1114. Invariante Masse I

中野秀五郎.

$\mathfrak{R}$ ヲ regular bicompact topological space トシマス。(必ズシモ Hausdorff space デアル必要ハアリマセン). 今 $\mathfrak{R}$ ヲ $\mathfrak{R}$ ヘ移ス Homoomorphismus ノ群ヲ $\mathfrak{H}$ トシマス。($\mathfrak{H}$ ハ必ズシモ Homoomorphismus ノ全体デハナイ) 先ヅ次ノ二定理ヲ証明スルコトヽシマス

定理1. $\mathfrak{H}$ ガ abelian ナレバ, $\mathfrak{H}$ デ invariant ナ measure m ガ $\mathfrak{R}$ ノ中ニ存在シマス。($m\mathfrak{R}=1$)

定理2. $\mathfrak{R}$ ノ上ノ任意ノ連続函數 $f(x)$ ニ對シテ函數 $f(Tx)$ ガスベテノ $T \in \mathfrak{H}$ ニ對シテ gleichartig stetig ナレバ、ヲデ invariant ナ measure m ガ $\mathfrak{R}$ ノ中ニ存在シマス。($m\mathfrak{R}=1$)

此処デ gleichartig stetig トハ、任意ノ正数 ε ニ対シテ、任意ノ点 x_0 ノ近傍 $\mathfrak{U}$ ヲ適当ニ定メレバ、総テノ $T\in\mathfrak{H}$ ニ対シテ $\underset{x\in\mathfrak{U}}{Schw}\, f(Tx)<\varepsilon$ トナルコトデアリマス。

定理２ハ明カニ bicompact topological group ノ Haar measure ノ拡張デアリマス。

§1. 豫備定理

$\mathfrak{R}$ ノ上ノ連續函數全体ノ positive linear Funktional P デ $P(1)=1$ ナル P ノ全体ヲ $\mathfrak{P}$ トシマス。今 $\mathfrak{P}$ ニ次ノヤウナ topology ヲ入レマス。

定義1. $P_0\in\mathfrak{P}$ ノ近傍ヲ任意ノ有限個ノ連續函數 $f_1,\cdots\cdots,f_n$ 及正数 ε ニ對シ

$$|P(f_i)-P_0(f_i)|<\varepsilon \quad (i=1,\cdots\cdots,n)$$

ナル P ノ全体トシマス。但シ f_i ハ $\mathfrak{R}$ ノ上ノ $0\leqq f_i\leqq 1$ ナル連續函数トシマス。

豫備定理1. $\mathfrak{P}$ ハ bicompact Hausdorff space デアリマス。

証明. Tychonoff ノ方法デ次ノヤウニ簡單ニ証明デキマス。

$0\leqq f\leqq 1$ ナル $\mathfrak{R}$ ノ上ノ連続函數ノ全体ヲ $\mathfrak{F}$ トシ

マス。Interval I_f ($0\leqq x\leqq 1$) ノ direct produkt $\prod_{f\in F} I_f$ ヲ作ルト，コレハ bicompact Hausdorff space デ，$\mathfrak{P}$ ハ此レニ einbetten サレマス。

故ニ $\mathfrak{P}$ ガ $\prod I_f$ デ closed デアルコトヲ証明スレバヨイ。P_0 ヲ $\mathfrak{P}$ ノ limiting point トシマスト $P_0 \in \prod I_f$ カラ $P_0(f)$ ガ定メラレ $P_0(f)\geqq 0$ デアリマス。今 $f_1, f_2, f_3 \in \mathfrak{F}$ ニ對シテ $\alpha f_1+\beta f_2 = f_3$ デアッタトシマスト，任意ノ正数 ε ニ対シテ

$$|P(f_i)-P_0(f_i)|<\varepsilon \qquad (i=1,2,3)$$

ナル $P\in\mathfrak{P}$ ガ存在シマス。然ル時ハ

$$P(f_3)=\alpha P(f_1)+\beta P(f_2)$$

デアリマスカラ

$$|P_0(f_3)-\{\alpha P_0(f_1)+\beta P_0(f_2)\}|$$
$$<|\alpha|\varepsilon+|\beta|\varepsilon+\varepsilon$$

故ニ

$$P_0(f_3)=\alpha P_0(f_1)+\beta P_0(f_2)$$

従ッテ $P_0\in\mathfrak{P}$ デアリマス。

§2. 定理 I ノ証明

$\mathfrak{R}$ ノ topological measure m ニ對シテ，($m\mathfrak{R}=1$)

$$P(f)=\int f\,dm \qquad (f\text{ ハ連續函数})$$

ニヨッテ positive linear Functional ($P(1)=1$) ガ得ラレ、又逆モ成立シマスカラ此処デハ m ノカハリニ P ヲ考ヘマス。(詳細ハ topologische Masse 数物記事)

$T\in\mathfrak{T}$ ニ対シテ $f(Tx)$ トシテ得ル連続函数ヲ f_T デ表ハシマス。又 $P(f_T)$ トシテ得ラレル f ノ positive linear Funktional ヲ TP デ表ハシマス。即チ

$$TP(f)=P(f_T)$$

デアリマス。

総ベテノ f ニ対シテ

$$P(f_T)=P(f)$$

即チ $\quad TP=P$

ナル P ノ全体ヲ $\mathfrak{P}_T$ デ表ハストト, $\mathfrak{P}_T$ ハ $\mathfrak{P}$ デ closed デアリマス。

如何トナレバ, P_0 ヲ $\mathfrak{P}_T$ ノ limiting point トスレバ任意ノ f 及ビ正数 ε ニ対シ

$$|P(f)-P_0(f)|<\varepsilon,\quad |P(f_T)-P_0(f_T)|<\varepsilon$$

ナル $P\in\mathfrak{P}_T$ ガアリ、従ッテ

$$|P_0(f)-P_0(Tf)|<2\varepsilon$$

故ニ $\quad P_0=TP_0$

今, $\mathfrak{T}$ ヲ abelian トシ、有限個ノ $T_1,\cdots,T_n\in\mathfrak{T}$ ニ對シテ

$$P_k = \left\{ \frac{1}{k^n} (1 + T_1 + \cdots\cdots + T_1^{k-1}) \right.$$

$$\left. \cdots\cdots (1 + T_n + \cdots\cdots + T_n^{k-1}) \right\} P$$

ト置クト、明カニ $P_k \in \mathfrak{P}$ $(k=1, 2, \cdots\cdots)$ デアリマス。$\mathfrak{P}$ ガ bicompact デスカラ, P_k ノ limiting point P_0 ガアリマス。然ルトキハ任意ノ正数 ε 及ビ f ニ対シテ, $(0 \leqq f \leqq 1)$

$$|P_k(f) - P_0(f)| < \varepsilon, \quad |P_k(fT_i) - P_0(fT_i)| < \varepsilon$$

$$(i = 1, 2, \cdots\cdots, n)$$

ナル k ガアリ, 然カモ

$$|P_k(f) - P_k(fT_i)| \leqq \frac{2k^{n-1}}{k^n} = \frac{2}{k}$$

故ニ

$$|P_0(f) - P_0(fT_i)| < 2\varepsilon + \frac{2}{k}$$

従ッテ $P_0 = T_i P_0$ デアリマス。従ッテ

$$\mathfrak{P}_{T_1} \mathfrak{P}_{T_2} \cdots\cdots \mathfrak{P}_{T_n} \neq 0$$

故ニ $\bigcap_{T \in \mathfrak{T}} \mathfrak{P}_T \neq 0$ デアリマス。然カモ $P \in \bigcap_{T \in \mathfrak{T}} \mathfrak{P}_T$ ナル P ハ $\mathfrak{T}$ デ invariant デアリマス。

§3. 定理2ノ証明

$P_0 \in \mathfrak{P}$ ニ対シテ, 又

$$(\alpha_1 T_1 + \cdots\cdots + \alpha_n T_n) P_0 \in \mathfrak{P}$$

$$\alpha_1+\cdots\cdots+\alpha_n=1,\quad \alpha_i\geqq 0;\ T_i\in\mathfrak{G}$$

デアリマス。$(\alpha_1T_1+\cdots\cdots\cdots+\alpha_nT_n)P_0$ ノ全体ノ$\mathfrak{P}$デノ closure ヲ $\mathfrak{P}_{P_0}$ トシマス。シカルトキハ $P\in\mathfrak{P}_{P_0}$ ニ對シ $\mathfrak{P}_P\subset\mathfrak{P}_{P_0}$ ナルコトハ容易ニ知ラレマス。又 $P\in\mathfrak{P}_{P_0}$ ニ対シテ f ヲ一定ニスレバ

$$\underset{T\in\mathfrak{G}}{\mathrm{Schw}}\,P(fT)\leqq\underset{T\in\mathfrak{G}}{\mathrm{Schw}}\,P_0(fT)$$

モ明カデアリマス。$\mathfrak{P}$ ガ bicompact デアルカラ $Q\in\mathfrak{P}_{P_0}$ デ

$$\underset{T\in\mathfrak{G}}{\mathrm{Schw}}\,Q(fT)=\inf_{P\in\mathfrak{P}_{P_0}}\left\{\underset{T\in\mathfrak{G}}{\mathrm{Schw}}\,P(fT)\right\}$$

ナル Q ガ存在シマス。然ルトキハ任意ノ $S\in\mathfrak{G}$ ニ對シテ又

$$\underset{T\in\mathfrak{G}}{\mathrm{Schw}}\,Q(fT)=\underset{T\in\mathfrak{G}}{\mathrm{Schw}}\,SQ(fT)$$

デナケレバナリマセン。然レトキハ

$$Q(fT)=Q(f)\qquad(T\in\mathfrak{G})$$

ナルコトガ次ノ如クニ証明デキマス。

今 $T_1,T_2\in\mathfrak{G}$ ニ對シ

$$d(fT_1,fT_2)=\sup_{x\in\mathfrak{R}}\left|f(T_1x)-f(T_2x)\right|$$

ト置ケバ

$$d(fT_1S,fT_2S)=d(fT_1,fT_2)$$
$$(S\in\mathfrak{G})$$

デアリマス。

fTガ gleichartig stetig デアリマスカラ，此ノ metric ニ対シテ total beschränkt デアリマス。即チ任意ノ正数 ε ニ對シ

$$d(fT_i,\ fT_j) \geqq \varepsilon \qquad (i \neq j)$$

ナル $T_1, \cdots\cdots, T_n$ ハ有限個ヨリ存在シナイ。今 $T_1, \cdots\cdots, T_n$ ガ最大數トシマス。若シ

$$\underset{T \in \mathfrak{T}}{Schw}\ Q(fT) > 3\varepsilon$$

トシマス。又 T_1 ヲ

$$Q(fT_1) > \sup_{T \in \mathfrak{T}} Q(fT) - \varepsilon$$

トナル様ニ出来マス。今

$$Q_1 = \frac{T_1 + \cdots\cdots + T_n}{n} Q$$

トオケバ，明カニ

$$\inf_T Q(fT) \leqq Q_1(fT) \leqq \sup_T Q(fT)$$

然カモ $\quad Q_1(fT) = Q_1\left(f\,\dfrac{T_1 + \cdots\cdots + T_n}{n}\,T\right)$

即チ

$$Q_1(fT) = \frac{1}{n}\{Q_1(fT_1T) + \cdots\cdots + Q_1(fT_nT)\}$$

又

$$d(fT_1,\ fT_iT) < \varepsilon$$

ナルiガ存在シナケレバナラヌカラ

$$|Q_1(fT_1)\ Q(fT_iT)| \leqq d(fT_1, fT_iT) < \varepsilon$$

ヨリ

$$Q(fT_iT) > Q_1(fT_1) - \varepsilon > \sup_T Q(fT) - 2\varepsilon$$

故ニ

$$Q_1(fT) \geqq \inf_T Q(fT) + \frac{\varepsilon}{n}$$

従ッテ

$$\operatorname*{Schw}_T Q_1(fT) < \operatorname*{Schw}_T Q(fT)$$

トナッテ矛盾シマス。故ニ

$$Q(fT) = Q'(f)$$

デアリマス。

次ニ $P(fT) = P(f)$ ナル P ノ全体ヲ $\mathfrak{P}_f$ トシマスト

以上ヨリ $\bigcap_f \mathfrak{P}_f \neq 0$

ガ知ラレマス。故ニ $P \in \bigcap_f \mathfrak{P}_f$ ハ $\mathfrak{F}$ デ invariant デアリマス。

—— 18. 3. 10 ——