1104
~~252~~

Banach空間ノ作用素環ニツイテ

河田　敬義(東京大理大)

Eidelheit ハ (On isomorphisms of rings of linear operators, Studia Math. 9) ニ於テ、二ツノ実Banach空間 X_1 ト X_2 カラ、ソノ上ノ有界線型作用素全体ノ作ル環 $\mathfrak{R}(X_1)$ ト $\mathfrak{R}(X_2)$ ヲ作ルトキ, 若シモ十及Xニ関シテ

$$\mathfrak{R}(X_1) \cong \mathfrak{R}(X_2)$$

ナラバ, 二ツノ Banach空間 X_1 ト X_2 ガ isomorphic ニナルコトヲ証明シタ。

十二月ノ名大ニ於ケル角谷氏ノ講演ニヨッテ、同じコトガX上ノ閉線型部分空間全体ノ作ル束 $\mathfrak{L}(X)$ ニ対シテモ成立スルコト, 特ニ Hilbert 空間ノ場合ノ $\mathfrak{R}(X)$ 及ビ $\mathfrak{L}(X)$ ノ特徴附ケニ関スル定理ノ証明モ発表サレタ。角谷氏ノ方法ハ $\mathfrak{L}(X)$ ニ関シテ先ヅ定理ヲ証明シ、次

ニ$\mathfrak{R}(X)$ノ場合ハ問題ヲ$\mathfrak{L}(X)$ノ場合ニ直シテ間接ニ証明スル。

然シ$\mathfrak{R}(X)$ノ方ガ$\mathfrak{L}(X)$ヨリモ多クノ性質ヲモッテキルノデアルカラ，$\mathfrak{R}(X)$大ヲ問題ニスルナラバ、又別ノ証明法モアッテヨイワケデアラウ。

コヽデ，先ヅEidelheitノ定理ヲ（若干整理シテ）紹介シ、次ニXガHilbert空間トナルタメノ$\mathfrak{R}(X)$ノ条件ニ関スル角谷氏ノ定理ノ別証ヲ与ヘ　ソレト関聯シテ二三ノ注意ヲ与ヘヨウト思フ。

§1

XヲBanach空間，ソノ元ヲ$x, y, \cdots\cdots$，ノルムヲ$\|x\|$トスル。係数ハ実又ハ複素数。

$\mathfrak{R}(X)$ヲXノ上ノ有界線型作用素Aノ全体：

(1)　$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$

トスレバ

(i)　$\mathfrak{R}(X)$ハ環ヲ作リ、（實又ハ複素係数），乗法単位Iヲ持ッ。

(ii)　ノルム(1)ニ関シテ完備デアリ

(iii)　$\|AB\| \leqq \|A\| \cdot \|B\|$

即チ（非可換）ノルム環ヲ作ル。

補題1.　(i)　$\mathfrak{a}$ヲ最小左イデヤルトスレバ、$\mathfrak{a}$ニ對シテXノ一ツノ有界線型汎函数f_0ガ定マリ，$\mathfrak{a} \ni A$ト

$X \ni y$トガ一義ニ對應シテ

(2) $Ax = f_0(x)\, y$

トアラハサレル。逆ニ f_0 ヲ一ツ定メテ (2) ノ A ノ全体 $\mathfrak{a}$ ヲ作レバ、$\mathfrak{a}$ ハ最小左イデヤルデアル。又ノルムニ關シテ閉集合トナル。

(ii) $\|A\| = \|f_0\|\,\|y\|$

(iii) f_0 ヲ $\|f_0\| = 1$ ニ一ツ定メレバ (2) ノ $\mathfrak{a} \ni A_y \longleftrightarrow y \in X$ ナル對應ニヨッテ

$$X \cong \mathfrak{a} \quad (\textit{equivalent})$$

デアルノミナラズ $\mathfrak{R}(X)$ ヲ左側作用環トシテ作用同型デアル。

(証) (i) $\mathfrak{a} \ni A_1$ ヲ一ツトリ $A_1 z \neq 0$ ナル z ヲ一ツトリ $f_0(z) \neq 0$ ナル有界線型汎函数 f_1 ヲ一ツトル。

$$A_0 x = f_1(x)\, y_0$$

ニ對シテ $\mathfrak{a} \ni A_0 A_1 : A_0 A_1 x = f_1(A_1 x)\, y_0$, 特ニ $A_0 A_1 z = f_0(z)\, y_0 \neq 0$

ヨッテ $\mathfrak{a} \supset \mathfrak{R} A_0 A_1 \neq 0$ カラ, $\mathfrak{a}$ ハ最小ナル故 $\mathfrak{a} = \mathfrak{R} A_0 A_1$, 即チ

$$\mathfrak{a} = (A_y,\ A_y x = f_0(x)\, y,\ y \in X),$$
$$f_0(x) = f_1(A_1 x)$$

トナル。

逆ニカヽル $\mathfrak{a}$ ガ最小左イデヤルトナルコトハ明カ。

(ii) ハ (2) カラ

(iii) ハ $BA_y x = f_0(x) By = A_{By}$ エヨリ 最後ニ $\mathfrak{X} \cong \mathfrak{a}$ カラ $\mathfrak{a}$ ガ $\mathfrak{R}(\mathfrak{X})$ 中 閉デテキルコトガワカル。

定理 I. 二ツノ Banach 空間 X, X' ニ對シテ $\mathfrak{R}(X)$ ト $\mathfrak{R}(X')$ ノ間ニ 1・1 ノ對應 $\mathfrak{R}(X) \ni A \leftrightarrow \varphi(A) = A' \in \mathfrak{R}(X')$ ガツイテ

(3) $\varphi(\alpha A + \beta B) = \alpha\varphi(A) + \beta\varphi(B)$

(4) $\varphi(AB) = \varphi(A)\varphi(B)$

(5) $\|A\| = \|\varphi(A)\|$

ナラバ

$$X \cong X', \ (\text{equivalent})$$

デ、ソノ對應ヲ $X \ni x \leftrightarrow Vx = x' \in X'$ トスレバ

$$(\|x\| = \|Vx\|)$$

(6) $\varphi(A) = VAV^{-1}$

トナル。

(証) $\mathfrak{R}(X)$ ノ一ツノ最小左イデヤルヲ $\mathfrak{a}$ トスレバ、$\varphi(\mathfrak{a}) = (\varphi(A);\ A \in \mathfrak{a})$ ハ $\mathfrak{R}(X')$ ノ一ツノ最小左イデヤルデアル。故ニ (3), (5) カラ

(7) $X \cong \mathfrak{a} \cong \varphi(\mathfrak{a}) \cong X'$ (equivalent)

$\mathfrak{R}(X)$ 及ビ $\mathfrak{R}(X')$ ヲ作用環トシテ作用同型ナル故 (7) ノ對應ヲ

$$X \ni x \leftrightarrow A_x \leftrightarrow A'_{x'} = \varphi(A_x) \leftrightarrow x' \in X'$$

トシ、ソレヲ $X \ni x \leftrightarrow Vx = x' \in X'$ トカケバ、

$\|x\| = \|Vx\|$デ

$$X \ni Bx \longleftrightarrow A_{Bx} = BA_{x} \longleftrightarrow \varphi(BA_x)$$
$$= \varphi(B)\varphi(A_x) = \varphi(B)x' \in X'$$

トナル。之レヲ書キ直セバ $V(Bx) = \varphi(B)Vx$, 即チ $\varphi(B) = VBV^{-1}$トナル。q.e.d.

定理2. (*Eidelheit*) $\mathfrak{R}(X)$ = 何カ他ノノルム $\|A\|^*$ガ定義サレテ，$\mathfrak{R}(X)$ガコノノルムニ関シテ又ノルム環ニナルナラバ，$\|A\|$ト$\|A\|^*$ハ同値デアル：

$$\|A_n\| \longrightarrow 0 \longleftrightarrow \|A_n\|^* \longrightarrow 0$$

(証略) ヲ用ヒルナラバ，定理1デ(5)ノ條件ヲ又カシテモ$\|\varphi(A)\|^* = \|A\|$ハ$\|\varphi(A)\|$ト同値ニナルカラ

定理3. (*Eidelheit*) 定理1デ(5)ヲ又カシテモVナレXトX'ノ間ノ *isomorphic* ナ對應ガツイテ $\varphi(B) = VBV^{-1}$ト表サレル。

系. $\mathfrak{R}(X)$ノ環トシテノ自己同型ハスベテ内部自己同型デアル。

$$\varphi(A) = VAV^{-1}$$

§ 2

コレデ後ニ用ヒル補題ヲ二ツ挙ゲル。

補題2. (i) $\mathfrak{R}(X)$ノ最小右イデヤル$\mathfrak{J}$ニ對シテ $X \ni x_0$ガ定マリ，$\mathfrak{J} \ni B$ト$\bar{X} \ni f$ ($\bar{X}$ハXノ *conjugate* space) トガ一義ニ對應シ、

(8) $Bx = f(x)x_0$

トアラハサレル。逆ニ $x_0 \in X$ ヲ一ツ定メテ (8) ノ全体ヲ $\mathfrak{L}$ トスレバ、$\mathfrak{L}$ ハ最小右イデヤルデ、ノルムニ関シテ閉集合トナル。

(ii) $\|x_0\| = 1$ トスレバ (8) ノ $\mathfrak{L} \ni B_f \leftrightarrow f \in \overline{X}$ ナル對應ニヨッテ

$$\overline{X} \cong \mathfrak{L} \text{ (equivalent)}$$

ニナル。

(証) (i) $\mathfrak{L} \ni B_1 \neq 0$ ヲ一ツトリ $B_1 y_1 \neq 0$ ナル $y_1 \in X$ ヲ一ツトリ、任意ニ $f_0 \in \overline{X}$ ヲエランデ作ッタ

$$B_0 x = f_0(x) y_1$$

ニ對シテ $\mathfrak{L} \ni B_1 B_0$: $B_1 B_0 x = f_0(x) B_1 y_1 \neq 0$. ヨッテ $\mathfrak{L} \supset B_1 B_0 \mathfrak{R} \neq 0$ カラ, $\mathfrak{L}$ ハ最小ナル故 $\mathfrak{L} = B_1 B_0 \mathfrak{R}$, 即チ

$$\mathfrak{L} = (B_f ; B_f x = f(x) x_0,\ f \in \overline{X}),\ x_0 = B_1 y_1$$

トナル。以下補題1ト全様。q.e.d.

補題3. $\mathfrak{L}$ ガ最小左イデヤル, $\mathfrak{L} \ni A$ ナラバ (又ハ $\mathfrak{L}$ ガ最小右イデヤル, $\mathfrak{L} \ni A$ ナラバ)

(9) $A^2 = \lambda A$

(証) $Ax = f_0(x) y_0$ カラ $A^2 x = f_0(x) f_0(y_0) y_0$

$$= f_0(y_0) Ax, \quad q.e.d.$$

次ニ $\mathfrak{R}(X)$ ノ代数的性質ヲ若干挙ゲル。

定理4. (i) $\mathfrak{a}$ が最小左イデヤルナラ $\mathfrak{a}B$ $(B\in\mathfrak{R}(X))$ モ亦最小左イデヤル。逆ニ任意ノ最小左イデヤルハ $\mathfrak{a}B$ ノ形ニ表サレル。右ニツイテモ仝様。

(ii) スベテノ最大左イデヤルニ共通ナ集合ハ 0 丈デアル。右ニツイテモ仝様。

(iii) $\mathfrak{R}(X)$ ノ center ハ λI 丈デアル。

今 $\mathfrak{R}(X)\supset\mathfrak{M}$ ニ對シテ $\mathfrak{M}^r=(B;\ \mathfrak{M}B=0)$, $\mathfrak{M}^l=(A;\ A\mathfrak{M}=0)$ トスル.

$\mathfrak{R}(X)$, ノイデヤル $\mathfrak{J}$ が正規トハ $\mathfrak{J}=\mathfrak{J}^{rl}$ (又ハ $\mathfrak{J}=\mathfrak{J}^{lr}$) トスレバ

(iv) $\mathfrak{R}(X)$ ノ正規イデヤルハ $\mathfrak{R}(X)$ 全体又ハ 0 トナル。但シ正規デナイイデヤルナラバ $\mathfrak{R}(X)$ デモ 0 デモナイモノが存在スル。

(証明) (i) $\mathfrak{a}=(A;\ Ax=f_0(x)y,\ y\in X)$ トスレバ

$$\mathfrak{a}B=(AB,\ ABx=f_1(x)y,\ y\in X),$$

$$f_1(x)=f_0(Bx)$$

逆ニ $\mathfrak{a}_1=(A;\ Ax=f_1(x)y,\ y\in X)$ トスレバ,
$Bx=f_1(x)x_0$, $f_0(x_0)=1$ トスレバ $\mathfrak{a}_1=\mathfrak{a}B$ トナル。
右ニツイテモ仝様。

(ii) $X\ni x_0$ ニ對シテ $\mathfrak{a}=(A,\ Ax_0=0)$, $\mathfrak{R}(X)$ ノ一ツノ最大左イデヤルトナル。何トナレバ $\mathfrak{a}\not\ni C$, $\mathfrak{a}+\mathfrak{R}C=\mathfrak{a}'$ ヲ考ヘレバ $Cx_0=y\neq 0$ ∴ 任意ノ B ニ對シテ $Bx_0=z$ トスレバ $C'Cx_0=C'y=z$ ナル $C'\in\mathfrak{R}(X)$ が存

在スルカラ $(B-C'C)x_0=0$, 即チ $B=C'C+A$, $A\in\mathfrak{A}$ ト表サレル。コレハ $\mathfrak{A}'=\mathfrak{R}(X)$ ニ, 即 $\mathfrak{A}$ ガ最大ナルコトニ牝ナヲナイ。今, E ガスベテノ最大左イデヤルニ屬スナラバ $Ex_0=0$ ガスベテノ $x_0\in X$ デ成立シ $E=0$ トナル。右イデヤルノ場合ニハ $\overline{X}\ni f_0$ ニ対シテ $\mathfrak{L}_{f_0}=(B;f_0(x)Bx=0)$ ハ最大右イデヤルナルコトヲ用ヒレバヨイ。

(iii) $Ax=f_0(x)x_0$ トスレバ $CAx=f_0(x)Cx_0$, $ACx=f_0(Cx)x_0$ $\therefore$ $CA=AC$ ナラバ $Cx_0=\lambda(x_0)x_0$ 故ニ f_0 ヲトメテ x_0 ヲカヘレバ $\lambda(x_0)=\lambda$ トナリ $C=\lambda I$ トナル。

(iv) $\mathfrak{J}=\mathfrak{J}^{rl}\neq 0$ トスレバ補題2ト同樣ニ $\mathfrak{J}\geqq\mathfrak{L}$ ナ最小右イデヤルガ存在スル。 $\therefore$ $\mathfrak{L}=(B;Bx=f(x)x_0,\ f\in\overline{X})$ トスレバ

$$\mathfrak{J}\geqq A\mathfrak{L},\ \mathfrak{J}^l\leqq(A\mathfrak{L})^l,\ A\mathfrak{L}=(B;Bx=f(x)Ax_0),$$
$$(A\mathfrak{L})^l=(C;CAx_0=0)$$

トナルカラ A ヲイロイロカヘレバ Ax_0 ハ X 全体ヲ動クカラ $\mathfrak{J}^l=0$ $\therefore$ $\mathfrak{J}=\mathfrak{J}^{lr}=\mathfrak{R}(X)$ トナル。

正規イデヤルデナケレバ成立シナイコトハ次ノ通リ.

$$Ax=\sum_{i=1}^{n}f_i(x)x_i,\quad x_i\in X,\quad f_i\in\overline{X}$$

ナル形ノ全体ハイデヤルニナル。又コノノルムニ関スル閉包ヲトッテモ $\mathfrak{R}(X)$ 全体ニハナラナイ。q.e.d.

$\mathfrak{R}(X)$ ヲソノ代数的性質デ特徴付ケルトイフ問題ハ難

カシサウデアル。有限次元ノ Algebra ガ基礎体ノ上ノ matrixalgebra（n 次ノ matrix 全体）トナルタメニハ、補題3ノ性質ト定理4ノ性質トデ十分デアルガ、一般ノノルム環デハ之等ノ性質ハモッテヰルガ、$\mathfrak{R}(X)$ トハナラナイ例ガ次ノ§デ簡単ニ見ツケラレテシマフ。

§3

定義　ノルム環 $\mathfrak{R}$ ノ逆同型ノルム環 $\mathfrak{R}^*$ トハ

$\mathfrak{R}^* = (A^*;\ A \in \mathfrak{R})$,

(10)　$(\alpha A + \beta B)^* = \alpha A^* + \beta B^*$

(11)　$(AB)^* = B^* A^*$

(12)　$\|A^*\| = \|A\|$

デ定義サレルノルム環ヲイフ。

定理5.　X ガ正則 (regular) Banach 空間デアルナラバ

$$\mathfrak{R}(X)^* \cong \mathfrak{R}(\overline{X})$$

(証)　$X \ni x$, $\overline{X} \ni f$ ニ對シテ $(x, f) = (f, x) = f(x)$ トカケバ

$$(Ax, f) = (x, A^* f)$$

デ $\mathfrak{R}(X) \ni A$ ノ adjoint $A^* \in \mathfrak{R}(\overline{X})$ ガ定義サレ, (10), (11), (12) ヲ満足スル。

X ガ正則デアルカラ $X = \overline{\overline{X}}$ カラ $\mathfrak{R}(\overline{X})$ ノ元ハ必ズ A^* ノ形ニカケルカラ

$$\mathfrak{R}(X)^* \cong \mathfrak{R}(\overline{X}) \qquad q.e.d.$$

定理6. $\mathfrak{R}(X)^*$ガ兎モ角モアル Banach 空間 X^*ニ對シテ

$$\mathfrak{R}(X)^* \cong \mathfrak{R}(X^*)$$

トナルナラバ, Xハ正則トナリ, $\overline{X} \cong X^*$トナル。

(証) $\mathfrak{R}(X)$ノ最小右イデヤル $\mathfrak{L}$ヲトレバ, $\mathfrak{R}(X)^* = \mathfrak{R}(X^*) \supseteq \mathfrak{L}^*$ハ最小左イデヤルトナルカラ補題1, 2カラ

$$\overline{X} \cong \mathfrak{L} \cong \mathfrak{L}^* \cong X^*$$

トナル。次ニ $\mathfrak{R}(\overline{X}) = \mathfrak{R}(X)^*$ ニ關シテ今一度適用スレバ $\mathfrak{R}(X) = \mathfrak{R}(X)^{**} = \mathfrak{R}(\overline{X})^* = \mathfrak{R}(\overline{\overline{X}})$, 即チ定理3カラ $X \cong \overline{\overline{X}}$, Xハ正則トナル。 q.e.d.

之レカラ Xガ正則デナケレバ $\mathfrak{R}(X)^*$ハ決シテ $\mathfrak{R}(X^*)$ノ形ニカケナイ。トコロガ $\mathfrak{R}(X)^*$ハ補題3及ビ定理4ノ性質ハスベテ満足シテヰルワケデアル。

定理7. $\mathfrak{R}(X)$ノ自己逆同型変換 $A \to A^* \in \mathfrak{R}(X)$:

(I) $A^{**} = A$

(II) $(\alpha A + \beta B)^* = \alpha A^* + \beta B^*$

(III) $(AB)^* = B^* A^*$

ガ存在スルタメノ必要十分條件ハ

$$X \cong \overline{X} \quad (\textit{isomorphic})$$

ナルコトデアル。$\mathfrak{R}(X)$ノカヽルニツノ変換 $A \to A^*$, $A \to A'$ガアレバ

(16) $A^* = TAT^{-1}$

ナル $T \in \mathcal{R}(X)$ ガ存在スル。逆モ亦眞。

(證) カヽル変換ガ存在シタトスレバ $\mathcal{R}(\overline{X}) = \mathcal{R}^* = (\varphi(A); A \in \mathcal{R}(X))$ ト $\mathcal{R}(X)$ トノ間ノ對應 $\varphi(A) \longleftrightarrow A^*$ デ $\mathcal{R}(\overline{X}) \cong \mathcal{R}(X)$，即チ定理3カラ $X \cong \overline{X}$ トナル。

逆ニ $X \cong \overline{X}$ ナラバ $\mathcal{R}(X) \cong \mathcal{R}(\overline{X}) = \mathcal{R}(X)^*$ ナル故ソノ對應デ $A^* \longleftrightarrow \varphi(A)$ トスレバ，A^* ハ (13) (14) (15) ヲ滿足スル。(16) ハ定理3ノ系カラ。 q.e.d.

X ガ有限次元ノ場合ニハ A ニ對スル轉置行列ハ (13) (14) (15) ヲ滿足スルカラ (16) デ一般ノ形ガモトマルワケデアルガ、一般ノ $X \cong \overline{X}$ ナル Banach 空間ニ對シテハソノ様ナ標準形ガ何ニナルノデアラウカ。

コヽデハ極メテ特別ナ場合ダケヲ考ヘル。

§ 4

$\boxed{\text{定理8 (仮定)}}$ $\mathcal{R}(X)$ ニ自己逆同型 A^* デ定義サレ

(i) $A^{**} = A$

(ii) $(\alpha A_1 + \beta A_2)^* = \overline{\alpha} A_1^* + \overline{\beta} A_2^*$ ($\overline{\alpha}\ \overline{\beta}$ ハ複素共軛)

(iii) $(A_1 A_2)^* = A_2^* A_1^*$

(iv) $A \neq 0$ ナラ $AA^* \neq 0$

ヲ滿足スルナラバ，$X \ni x, y$ ニ對シテ適當ナ內積 (x, y)

ヲ定義スレバ

$$\|x\| \text{ ト } \sqrt{(x,x)}$$

ハ同値ナルノルムヲ與ヘ，且ツ A^* ハ

(iii) $(Ax, y) = (x, A^*y)$

ヲ満足スル様ニ出来ル。

（証）定理２カラ $\|A\| = \|A^*\|$ トシテ差支ヘナイ。（ソウデナケレバ $\|A\| + \|A^*\|$ ヲ新ニノルムトスレバ，初メノノルムト同値ニナルカラ。）

今 $\mathfrak{a}$ ヲ最小右イデヤルトスレバ，補助定理１カラ

$$\mathfrak{a} \ni E_x \longleftrightarrow x \in X, \quad \|E_x\| = \|x\|$$

トナリ、更ニ $\mathcal{R}(X)$ ヲ作用素トシテ作用同型ニナル。

$\mathfrak{a}^* = (E_x^*;\ E_x \in \mathfrak{a})$ ハ最小右イデヤルトナル。

今 $\mathfrak{a} \ni E_{x_0} \neq 0$ ヲトレバ $E_{x_0}^* E_{x_0} = E_0 \neq 0$ デ（(iv) ヨリ），$E_0 = E_0^* \in \mathfrak{a} \frown \mathfrak{a}^*$ トナル。今 $\|E_0\| = 1$ トスル。

補助定理１カラ

$$\mathfrak{a} \ni E_y = B_y E_0, \quad B \in \mathcal{R}(X)$$

トアラハセバ，$U = B_y^* E_x \in \mathfrak{a}$ ニ對シテ補助定理３カラ

$$U^2 = \lambda U, \quad \lambda : \text{係数}$$

トナル。又ハ $U^{*2} = \lambda U^*$ デアルカラ $U^* - \lambda I = A$ トオケバ $AU^* = 0$

今 $U \neq 0$ トスレバ $\mathfrak{a} = \mathcal{R}U$, $\mathfrak{a}^* = U^*\mathcal{R}$ デアルカラ $\mathfrak{a}^* \ni E_0 = U^*C$ トアラハサレル。

故ニ

$$E_x^* E_y = E_x^* B E_0 = U^* E_0 = (\lambda I + A) E_0$$
$$= \lambda E_0 + A U^* C = \lambda E_0 ,$$

即チ

(18) $E_x^* E_y = \lambda E_0$

ナル複素数λが存在スル。（$U=0$ ナラ $\lambda=0$ トスレバヨイ）。

コノトキ $\lambda=(y,x)$ トカキ，即チ

(18*) $E_x^* E_y = (y,x) E_0$

デ (y,x) ヲ定義スル。積ノ連續性ト $X \cong \Omega$ (equivalent)

カラ

(イ) (y,x) ハ x 及 y ニツイテ同時ニ連続デアル。

(ロ) $(\alpha y_1+\beta y_2, x) = \alpha(y_1, x)+\beta(y_2, x)$,

$(y, \alpha x_1+\beta x_2) = \bar{\alpha}(y, x_1)+\bar{\beta}(y, x_2)$

ナルコトガ假定(ii)カラ得ラレル。

(ハ) $(x,y) = \overline{(y,x)}$

何トナレバ $(E_x^* E_y)^* = E_y^* E_x$，$((y,x)E_0)^* = \overline{(y,x)} E_0$

カラ

(ニ) $(x,x)=0$ ハ $x=0$ ニ限ル。

何トナレバ假定(iv)カラ $E_x^* E_x \neq 0$

補助定理3カラ $E_0^2 = \lambda E_0$，$E_0 = E_0^*$ カラ假定(iv)カラ $\lambda \neq 0$　∴ $E_0^2 = E_0$

トシテ差支ヘナイ。ソウスレバ

(ホ) $(x,x) > 0$　$(x \neq 0)$

何トナレバ (x, x) ハ x ニ關シテ連續デ((イ)), $x \neq 0$ ナラ 0 トナラナイ。特ニ $E_0 = E_x$。ニ對シテハ $(z_0, z_0) = 1$ デアルカラ, $(x, x) > 0$ トナル。

(ヘ) $(Ax, y) = (x, A^* y)$

何トナレバ補助定理1カラ $E_{Ax} = AE_x$ ナル故

$$
\begin{aligned}
(Ax, y)E_0 = E_y^* E_{Ax} = E_y^* A E_x = (A^* E_y)^* E_x \\
= E_{A^* y}^* E_x = (x, A^* y) E_0
\end{aligned}
$$

トナル。

(ト) $(x, x) \leqq \|x\|^2$

何トナレバ $(x, x) = \|(x x) E_0\| = \| E_x^* E_x \|$

$$\leqq \| E_x^* \| \| E_x \| = \| x \|^2$$

(チ) 逆ニ $\|x\|^2 \leqq N(x, x)$ ナル ~~常數~~ N ガ存在スル。

何トナレバ、カヽルNガナケレバ $(x_n, x_n) = 1$, $\|x_n\| \to \infty$ ナル x_n ガ存在スル。

又ハ $\|E_{x_n}^*\| \to \infty$ デアル。(11)カラ E_x^* ヲ $\mathfrak{N}$ ノ作用素トミレバ補助定理2ニヨッテ汎函數 $f_x(y)$:

$$E_x^* E_y = f_x(y) E_0, \quad \| E_x^* \| = \| f_x \|$$

ヲ定義スルカラ、*Banach* P. 80. 定理5ニヨリ

$$\| E_{x_n}^* E_y \| \to \infty$$

ナル E_y ガ存在スル。シカルニ

$$
\begin{aligned}
\| E_{x_n}^* E_y \| = |(y, x_n)| \\
\leqq \sqrt{(y, y) \cdot (x_n x_n)} = \sqrt{(y y)}
\end{aligned}
$$

トナリ矛盾ヲ生ジタ。

以上デ定理ノ証明ハオハル。

コノ場合 $\mathfrak{R}(\mathfrak{X})$ ハアル Banach 空間ノ上ノ作用素環デアルコトヲ基ニオイテヰル。只アルノルム環トイフ丈デハ更ニ條件ガ必要ナワケデアル。

$\boxed{\text{定理 9}}$ ノルム環 $\mathfrak{R}$ ガ Hilbert 空間 $\mathfrak{X}$ ノ上ノ有界線型作用素全体トナルタメノ必要十分條件ハ

(i) $\mathfrak{R}$ 中ニ最小左イデヤル $\mathfrak{a}$ ガ存在スル。且 $\mathfrak{a}$ ハノルムニ関シテ $\mathfrak{R}$ ノ閉集合トナル。

(ii) $\mathfrak{a} \ni A$ ハスベテ $A^2 = \lambda A$ ヲ満足スル。

(iii) $\mathfrak{a}$ ハ左イデヤルデアルカラ $\mathfrak{R}$ ヲ左側作用環トスルガ，ソノトキ $\|B\|$ ハ B ヲ $\mathfrak{a}$ ノ作用素トシタトキノノルムニ等シイ。

$$\|B\| = \sup_{\substack{A \in \mathfrak{a} \\ \|A\| = 1}} \|BA\|$$

(iv) $\mathfrak{R}$ ハ $\mathfrak{a}$ ノ作用環トシテ strongly-closed:

$$\|B_n A - B_m A\| \to 0 \ (m, n \to \infty)$$

ガスベテノ $A \in \mathfrak{a}$ ニ対シテ成立スルナラバ

$$\|B_n A - BA\| \to 0 \ (n \to \infty)$$

ガスベテノ $A \in \mathfrak{a}$ デ成立スル様ナ $B \in \mathfrak{R}$ ガ存在スル。

(v) $\mathfrak{R} \ni A$ ニ對シテ $A^* \in \mathfrak{R}$ ガ存在シテ定理 8 ノ (i)—(iv) ヲ満足シ，

特ニ $\|A\| = \|A^*\|$

トナスコトデアル。

(注意) (iii) ハ次ノ條件 (iii') ヲ含ンデヰル。

(iii') $B\mathfrak{a}=0$ ナラバ $B=0$

特ニ $\mathfrak{R}$ ガ有限次元ノ場合ニ基礎体ノ上ノ Matrix 全体ノ環トナルタメノ必要十分條件ハ (ii) ト (iii') デアル。

何トナレバ (iii') カラ先ヅ Radikal ガ存在セズ、次ニ simple トナリ最後ニ (ii) カラ基礎体ノ上ノ Matrix 全体ノ環ニナル。

(証明) 最小左イデヤル $\mathfrak{a}$ ハ閉ヂテヰルカラ，一ツノ Banach 空間トナル。$\mathfrak{R}$ ヲ $\mathfrak{a}$ ノ上ノ作用素環トミレバ，定理 6 ト全ク同ジ様ニ証明ガスヽメラレテ、$\mathfrak{R}$ ハ Hilbert 空間 X ノ上ノ作用素環トナル。$\mathfrak{R}\subset\mathfrak{R}(X)$ ニ於テ $\mathfrak{R}\ni I$. 且ツ strongly closed デアルカラ $\mathfrak{R}$ ノ $\mathfrak{R}(X)$ ノ中ノ commutator ガ λI 丈デアルコトヲイヘバ $\mathfrak{R}=\mathfrak{R}(X)$ トナル。

$A\in\mathfrak{R}(X)$, $X\cong\mathfrak{a}$ ヲ $\mathfrak{R}$ ノ commutator トスレバ $E_x^*\in\mathfrak{R}$ ナル故

$$\begin{cases} E_x^* E_y = (y,x)E_0 \\ A E_x^* E_y = (y,x) A E_0 \\ E_x^* A E_y = (Ay,x)E_0 \end{cases}$$

即チ $AE_0=\lambda E_0$, $\lambda(y,x)=(Ay,x)$ ガスベテノ $y\in X$ デ成立シナクテハナラナイ。故ニ $A=\lambda I$ トナル。

q. e. d.

§ 5

$X \cong \overline{X}$ デアッテモ X ハ Hilbert 空間トハ限ラナイノデ，今Xヲ任意ノ正則ナ実 Banach空間トシテ

$$X_0 = X + \overline{X}, \quad X_0 \ni x_0 = x + f, \quad x \in X, \ f \in \overline{X},$$
$$\|x_0\| = \|x\| + \|f\|$$

トスレバ，ソノ共軛空間 $\overline{X}_0$ ハ

$$\overline{X}_0 = \overline{X} + X, \quad X_0 \ni \overline{x}_0 = f + x, \ \|\overline{x}_0\| = \|f\| + \|x\|$$

ト isomorphic ニナル。明カニ $X_0 \cong \overline{X}_0$ デアル。

コノ場合ニ實際ニ adjoint ヲ作リ (18) 式ノ入ヲ求メテミヨウ。

今 $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ ヲ

$$(19) \quad \mathfrak{A} = (A;\ Ax \in X,\ x \in X),$$
$$\mathfrak{B} = (B;\ Bx = f \in \overline{X},\ x \in X)$$

$\mathfrak{C} = (C;\ Cf = x \in X,\ f \in \overline{X})$, $\mathfrak{D} = (D;\ Df = g \in \overline{X},\ f \in X)$ ナル有界線型作用素ノ全体トシ，夫々ノ adjoint ヲ $(x, f) = (f, x) = f(x)$ ナル記号ニヨリ

$$(20) \begin{cases} A^*:\ (Ax, f) = (x, A^*f),\ A^* \in \mathfrak{D} \\ B^*:\ (Bx, y) = (x, B^*y),\ B^* \in \mathfrak{B} \\ C^*:\ (Cf, g) = (f, C^*g),\ C^* \in \mathfrak{C} \\ D^*:\ (Df, x) = (f, D^*x),\ D^* \in \mathfrak{A} \end{cases}$$

デ表ハセバ，$\mathfrak{R}(X_0) \ni H$ ハ

$$(21) \quad H\begin{pmatrix} x \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ax + Cf \\ Bx + Df \end{pmatrix}$$

[illegible] adjoint $H^* \in \mathcal{R}(X_0)$ ハ

$$[illegible]\ H = \begin{pmatrix} D^* & C^* \\ B^* & A^* \end{pmatrix}$$

定理8ハ(i) (ii) (iii) ヲ満スガ，(iv) ハ必ズシモ満シテイナイ。例ヘバ

$$H = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A^* \end{pmatrix} \quad HH^* = H^*H = 0$$

デアル。

今 $X_0 \ni y_0 + g_0$ ヲ一ツキメレバ X_0 ノ最小正規左イデヤル $\mathfrak{M}_0$ トシテ

$$H_{(z_0, h_0)}(x + f) = \big(g_0(x) + f(y_0)\big)(z_0 + h_0),$$
$$z_0 \in X,\ h_0 \in \overline{X}$$

ノ全体ヲトレバ

$$H_{(z_0 h_0)} = \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}, \quad Ax = g_0(x)\, z_0, \quad Bx = g_0(x)\, h_0,$$

$$Cf = f(y_0)\, z_0, \quad Df = f(y_0)\, h_0$$

トナリ，ソノ adjoint ハ

$$H^*_{(z_0 h_0)} = \begin{pmatrix} D^* & C^* \\ B^* & A^* \end{pmatrix}, \quad D^*x = h_0(x)\, y_0,$$

$$B^*x = h_0(x)\, g_0, \quad C^*f = f(z_0)\, y_0, \quad A^*f = f(z_0)\, g_0$$

ニナル。故ニ (11) 式ニ於テ

$$H^*_{(\bar{z}_0 \bar{h}_0)} H'_{(z_0 h_0)} \begin{pmatrix} x \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{D}^*A + \bar{C}^*B, & \bar{D}^*C + \bar{C}^*D \\ \bar{B}^*A + \bar{A}^*B, & \bar{B}^*C + \bar{A}^*D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ f \end{pmatrix}$$

$$=\left(\overline{h_0(z_0)}+h_0(\overline{z_0})\right)H_0,$$

$$H_0^*=H_0=\begin{pmatrix}A_0 & C_0\\ B_0 & D_0\end{pmatrix},\quad A_0x=g_0(x)y_0,\ B_0x=g_0(x)g_0,$$

$$C_0f=f(y_0)y_0,\quad D_0f=f(y_0)g_0$$

トナル。故ニ (18*) 中ニ於テ

$$((x+f),(y+g))=f(y)+g(x),$$

$$((x+f),(x+f))=2f(x)$$

トナル。コレハ定理8ノ証明中 (イ)—(チ) ノ性質中 (ニ)(ホ)(チ) ハ満足サレナイガ，他ハ満足サレル。

今度ハ $\mathcal{R}(X)$ ノ自己逆同型 $A\to A^*$ ガ今與ヘタ型ニナッテキル條件ヲ考ヘテ見ル。ソノタメニ

補題4. $\mathcal{R}(X)$ ノ乗法単位 I ガ

$$I=I_1+I_2,\quad I_1I_2=I_2I_1=0$$

ト分解サレルナラバ，X ハ同値ナノルムヲツケカヘレバ

$$X=X_1+X_2,\quad x=x_1+x_2,\quad \|x\|=\|x_1\|+\|x_2\|$$

トニツノ Banach 空間ノ直和ニ分解サレル。

(証) $I_1=I_1^2+I_1I_2=I_1^2$，同様ニ $I_2=I_2^2$ トナル。

$$M_1=(x;\ I_1x=x,\ x\in X),$$

$$M_2=(x;\ I_2x=x,\ x\in X)$$

トスレバ

$$M_1\frown M_2=0,\quad X=M_1+M_2$$

トナリ，M_1, M_2 ハ X ノ閉線型部分空間トナル。$X\ni x=x_1+x_2$, $x_i\in M_i$ ナル直和分解ニ對シテ $\|x\|'=\|x_1\|+\|x_2\|$

トスレバ，$\|x\|' \geqq \|x\|$ デ，X ハ両方ノノルムニ関シテ Banach空間ヲ作ルカラ $\|x\|$ ト $\|x\|'$ ハ同値ナノルムヲ與ヘル。 q.e.d.

定理10. $\mathcal{R}(X)$ ヲ A ニ対シテ (13), (14), (15) ヲ満足スル $A^* \in \mathcal{R}(X)$ ガ對應シ，更ニ乗法單位 I ガ

(23) $$I = I_0 + I_0^*, \quad I_0 I_0^* = I_0^* I_0$$

ト分解サレルナラバ

$$X = X_0 + \overline{X}_0, \quad \overline{\overline{X}}_0 = X_0$$

ト補題4ノ意味ヲ直和分解サレ，(21)式ノ $H \in \mathcal{R}(X)$ ニ對スル H^* ガ (20), (22) 式ノ形デ與ヘラレル。

(証) $M_1 = (x;\ I_0 x = x,\ x \in X)$, $M_2 = (x;\ I_0^* x = x,\ x \in X)$ トスレバ補題4カラ $X = M_1 + M_2$ ト直和分解サレル。今

(24) $$\begin{cases} \mathcal{R} = \mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c} + \mathfrak{d}, \quad \mathcal{R} = \mathcal{R}(X), \\ \mathfrak{a} = I_0 \mathcal{R} I_0, \quad \mathfrak{b} = I_0^* \mathcal{R} I_0, \quad \mathfrak{c} = I_0 \mathcal{R} I_0^*, \\ \qquad \mathfrak{d} = I_0^* \mathcal{R} I_0^* \end{cases}$$

トオケバ

$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{d} = \mathfrak{b}^2 = \mathfrak{b}\mathfrak{d} = \mathfrak{c}\mathfrak{a} = \mathfrak{c}^2 = \mathfrak{d}\mathfrak{a} = \mathfrak{d}\mathfrak{c} = 0$$

$$\begin{cases} \mathfrak{a} M_2 = 0, & \mathfrak{a} M_1 = M_1 \\ \mathfrak{b} M_2 = 0, & \mathfrak{b} M_1 = M_2 \\ \mathfrak{c} M_1 = 0, & \mathfrak{c} M_2 = M_1 \\ \mathfrak{d} M_1 = 0, & \mathfrak{d} M_2 = M_2 \end{cases}$$

逆ニ $AM_2=0$, $AM_1\subseteq M_1$ ナラバ $A\in\mathfrak{a}$ 等。

故ニ $\mathfrak{a}=\mathfrak{R}(M_1)$, $\mathfrak{b}=\mathfrak{R}(M_2)$ トナル。シカルニ $\mathfrak{a}^*=\mathfrak{b}$ ナル故, 定理6カラ

$$\overline{M}_1\cong M_2,\quad \overline{M}_2\cong M_1$$

トナル。且ツ $A\longleftrightarrow A^*$ ハ互ニ adjoint ニナル。即 $X_0=M_1+M_2$ ナル分解ニ應ジテ

$$H=\begin{pmatrix}A & C\\ B & D\end{pmatrix},\quad A=I_0HI_0,\quad B=I_0^*HI_0,$$

$$C=I_0HI_0^*,\quad D=I_0^*HI_0^*$$

ト表ハセバ

$$H^*=\begin{pmatrix}D^* & C^*\\ B^* & A^*\end{pmatrix},\quad D^*=I_0H^*I,\quad B^*=I_0^*HI_0,$$

$$C^*=I_0HI_0^*,\quad D^*=I_0^*HI_0^*$$

トナリ, A^*, B^*, C^*, D^* ガ夫々 (20) ヲ満足スルコトハ定理8(ヘ)ト全ク同様デアル。 q.e.d.

$X\cong\overline{X}$ トナル X ハ一体ドンナモノガアルノデアラウカ。有限次元ノ場合ヲ除イテハ、恐ラク $X=X_0+\overline{X}_0$ ノ形ニアラハサレルノデハナイデアラウカ。或ハ $\mathfrak{R}(X)$ ノ言デイヘバ (13) (14) (15) ヲ満足スル A^* ハ適當ナ T ヲトレバ, TA^*T^{-1} ニ對シテ (23) ガ常ニ成立スルノデハナイデアラウカ。又 $X=X_0+\overline{X}_0=X_1+\overline{X}_1$ ト分解サレタトキ $X_0\cong X_1$ 又ハ $X_0\cong\overline{X}_1$ トナルノデアラウカ。 (18, 1, 30)