2\subseteq$ ----- トナリマス。

---

4) 脚註 1 ノ論文参照

コレヲ $\mathfrak{R}(\mathfrak{g})$ ノ $\mathfrak{h}$-昇核心-Ideal 列ト呼ブコトニシマス。[5] 特ニ $\mathfrak{r}_1 = \mathfrak{I}^*(\mathfrak{h})$ トナリマス。

部分群 $\mathfrak{h}$ ニ對スル $\mathfrak{h}$-降核心-Ideal 列 (22) 及ビ $\mathfrak{h}$-昇核心-Ideal 列 (23) ニ對シ

(24) $\mathfrak{h}_1 = G(\mathfrak{t}_1), \quad \mathfrak{h}_2 = G(\mathfrak{t}_2), \cdots\cdots$

(25) $\mathfrak{f}_1 = G^*(\mathfrak{r}_1), \quad \mathfrak{f}_2 = G^*(\mathfrak{r}_2), \cdots\cdots$

トオケバ定理1ニヨリ $\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{f}_1 = \mathfrak{h}$ トナリ又 $\mathfrak{h}_1 \supseteq \mathfrak{h}_2 \supseteq \cdots\cdots$, $\mathfrak{f}_1 \supseteq \mathfrak{f}_2 \supseteq \cdots\cdots$ トナリマスガ, コノ (24), (25) ノ系列ヲソレゾレ $\mathfrak{h}$ ノ T-系列, T*-系列ト呼ブコトニシマス。以下専ラコノ両系列ノ性質ヲ調ベテ見ルコトニシマス。

8. 先ヅ次ノ補助定理ヲ証明シテオキマス。

補助定理3. (22), (23) ノ系列 $\mathfrak{t}_0, \mathfrak{t}_1, \mathfrak{t}_2, \cdots\cdots, \mathfrak{r}_0, \mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \cdots\cdots$ ニ對シテ

(26) $\mathfrak{r}(\mathfrak{t}_n) = \mathfrak{r}_n$

証明. $n = 0$ ノ時ハ明白. $n = 1$ ハ (11) ノ等式デアリマス. ヨッテ n ニ関スル帰納法ヲ用ヒテ (26) ハ既ニ証明サレタモノト假定シマス。サテ定義ニヨリ

$\mathfrak{t}_{n+1} = \sum_{h \in \mathfrak{h}} \mathfrak{t}_n (h-1)$ 又 $\mathfrak{r}_{n+1}$ ハ凡テノ $h \in \mathfrak{h}$ ニ對シ $(h-1)\sigma \in \mathfrak{r}_n$ トナルヤウナ σ ノ全体デス。ヨッテ $\mathfrak{t}_{n+1}\sigma = \sum \mathfrak{t}_n (h-1)\sigma \subseteq \sum \mathfrak{t}_n \mathfrak{r}_n = 0$. 即チ

5) 脚註1) ノ論文参照.

$r_{n+1} \supseteq r(\mathfrak{l}_{n+1})$. 逆ニ $\tau \in r(\mathfrak{l}_{n+1})$ ヲトレバ $\mathfrak{l}_{n+1}\tau = 0$ デアルカラ特ニ $\mathfrak{l}_n(h-1)\tau = 0$ ヨッテ $(h-1)\sigma \in r(\mathfrak{l}_n) = r_n$. 故ニ $\tau \in r_{n+1}$.

$\mathfrak{R}(\mathfrak{G})$ ニ於テ (13) ガ成立スレバ (26) カラ $l(r_n) = \mathfrak{l}_n$. ヨッテ (14) ニヨリ $G(\mathfrak{l}_n) = G^*(r_n)$, 即チ $\mathfrak{h}_n = \mathfrak{f}_n$ トナリマス. 然シ一般ニハ (13) ガ成立シナイデ (例ハ次ニ挙ゲル) (26) カラ $G(\mathfrak{l}_n) \subseteq G^*(r_n)$, $\mathfrak{h}_n \subseteq \mathfrak{f}_n$ ヲ得ルダケデス. ヨッテ

定理5. $\mathfrak{G}$ ノ任意ノ部分群 $\mathfrak{h}$ ノ Ⅰ-系列, Ⅰ*-系列ヲソレゾレ $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2, \ldots\ldots, \mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \ldots\ldots$ トスレバ一般ニ

$$\mathfrak{h}_n \subseteq \mathfrak{f}_n$$

特ニ $\mathfrak{R}(\mathfrak{G})$ ニ於テ (13) ガ成立スレバ (例ヘバ $\mathfrak{R}$ ガ可換体ナル場合) $\mathfrak{h}_n = \mathfrak{f}_n$ トナル。

(13) 及ビ $\mathfrak{h}_n = \mathfrak{f}_n$ ノ成立シナイ例トシテ有理整数上ノ群環 $\mathfrak{R}(\mathfrak{G})$ ヲ考ヘマス。コノ時 $\mathfrak{G} = \mathfrak{h}$ トシテソノ昇核心-Ideal列ヲ考ヘレバ先ヅ $r_0 = 0$, $r_1 = \{\mathfrak{G}, r_0\}$ ハ $e(\mathfrak{G}) = \sum_{g \in \mathfrak{G}} g$ カラ生成サレタ Ideal $r_2 = \{\mathfrak{G}, r_1\}$ ハ凡テノ $g \in \mathfrak{G}$ ニ対シ

$$(g-1)\sigma = \gamma_0\, e(\mathfrak{G}), \quad \gamma_0 \in \mathfrak{R}$$

ナル如キ σ ノ全体デスガ上式ノ両辺ニ於ケル係数ノ和 ($\sigma = \sum_{g \in \mathfrak{G}} \alpha_g \cdot g$, $\alpha_g \in \mathfrak{R}$ ナルトキ $\sum_g \alpha_g$ ヲ云フ) ヲ

考ヘレバ$\mathfrak{G}$ノ位数ヲnトスルトキ

$$0 = \mathfrak{r}_0 : n,$$

即チ　$\mathfrak{r}_0 = 0, \quad (g-1)\sigma = 0, \quad \sigma \in \mathfrak{r}_1$

ヨッテ $\mathfrak{r}_2 = \mathfrak{r}_1$, 從ッテ又 $\mathfrak{r}_1 = \mathfrak{r}_2 = \mathfrak{r}_3 = \cdots\cdots$, $\mathfrak{f}_1 = \mathfrak{f}_2 = \mathfrak{f}_3 = \cdots\cdots$ トナル. 一方$\mathfrak{g}_n$ノ方ハ一般ニハ次ニ述ベル如ク $\mathfrak{g}_1 \neq \mathfrak{g}_2 \neq \cdots\cdots$ ナル故確カニ $\mathfrak{g}_n \neq \mathfrak{f}_n$ ヨッテ(13)モ成立シナイ。

定理**5**.及ビ上ノ注意ニヨリ今後ハ主トシテT-系列ノミヲ取扱フコトニシマス。

9. $\mathfrak{N}$ハ$\mathfrak{G}$ノ不変部分群トシ$\mathfrak{N}$ノT-系列ヲ考ヘマス. コヽデ

$$\mathfrak{l} = \mathfrak{l}_1 = (\mathfrak{N}, \mathfrak{R}(\mathfrak{G}))$$

トオケバ容易ニ分ルヤウニ一般ニ

$$(20) \quad \mathfrak{l}_n = \mathfrak{l}^n$$

ソシテ之レ等ノIdeal $\mathfrak{l}, \mathfrak{l}^2, \mathfrak{l}^3, \cdots\cdots$ ハ何レモ両側-Idealトナリマスカラ定理4ノ証明ト同様ニシテソレラニ對應スル部分群 $\mathfrak{N}_n = G(\mathfrak{l}_n)$ ハ何レモ$\mathfrak{G}$ノ不変部分群トナリマス。特ニ$\mathfrak{N} = \mathfrak{G}$トスレバ$\mathfrak{l}$ハ$1-a$, $a \in \mathfrak{G}$カラ生成サレタ両側-Idealデスカラ我々ノT-系列ハ$\mathfrak{G}$ガ自由群デ$\mathfrak{R}$ガ有理整数環ノ場合ニハMagnusノ"Dimensionsgruppe"ト一致シ又$\mathfrak{G}$ガp-群デ$\mathfrak{R}$ガ標数pノ有限体ノ場合ニハJenningsノ$\mathfrak{R}$-系列ト一致スルワケデス。[6]

定理8. $\mathfrak{N}$ ヲ $\mathfrak{G}$ ノ任意ノ不変部分群

$$\mathfrak{N}_1 = \mathfrak{N} \supseteq \mathfrak{N}_2 \supseteq \mathfrak{N}_3 \supseteq \mathfrak{N}_4 \supseteq \cdots\cdots$$

ヨリノ $\mathfrak{J}$ー系列トスレバ

(28) $(\mathfrak{N}_m, \mathfrak{N}_n) \subseteqq \mathfrak{N}_{m+n}$.

又 $\mathfrak{K}$ ノ標数ガ $p(\neq 0)$ デアレバ

(29) $\mathfrak{N}_n^p \subseteqq \mathfrak{N}_{np}$

証明. $g_m \in \mathfrak{N}_m$, $g_n \in \mathfrak{N}_n$ トスレバ定義ニヨリ

$$g_m \equiv 1 \quad (\mathfrak{I}^m), \quad g_n \equiv 1 \, (\mathfrak{I}^n)$$

ヨッテ $(g_m - 1)(g_n - 1) = g_m g_n - g_n - g_m + 1$ カラ

$$g_m g_n \equiv g_m + g_n - 1 \qquad (\mathfrak{I}^{m+n})$$

同様ニ $\quad g_n g_m \equiv g_m + g_n - 1 \qquad (\mathfrak{I}^{m+n})$

故ニ $\quad g_m g_n \equiv g_n g_m, \quad g_m^{-1} g_n^{-1} g_m g_n \equiv 1 \qquad (\mathfrak{I}^{m+n})$

即チ $\quad g_m^{-1} g_n^{-1} g_m g_n \in \mathfrak{N}_{m+n}$,

$$(\mathfrak{N}_m, \mathfrak{N}_n) \subseteqq \mathfrak{N}_{m+n}$$

次ニ $\mathfrak{K}$ ノ標数ガ p ナラバ

$$g_n \equiv 1 \, (\mathfrak{I}^n), \quad g_n - 1 \in \mathfrak{I}^n$$

カラ $\quad (g_n - 1)^p = g_n^p - 1 \in \mathfrak{I}^{np}$

---

6) S. A. Jennings: *The structure of the group ring of a p-group over a modular field*, Trans. Amer. Soc. 50 (1941) P. 175–185.

即チ　$\mathfrak{g}_n^p \in \mathfrak{N}_{np}$, $\mathfrak{N}_n^p \subseteq \mathfrak{N}_{np}$

ヨッテ $\mathfrak{N}$ ガ不変部分群ノ場合ハ $\mathfrak{T}$－系列ハ"$\mathfrak{N}$－核心群列"ニナッテヰルワケデ特ニ $\mathfrak{K}$ ノ標数ガ p ナラバソノ剰余群ハ凡テ p－群デアリマス。

10. 特ニ $\mathfrak{N}=\mathfrak{G}$ トシテ $\mathfrak{K}$ ノ標数ガ p (≠0, 素数) ナル場合ヲ考ヘマス。[7]
指数 $[\mathfrak{G}:\mathfrak{N}]$ ガ p－巾トナル如キ $\mathfrak{G}$ ノ凡テノ不変部分群ノ Durchschnitt ヲ $\mathfrak{D}_p$ トスレバ $\mathfrak{D}_p$ モ亦 p－巾ノ指数ヲ有スル不変部分群デアリマス。[8] コノ時定理4ニヨレバ $\mathfrak{K}(\mathfrak{G})/\mathfrak{I}(\mathfrak{D}_p)$ ハ p－群 $\mathfrak{G}/\mathfrak{D}_p$ ノ $\mathfrak{K}$ 上ノ群環ト同型デスカラ $\mathfrak{l}=\mathfrak{l}_1=(\mathfrak{G}, \mathfrak{K}(\mathfrak{G}))$ トスルト中適当ニ m ヲトレバ

(30)　$\mathfrak{l}^m \subseteq \mathfrak{I}(\mathfrak{D}_p)$

トナリマス。[9] 一方前ノ注意ニヨリ $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_n$ ハ常ニ p－群デスカラ

---

7) $\mathfrak{K}$ ハ必ズシモ有限体デナクテモヨイ。

8) 例ヘバ H. Zassenhaus: Lehrbuch der Gruppentheorie I. 参照.

9) 脚註1)ノ論文ニ於ケル定理ヲ参照　ソコデハ $\mathfrak{K}$ ガ有限体デアッタガ標数ガ p デアリサヘスレバ定理ハ常ニ成立スルコトハ見易イ。

(31) $\mathfrak{G}_n = G(\mathfrak{l}^m) \geqq \mathfrak{D}_p$

(30), (31) カラ $\mathfrak{D}_p \leqq G(\mathfrak{l}^m) \leqq G(I(\mathfrak{D}_p)) = \mathfrak{D}_p$。

$$\mathfrak{G}_n = G(\mathfrak{l}^m) = \mathfrak{D}_p.$$

以上ノコトガ$\mathfrak{G}$ノ代リニソノ不変部分群$\mathfrak{N}$ヲトッテモ成立スルコトハ容易ニ知ラレマス。

定理7. $\mathfrak{N}$ハ$\mathfrak{G}$ノ不変部分群トシ$\mathfrak{N}$ノ標数ヲp($\neq 0$, 素数)トスレバ$\mathfrak{N}$ノI-系列ハ遂ニハソノ最大p-剰餘群ト一致スル。

系1. $\mathfrak{G}$ノ不変部分群$\mathfrak{N}$ガp-群ナルタメニ必要且十分ナル條件ハ標数pノ群環$\mathfrak{R}(\mathfrak{G})$ニ於テ$\mathfrak{l} = (\mathfrak{N}, \mathfrak{R}(\mathfrak{G}))$ガ零巾ナルコトデアル。

証明 必要ナルコトハ註9ニ依ル。又$\mathfrak{l}$ガ零巾デ$\mathfrak{l}^m = 0$ナラバ$\mathfrak{N}_m = G(\mathfrak{l}^m) = 1$, ヨッテ定理7ニヨリ$\mathfrak{N}$ハ$p$-群トナリマス。

系2. $\mathfrak{G}$ガp-群ナルタメニ必要且ツ十分ナル條件ハ$\mathfrak{G}$ノ標数pナル有限体上ノ既約表現ガ唯一ツナルコトデアル。[10]

証明. 系1ニ於テ$\mathfrak{N} = \mathfrak{G}$トセヨ。$\mathfrak{R}(\mathfrak{G})/\mathfrak{l}$ノrankハ1ダカラ$\mathfrak{l} = (\mathfrak{N}, \mathfrak{R}(\mathfrak{G}))$ガ零巾ナラバ上ノ系ヲ得ル。

次ニ群環$\mathfrak{R}(\mathfrak{G})$ノ根基(Radikal)ニ就テ考察スル

10) コノコトハR. BrauerノModular-表現ニ関スル基本定理ヲ用ヒレバ勿論明カナコトデアリマス。

コトニシマス。 $\mathfrak{a}$ハ零巾デスカラ前定理系1ニヨリ

$G(\mathfrak{a})$ハp-群デ而モ定理4ニヨリソレハ$\mathfrak{G}$ノ不変部分群デアリマス。

逆ニ$\mathfrak{G}$デ不変ナ任意ノp-群$\mathfrak{N}$ヲトレバ$I(\mathfrak{N})$ハ$\mathfrak{K}(\mathfrak{G})$ノ両側Idealデ且ツ零巾トナリマスカラ（定理7系1）

$$I(\mathfrak{N}) \subseteqq \mathfrak{a}$$

ヨッテ

$$\mathfrak{N} = GI(\mathfrak{N}) \subseteqq G(\mathfrak{a}), \quad \text{（定理1）}$$

即チ$G(\mathfrak{a})$ハ$\mathfrak{G}$ニ於テ最大ナルp-群ノ不変部分群デアリマス。

定理8. $\mathfrak{K}$ヲ標数pナル環トシ$\mathfrak{K}(\mathfrak{G})$ノ根基ヲ$\mathfrak{a}$トスレバ$G(\mathfrak{a})$ハ$\mathfrak{G}$ニ於ケル最大ノ不変$p$-群デアル。

特ニp-Sylow群$\mathfrak{P}$ガ$\mathfrak{G}$ノ不変部分群デアル場合ヲ考ヘレバ上ノ定理ニヨリ$G(\mathfrak{a}) = \mathfrak{P}$デスカラ$IG(\mathfrak{a}) = I(\mathfrak{P})$ハ$\mathfrak{a}$ニ含マレテヰマスガ定理4ニヨリ$\mathfrak{K}(\mathfrak{G})/I(\mathfrak{P})$ハ$\mathfrak{G}/\mathfrak{P}$ノ群環ト同型デソレハ準単純即チ根基ヲ含マナイカラ$\mathfrak{a} = I(\mathfrak{P})$ 従ッテ$IG(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}$. 逆ニ$IG(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}$ナラバ$\mathfrak{K}(\mathfrak{G})/IG(\mathfrak{a}) \cong \mathfrak{K}(\mathfrak{G}/G(\mathfrak{a}))$ハ準単純環ナル故$p\ [\mathfrak{G} : \mathfrak{G}(\mathfrak{a})]$. ヨッテ$G(\mathfrak{a})$ハ$\mathfrak{G}$ノ$p$-Sylow群トナリマス。

定理9.[11] $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{K}(\mathfrak{G})$, $\mathfrak{a}$等ヲ定理8ニ於ケルト同様トスレバ$\mathfrak{G}$ノp-Sylow群$\mathfrak{P}$ガ$\mathfrak{G}$デ不変ナルタメニ必要且

脚註11) 次頁ヘ

十分ナル條件ハ

$$I\,G(\mathfrak{n}) = \mathfrak{N}$$

又コノトキ

$$\mathfrak{n} = I(\mathfrak{g})$$

11. 次ニ k ガ有理整數域デアル場合ヲ考ヘテ見マス。コノ場合ニモ $\mathfrak{G}$ ノ T-群列ハ遂ニハスベテ一致シテシマヒマスカラ，之ヲ

$$\mathfrak{G}_m = \mathfrak{G}_{m+1} = \cdots\cdots$$

トシマス。サテ g ガ $\mathfrak{G}_m = G(\mathfrak{l}^m)$ ニ屬シテ居ルナラバ $g-1 \in \mathfrak{l}^m$。コレデ係數ハ有理整數デアリマスガ任意ノ素數 p ヲトッテ mod. p デ考ヘテモ $g-1$ ハ矢張リ $\mathfrak{l}^m$ ニ屬シマス。即チ $G(\mathfrak{l}^m)$ ハ任意ノ p ニ對シテ k ヲ $GF(p)$ トシタトキノ同ジ $G(\mathfrak{l}^m)$ ニ含マレマス。即チ定理7ニヨリ凡テノ $\mathfrak{D}_p$ ノ Durchschnitt $\mathfrak{J}_{c+1}$ ニ含マレルコトニナリマス。所デ $\mathfrak{J}_{c+1}$ ト云フノハ容易ニ分カル如ク實ハ $\mathfrak{G}$ ノ普通ノ意味ノ降核心群列ノ最後ノ項，即チ最大零巾剰餘群 (grösste nilpotente Faktorgruppe) デアリマス。[12]

---

(11) コノ定理ノ後半ニツイテハ L. Lombardo-Radici: Intorno alle algebre legato ai gruppi di ordine finito, Rend. Seminario Mat. Roma. (4) vol. 3 (1939) p. 237−256 參照.

(12) 例ヘバ Zassenhaus ノ教科書參照.

一方定理6ニヨレバ $\mathfrak{G}$ ノ T-群列ハ $\mathfrak{G}$ ニ始マル一ツノ $\mathfrak{G}$-核心群列ナル故ソノ各群ハ凡テ $\mathfrak{Z}_{c+1}$ ヲ含ム。ヨッテ $G(\mathfrak{l}^m) = \mathfrak{Z}_{c+1}$. コノ事ハ $\mathfrak{G}$ ノ代リニ $\mathfrak{G}$ ノ任意ノ不変部分群 $\mathfrak{N}$ ヲトッテモ同様デアリマス。

定理10. $\mathfrak{G}$ ヲ有限群, K ヲ有理整数域トスレバ $\mathfrak{G}$ ノ T-群列ハ遂ニ $\mathfrak{G}$ ノ最大零巾剰余群ト一致スル。

コノ定理ニヨリ $\mathfrak{G}$ ガ零巾デアルトイフコトヲ"T-群列ガ遂ニ 1 ニ達スル"トイフコトヲ以テ定義シ得ルワケデス。

又以上ノ考察カラ明カナル如ク有限群 $\mathfrak{G}$ トソノ交換子群 $\mathfrak{G}'$ トガ相異ナルタメニ必要ニ テ且ツ十分ナル條件ハ $\mathfrak{l} \neq \mathfrak{l}^2$（但シ $\mathfrak{l} = (\mathfrak{G}, K(\mathfrak{G}))$）ナルコトデアリマス。従ッテ $\mathfrak{l}$ ヲ乗法群, $\mathfrak{l}^2$ ヲソノ部分群ト見タトキノ関係ヲ映ヘル Matrix A ヲ計算シテ見レバヨイワケデスガ実ハコノ Matrix ノ rank ハ $n-l$（但シ n ハ $\mathfrak{G}$ ノ位数）デソノ単因子ニ含マレル素数ト $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}'$ ノ位数ヲ割ル素数トガ一致シマス。従ッテ Matrix A ノ性質ハ群ノ構造ト密接ナ関係ヲ持ツ様ニ思ハレマス。

12. 次ニ Algebra ノ理論ヲ用ヒテ上ノ對應ノ様子ヲ調ベテ見ルコトニシマス。[13)]

---

13) R. Brauer and C. Nesbitt, On the modular characters of groups, Ann. of Math. vol. 42 (1941), p. 587参照。

$\mathfrak{G}$ハ有限群, kハ標数pナル体, $k(\mathfrak{G})=A$トシヌ A ノ根基ヲ普通ノ記法ニ做ッテNトシマス。

$$(32)\quad A=Ae_1+Ae_2+\cdots\cdots+Ae_{r_1}+Ae_{r_1+1}+\cdots\cdots+Ae_{r_2} +\cdots\cdots+Ae_{r_n}$$

$$(33)\quad \varepsilon_i=e_{r_{i-1}+1}+\cdots\cdots+e_{r_i}\qquad (i=1,\cdots\cdots,h)$$

コンデ$A\varepsilon_1$, $A\varepsilon_2$, $\cdots\cdots$, $A\varepsilon_h$ハAヲ各Blockニ相當シテ分ケタモノデ, 又$\mathfrak{l}=(\mathfrak{G},\mathfrak{H}(\mathfrak{G}))$ガ

$$(34)\quad \mathfrak{l}=Ne_1+Ae_2+\cdots\cdots+Ae_{r_h}$$

トナル如ク取ッテオキマス. コンデ$\mathfrak{l}^h$ヲ計算スルワケデスガ容易ニ

$$(35)\quad \mathfrak{l}^h=(Ne_1)^h+(Ae_2+\cdots\cdots+Ae_{r_1})Ne_1+Ae_2 +\cdots\cdots+Ae_{r_h}$$

ヨッテ$\mathfrak{l}^m=\mathfrak{l}^{m+1}=\cdots\cdots$トナルノハ$(Ne_1)^m=(Ne_1)^{m+1}=\cdots\cdots=0$トナルトキデアッテコノ時ニハ

$$(36)\quad \mathfrak{l}^m=(Ae_2+\cdots\cdots+Ae_{r_1})Ne_1+Ae_2+\cdots\cdots+Ae_{r_1} +Ae_{r_1+1}+\cdots\cdots+Ae_{r_h}$$

トナリマス. $\mathfrak{G}$ガ指数pノ不変部分群ヲ有セヌタメニ必要且ツ十分ナ條件ハ定理7ニヨレバ$\mathfrak{l}=\mathfrak{l}^2=\cdots\cdots=\mathfrak{l}^m=\cdots\cdots$トナルコトデアリマスカラ(34), (35)カラ條件

(37) $$Ne = (Ae_2 + \cdots\cdots + Ae_{r_1})Ne_1$$

ガ得ラレマス。

次ニ

$$\varepsilon_1' = \varepsilon_2 + \cdots\cdots + \varepsilon_n,\quad A\varepsilon_1' = I'$$

トシテ $G(I')$ ヲ考察スルコトニシマス。

先ヅ I' ハ両側-*Ideal* ナル故 $G(I')$ ハ $\mathfrak{G}$ ノ不変部分群トナルコトハ明カデスガ $G(I')$ ノ位数ハ p デ割レマセン。カリニ $a \in G(I')$, $a \neq 1$, $a^p = 1$ トスレバ $a-1$ ハ I' ニ含マレル故 $(a-1)\varepsilon_1 = 0$, $a\varepsilon_1 = \varepsilon_1$ ヨッテ適当ニ $R(\mathfrak{G})$ カラ c ヲトレバ $\varepsilon_1 = (1+a+\cdots\cdots+a^{p-1})c$ トスルコトガ出来マス。コレデ両辺ヲ $R(\mathfrak{G})/I'$ デ考ヘレバ右辺ハ 0 トナル故 $\varepsilon_1 \in I'$ トナリ之ハ明カニ矛盾デアリマス。逆ニ $\mathfrak{N}$ ヲ $\mathfrak{G}$ ノ不変部分群デソノ位数 n_1 ガ p デ割レヌモノトシマス。ソコデ

$$e(\mathfrak{N}) = \frac{1}{n_1}\sum_{a \in \mathfrak{N}} a$$

トオケバ $e(\mathfrak{N})$ ハ $R(\mathfrak{G})$ ノ核心ニ属スル *idempotent* ナ要素ナル故幾ツカノ ε_i ノ和トナリマス。所デ $\varepsilon_1 e \neq 0$ (何トナレバ $\varepsilon_1 e = 0$ ナラバ $R(\mathfrak{G})/I'$ デ考ヘルコトニヨリ[14] ε_1 ハ I' ニ属スルコトヽナリ矛盾ヲ生ズル)。ヨッテ e ハ ε_1 ヲ含ミマス。a ヲ $\mathfrak{N}$ ノ任意ノ要素トスレバ

---

(14) $e(\mathfrak{N}) \equiv 1 \mod. I'$ ニ注意。

$(1-a)e = 0$ ナル故上ノ注意ニヨリ $(1-a)\varepsilon_1 = 0$。
$1-a \in A\varepsilon_1' = \mathfrak{l}'$ 即チ $\mathfrak{X} \subseteq G(\mathfrak{l}')$ ヨッテ次ノコトガ分リマシタ。

定理11. K ヲ標数 p ナル有限体 $K(\mathfrak{G}) = A$ トシ ε_1 ヲ A ノ *first block* ニ属スル *idempotent* トスル。$1-\varepsilon_1 = \varepsilon_1'$, $A\varepsilon_1' = \mathfrak{l}'$ トスレバ $G(\mathfrak{l}')$ ハ $\mathfrak{G}$ ニ含マレル p ト素ナル位数ヲ持ツ不変部分群ノ中最大ナルモノデアル。

上ノ定理ニヨリ $G(\mathfrak{l}') = \mathfrak{X}_p$ トスレバ (36) カラ

$$I(\mathfrak{X}_p) \subseteq \mathfrak{l}' \subseteq \mathfrak{l}^m = I(\mathfrak{D}_p)$$

$GI(\mathfrak{X}_p) = \mathfrak{X}_p$, $GI(\mathfrak{D}_p) = \mathfrak{D}_p$ ナル故 $\mathfrak{X}_p = \mathfrak{D}_p$ ナルタメニ必要且ツ十分ナル條件ハ $\mathfrak{l}' = \mathfrak{l}^m$ ナルコトデアル。(36) ヲ見レバ コレハ又

$$Ae_2 + \cdots + Ae_{r_1} = 0$$

ト等値デアル。ヨッテ次ノ R. Brauer ノ定理ヲ得ル。[15]

定理12. $\mathfrak{G}$ ヲ有限群, K ヲ標数 p ナル体トシ $\mathfrak{G}$ ノ位数ガ丁度 p^α デ割レルトキ $\mathfrak{G}$ ガ指数 p^α ナル不変部分群ヲ有スルタメニ必要且ツ十分ナル條件ハ $\mathfrak{G}$ ノ *first block* ニ属スル既約表現ガ唯一ツナルコトデアル。

13. 今迄 K ガ標数 p ナル場合, 有理整数環ナル場合等ニツイテ $K(\mathfrak{G})$ ニ於ケル T- 系列ノ比較的簡単ナ性質ヲ

15) 脚註 13) 参照.

述ベテキマシタガ Γー系列ノ構造ソノモノニハ触レマセンデシタ。

然シコレハ Magnus 等ノ結果ニヨリ知ラレテキマス：即チ Jennings, Zassenhaus[16] ニヨレバ $\mathfrak{K}$ ガ標数 p ノ有限体ナルトキ $\mathfrak{G}$ ノ Γー系列ヲ $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \cdots\cdots$ トスレバ

$$(38) \quad \mathfrak{G}_n = \{ \mathfrak{Z}_i^{p^j} \}, \quad i p^j \geqq n, \qquad n = 1, 2, \cdots\cdots$$

ココニ $\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2, \cdots\cdots$ ハ $\mathfrak{G}$ ノ普通ノ降核心群列デアリマス. Jennings ハ有限 pー群ノ場合バカリ考ヘテキマスガ，ソノ結果ガ今マデ述ベタ意味デ任意ノ群ニ付キ成立スルコトハ容易ニ知レマス．又 Magnus, Witt[17] ニヨレバ $\mathfrak{K}$ ガ有理整数環デ $\mathfrak{G}$ ガ自由群ナル場合 $\mathfrak{G}$ ノ Γー系列ハソノ降核心群列ト一致スルコトガ知ラレテキマス：即チ

$$(39) \quad \mathfrak{G}_n = \mathfrak{Z}_n, \qquad n = 1, 2, \cdots\cdots$$

---

16) 脚註 6) 参照． 又 H. Zassenhaus, Ein Verfahren jeder endlichen p-Gruppe einen Lie-Ring mit der Charakteristik p zuzuordnen, Hamb. Abh. 13 (1939).

17) 脚註 2) 参照． 又 E. Witt, Treue Darstellung Liescher Ringe, Crelle J, 177 (1937), S. 152–160.

コノ結果モ $\mathfrak{G}$ ガ自由群デナクトモ一般ニ成立スルデアラウコトガ予想サレルノデスガ未ダ証明サレマセン。(ソレハ定理10等カラ見テモ確カラシイ)

其ノヤウニ構造ガハッキリ出テシマヘバ定理6, 7, 10等ハ当然ノコトダッタワケデス。然シJenningsニシロ, Magnusニシロ上ニ述ベタ結果ノ証明ハ簡単デハアリマセン。

之ヲモット簡単ニ且ツ統一的ニ証明スルコトガ望マシイト思ヒマス。サウシテ若シ(39)ガ一般ノ群ニツイテ確カメラレルナラバ，ソレハ(Magnusガ自由群ニ応用シタ如ク)群 $\mathfrak{G}$ ノ構造ヲ調ベルノニ有力ナ手段トナルノデハナイデセウカ.——— 切ニ御教示ヲ得タイト思ヒマス。