1113. 淡中先生ノ Hauptgeschlechtssatz im Minimalen ニツイテノ一ツノ注意

松島與三（名大）

淡中先生ハ談話1046ニ於テ次ノ興味アル定理ヲ証明シテ居ラレマス。スナハチ、kヲ代数体kノn次ノあーべる拡大K/k, Kノ Exponent ガnニナルヤウナ因子團$(a_{\sigma,\tau})$ヲトレバ，Kノ$N_{K/k}(A)=1$ナル元Aハ$b^{1-\lambda}$ナル形ノ元ノイクツカト$a_{\sigma,\tau}/a_{\tau,\sigma}$ナル形ノ元イクツカノ積トシテ表ハサレ、逆モ成立ツトイフノデアリマス。

中山先生ハコノ定理ヲ談話1092ニ於テ、與ヘラレタ因子團ト同伴ナ因子團デ、$\dfrac{b_{\sigma,\tau}}{b_{\tau,\sigma}}$ノ norm ガ$1$ニナルヤウナモノヲイクツカトッテ来レバ一般ノがろあ拡大ニ於テモ、上ノ定理ガ成リ立ツコトヲ証明サレマシタ。

ココデハ、淡中先生ノ定理ヲツカヘバ、あーべる拡大ノ場合ニ於テ、Hilbert ノ定理ノ逆ニ相當スルコトガ簡単ニ証明サレルコトヲ注意シタイト思ヒマス。即チ

kヲ代数体トシ、ソノあーべる拡大K/kヲトル。Kノ$N_{K/k}(A)=1$ナル元Aガ常ニ$b^{1-\lambda}$ナル形ノ元ノミノ積トシテ、表ハサレルナラバ、K/kハ zyklisch ニナル。トイフコトガ言ヘマス。

K/k が あーべる擴大ト假定シナクテモ、中山先生ノ擴張サレタ形ノ定理ヲツカッテ K/k が zyklisch ニナルコトが言ヘルカドウカハ マダ分ラナイノデアリマスが、御教示ヲ得タイト存ジマス。

以下、上ノコトノ證明ヲノベマス。

K/k ヨリ次數ノ低イモノニツイテハ成リ立ツトシテ、K/k が zyklisch ニナルコトヲ言ヒマス。

K/k ノ次數ヲ n, ソノ Galois 群ヲ $\mathfrak{g}$ トスル。

1) n が、少クトモ二ツノ相異ナル素數デワレル場合。

簡單ノタメ $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2}$ トシ、$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2$, $\mathfrak{g}_i$ ノ Order ハ $p_i^{a_i}$ $(i=1,2)$ トシ、$\mathfrak{g}_1$ ニ對應スル K ノ部分體ヲ K_2 , $\mathfrak{g}_2$ ニ對應スルモノヲ K_1 トスル。$(a_{\sigma,\tau})$ ヲ K ニ於ケル Exponent が n ノ因子團トスレバ Chevalley ニヨリ $N_{K/K_1}(a_{\sigma_1,\tau_1})$ $(\sigma_1, \tau_1 \in \mathfrak{g}_1)$ が K_1 ニ於ケル Exponent が $p_1^{a_1}$ ノ因子團ニナリ 假定ニヨリ、$\dfrac{a_{\sigma_1,\tau_1}}{a_{\tau_1,\sigma_1}}$ ハ $b^{1-\lambda}$ $(\lambda \in \mathfrak{g},\ b \in K)$ ナル形ノ元ノ積ニナッテヰルカラ

$$N_{K/K_1}\left(\frac{a_{\sigma_1,\tau_1}}{a_{\tau_1,\sigma_1}}\right) \in,\ b_1^{1-\lambda_1} \quad (b_1 \in K_1,\ \lambda_1 \in \mathfrak{g}_1)$$

ナル元ノ積ニナルカラ、淡中先生ノ定理ニヨリ、K_1/k ニツイテ、定理ノ假定が滿サレルコトがワカリ、從ッテ

induction ノ假定カラ、K_1/k ガ zyklisch，同様ニ K_2/k モ zyklisch ニナル。K_1/k ト K_2/k ノ次數ガ互ニ素ダカラ K/k モ zyklisch ニナル。

2) $n = p^a$ ナル場合.

$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2 \times \cdots\cdots \times \mathfrak{g}_s$；$\mathfrak{g}_i$ ハ zyklisch トスレバ、今ト全樣ニシテ、$\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_i$ ハ zyklisch ニナルコトガ言ヘルカラ、$s \leq 2$ デナケレバナラナイ。今 $s = 2$ デアルトスル。

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2, \quad \mathfrak{g}_i = (\sigma_i),$$

$$\mathfrak{g}_i \text{ ノ Order ヲ } p^{a_i} \quad (i = 1, 2)$$

トスル。

$(a_{\sigma,\tau})$ ヲ Exponent ガ n ノ因子團トスレバ假定ヨリ $\dfrac{a_{\sigma,\tau}}{a_{\tau,\sigma}}$ ハ $b^{1-\lambda}$ ナル形ノ元ノ積ニナルガ $b^{1-\sigma_1}$ $b^{1-\sigma_2}$ ナル形ノ元ノ積ト考ヘテヨイコトハ明ラカデアル。今

$$\frac{a_{\sigma_1,\sigma_2}}{a_{\sigma_2,\sigma_1}} = \frac{c_{\sigma_1}}{c_{\sigma_1}^{\sigma_2}} \cdot \frac{c_{\sigma_2}^{\sigma_1}}{c_{\sigma_2}}$$

トカケテ居ルトスル。

因子團 $(a_{\sigma,\tau})$ ニ對應スル $(a_{\sigma,\tau}, K, \mathfrak{g})$ ノ Transformator ヲ $\{u_\sigma\}$ トシ、$u_{\sigma_1} c_{\sigma_1}$，$u_{\sigma_2} c_{\sigma_2}$ ヲ考ヘレバ，

$$u_{\sigma_1} c_{\sigma_1} \cdot u_{\sigma_2} c_{\sigma_2} = u_{\sigma_1 \sigma_2}\, a_{\sigma_1,\sigma_2}\, c_{\sigma_1}^{\sigma_2}\, c_{\sigma_2}$$

$$= u_{\sigma_2\sigma_1}\, a_{\sigma_1,\sigma_2}\, c_{\sigma_1}^{\sigma_2}\, c_{\sigma_2}$$

$$= u_{\sigma_2} u_{\sigma_1} \frac{a_{\sigma_1,\sigma_2}}{a_{\sigma_2,\sigma_1}} \cdot c_{\sigma_1}^{\sigma_2}\, c_{\sigma_2}$$

$$= u_{\sigma_2} c_{\sigma_2}\; u_{\sigma_1} c_{\sigma_1} \frac{a_{\sigma_1,\sigma_2}}{a_{\sigma_2,\sigma_1}} \;\frac{c_{\sigma_1}^{\sigma_2}}{c_{\sigma_1}}\; \frac{c_{\sigma_2}}{c_{\sigma_2}^{\sigma_1}}$$

$$= u_{\sigma_2} c_{\sigma_2} \cdot u_{\sigma_1} c_{\sigma_1}$$

デアルカラ

$$v_{\sigma_1} = u_{\sigma_1} c_{\sigma_1},\quad v_{\sigma_2} = u_{\sigma_2} c_{\sigma_2},$$

$\sigma = \sigma_1^{x_1}\sigma_2^{x_2}$ ノトキ，$v_\sigma = v_{\sigma_1}^{x_1} v_{\sigma_2}^{x_2}$ トオケバ，

Transformator $\{v\}$ ＝對應スル因子團 $(b_{\sigma,\tau})$ ハ $(a_{\sigma,\tau})$ ト同伴デ、

$$b_{\sigma,\tau} = b_{\tau,\sigma}$$

ナル條件ヲミタス。

シカラバ，$b_{\sigma,\tau} \in k$ デアル。何トナレバ

$$b_{\rho,\sigma\tau}\quad b_{\sigma,\tau} = b_{\rho\sigma,\tau}\, b_{\rho,\sigma}^{\tau}$$

$$b_{\tau,\rho\sigma}\quad b_{\rho,\sigma} = b_{\tau\rho,\sigma}\, b_{\tau,\rho}^{\sigma}$$

$$b_{\rho\tau,\sigma}\quad b_{\rho,\tau}^{\sigma} = b_{\rho,\tau\sigma}\, b_{\tau,\sigma}$$

ノ三ツヲカケ合セテ、上ノ條件ヲツカヘバ，$b_{\rho,\sigma} = b_{\rho,\sigma}^{\tau}$ ガ出ルカラデアル。

シカラバ

$$(a_{\sigma,\tau}, K, \mathfrak{g}) = (b_{\sigma,\tau}, K, \mathfrak{g})$$

$$= (\alpha_1, K_1, \sigma_1) \times (\alpha_2, K_2, \sigma_2)$$

（但シ K_1 ハ $\mathfrak{g}_2$ ニ對應スル体、K_2 ハ $\mathfrak{g}_1$ ニ對應スル体）

ト分解出来テ、コレハ $(a_{\sigma,\tau})$ ノ Exponent ガ n ナルコトニ反スル。

故ニ $\mathfrak{g}$ ハ zyklisch デナケレバナラナイ。