

1097 Priesz - Fischer 1 定理 = 就テ

中野 秀五郎 (東大)

私が學士院記事 18, (1942) 350 - 353 = テ
Priesz - Fischer Satz im normierten
teilweise geordneten Modul ト云フ表題ガ
norm, τ ν σ -complete vector-lattice 即
チ normierter teilweise geordneter Modul
ガ = 於ケル norm = 關スル Fundamental
sequence, 收斂性 = ツイテ書キマシタ。此処ガ其レ
= 關スル注意ヲ述ベタク思ヒマス。

先ヅ 此 = 關シテ 次ノニツノ 條件ヲ考ヘマス。

$$1) \quad a_1 \geq a_2 \geq \dots, \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} a_\nu = 0 \text{ + ラバ}$$

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \|a_\nu\| = 0$$

$$2) \quad 0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots = \tau \sup_{\nu} \|a_\nu\| < \infty \text{ + ラバ}$$

$a_\nu \leq l$ ($\nu = 1, 2, \dots$) + l が存在スル。即チ
 a_1, a_2, \dots は有界。

定理 / トシテ, 若シモ 此ガ 1) / 性質ヲ有スル + ラバ,
norm = 關スル fundamental sequence が有
界 + ラバ、コノ sequence カラ 收斂 (order = τ) ス
ル sequence ヲ選ビ 出セマス。即チ Kantorovitch
ノ 語ヲ用フレバ、此ノ sequence ハ τ -convergent

デアリマス。此ノ証明ハアマリ簡單デアリマセンデシタ。
此ノ定理ノカラ、 \mathcal{N} ガ 1) ト 2) ト同時ニ有スルナラバ
 \mathcal{N} ガ normニ関シテ completeデアアルコトヲ証明シ
マシタ。

以上ノ如クニ先ヅ 1) ノ性質ヲ有スル場合カラ、1) ト 2)
ヲ同時ニ有スル場合ニト考ヘテ進メマシタノハ Lebesgue
積分ニテ、先ヅ *banded measurable function*
ノ積分ヲ定義致シマス、其ノ場合ニ相等シテ 1) ノ性質ガ
出テ参リマス。次ニ *unbounded function* 積分可
能ヲ定義スルコトニヨリ 2) ノ性質ガ出テ参リマス。

即チ L_p ヲ考ヘマス、 L_p ニ Riemann 積分デアハ 1) ニ 2)
ニアリマセンガ、Lebesgue 積分ノ *bounded func-*
*tion*ヲ考ヘレバ 1) ガ得ラレ、*unbounded function*
ノ積分可能ヲ定義スレバ 2) ガ得ラレルノデ、1) カラ 2) ニ
ノ順ニ考ヘマシタ。

然シ後ニナツテ氣ガ付キマシタガ、逆ニ 2) カラ考ヘマ
スト Riesz-Fischer ノ定理ハ実ハ *trivial*ニ近
イ程簡單ナレノデアアルコトヲ此処ニ注意致シタク思ヒマス。

即チ

[定理] \mathcal{N} ガ 2) ノ性質ヲ有スレバ normニ関スル
*fundamental sequence*ハ *t-convergent*
デアリマス。即チ *convergent sequence*ガ選ビ出
セマス。

[証明] a_1, a_2, \dots \rightarrow norm = 開 \vee fundamental sequence トスル

$$\|a_{n_\nu} - a_{n_{\nu-1}}\| < \frac{1}{2^\nu} \quad (\nu = 1, 2, \dots)$$

\vee partial sequence $a_{n_0}, a_{n_1}, a_{n_2}, \dots$ が選
ビ出セマス。然ルトキハ

$$\| |a_n| + \sum_{\nu=1}^{\nu} |a_{n_\nu} - a_{n_{\nu-1}}| \| \leq |a_{n_0}| + 1$$

従フテ 2) = ヲリ $a_{n_0} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_{n_\nu} - a_{n_{\nu-1}})$ ハ 絶対收斂。

故 = $\lim_{\nu \rightarrow \infty} a_{n_\nu}$ が存在シマス。(H. Nakano: Teilweise geordnete Algebra 輯報参照)

此定理カラ 此(1)ト 2)ヲ同時ニ有セバ norm-開
 \Rightarrow complete トコトハ明カデアリマス。又以上カラ 2)
ハ 非「帯」強イ条件デアル様ニ思ハレマス。

— 1943, 1, 5 —