1124. Maximal ideal ノ存在ニ就テ

中野秀五郎（東大）

$\mathfrak{B}$ ヲ Boolean algebra トシマス。$\mathfrak{B}$ ノ element ノ集合 $\mathfrak{p}$ ガ次ノ性質ヲ有スルトキ，即チ

1) $\mathfrak{p} \ni 0$,

2) $\mathfrak{p} \ni a,\ a \geqq b \longrightarrow \mathfrak{p} \ni b$,

3) $\mathfrak{p} \ni a, b \longrightarrow \mathfrak{p} \ni a \cap b$

ナルトキ $\mathfrak{p}$ ヲ Ideal ト呼ビマス。<u>$\mathfrak{p}_0$ ヲ任意ノ Ideal トスレバ，$\mathfrak{p}_0$ ヲ含ム最大 Ideal ガ存在スル。</u>此ノ定理ハ transfinite Induction ニヨレバ明カデアリマス。又解析學ニ於テ transfinite Induction ヲ用ヒナケレバナラヌ主ナル定理ハ此ノ定理ヨリ得ラレル

ノデアリマス。例ヘバ bicompact space ノ direct Product ハ又 bicompact デアル等。従ッテコノ定理ハ解析學ニ於テハ transfinite Induction ニ換リ得ルモノデアルト考ヘラレマス。特ニ此ノ定理ハ Auswahlprinzip カラ直接証明出来ルコトヲ此処ニ注意シタイト思ヒマス。此レハ既ニ氣ノ付カレタ方モアルトハ思ヒマスが、Zermers ノ Wohlordnung ノ証明が其儘適用デキルノデアリマス。

$\mathfrak{L}$ ノ総テノ部分集合ニ其レニ属スル element ヲ對應サセタトシマス。(Auswahlprinzip ニヨル) $\mathfrak{p}$ ヲ任意ノ Ideal デ maximal デナイトシマス。然ルトキハ、$\mathfrak{p}$ ノ総テノ element $p \in \mathfrak{p}$ ニ對シテ $p \cap x \neq 0$, $x \,\overline{\in}\, \mathfrak{p}$ ナル element x が存在シマス。カヽル x ノ全体カラナル $\mathfrak{L}$ ノ部分集合ニ對應シテキル element ヲ p_+ トシマス。然ルトキハ、$\mathfrak{p}$ ニ p_+ ヲ加ヘテ一ツノ Ideal が出来マス。此ノ Ideal ヲ $\mathfrak{p}_+$ ト書クコトトシマス。

二ツノ Ideal $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ がアッテ、$\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$ ナルトキハ $\mathfrak{p} \leqq \mathfrak{q}$ ト書クコトヽシマス。今 Ideal ノ集合 $\{\mathfrak{p}_\alpha\}$ がアッテ $\{\mathfrak{p}_\alpha\}$ ヲ $\mathfrak{p}_\alpha, \mathfrak{p}_\beta$ ナル任意ノ二ツニ對シテ $\mathfrak{p}_\alpha \leqq \mathfrak{p}_\beta$ カ $\mathfrak{p}_\alpha \geqq \mathfrak{p}_\beta$ ノ何レカが成立スルトキ、$\{\mathfrak{p}_\alpha\}$ ハ linear ordered ト云フコトトシマス。$\{\mathfrak{p}_\alpha\}$ が linear ordered デアルトキハ Vereinigung $\sum_\alpha \mathfrak{p}_\alpha$ ハ又

明カニIdeal トナリマス。此ノIdeal ヲ $\bigcup \mathfrak{z}_\alpha$ ト書クコトヽ致シマス。

Ideal ノ集合Kが次ノ性質ガアルトキ，即チ

1) $K \ni \mathfrak{z} \to K \ni \mathfrak{z}_+$

2) $K \supset \{\mathfrak{z}_\alpha\}$, $\{\mathfrak{z}_\alpha\}$ linear ordered

$$\to K \ni \bigcup_\alpha \mathfrak{z}_\alpha$$

ナルトキKヲ Kette ト呼ブコトトシマス。

$\mathfrak{z}_0$ヲ任意ノIdeal トシマス。$\mathfrak{z}_0 \leqq \mathfrak{z}$ ナルスベテノIdeal $\mathfrak{z}$ ハ明ラカニ Kette ヲナシ、然カモ $\mathfrak{z}_0$ヲ含ミ、如何ナル element モ $\geqq \mathfrak{z}_0$ デアリマス。此ノ様ナスベテノ Kette ノ Durchschnitt ヲ K_0 トスレバ，K_0 ハ此ノ如キ最小ノ Kette トナリマス。

$K_0 \ni \mathfrak{n}$ ノ Ideal $\mathfrak{n}$ ガ

$K_0 \ni \mathfrak{z}$, $\mathfrak{z} < \mathfrak{n} \to \mathfrak{z}_+ \leqq \mathfrak{n}$

ヲ満足スルトキ，normal ト名ヅケマス。然ルトキハ $\mathfrak{z}_0$ ハ明カニ normal デアリマス。今 $\mathfrak{n}$ ヲ normal トシ、$K_0 \ni \mathfrak{z}$, $\mathfrak{z} \leqq \mathfrak{n}$ ナル $\mathfrak{z}$ ノ全部ト $K_0 \ni \mathfrak{z}$, $\mathfrak{z} \geqq \mathfrak{n}_+$ ナル $\mathfrak{z}$ ノ全部ノ和ヲ K_1 トスレバ，K_1 ハ明カニ Kette トナリマシテ、$K_1 \subset K_0$, $K_1 \ni \mathfrak{z}_0$ デアリマスカラ，$K_0 = K_1$ デナケレバナリマセン。従ッテ又 $\mathfrak{n}_+$ モ normal デアリマス。然カモ $\mathfrak{n}$ ガ normal ナレバ他ノ $K_0 \ni \mathfrak{z}$ ニ對シテ，$\mathfrak{z} \lesseqgtr \mathfrak{n}$ ガ成立スルコトガ同時ニ知ラレマス。

$\{\mathfrak{n}_\alpha\}$ ヲ linear ordered ナ K_0 ノ normal ナ

Ideal ノ集合トシマス。先ヅ明カニ $\bigcup_\alpha \mathfrak{n}_\alpha \in K_0$ デアリマス。$K_0 \ni \mathfrak{x}$ デ何レカ一ツノ $\mathfrak{n}_\alpha$ ニ對シ $\mathfrak{x} < \mathfrak{n}_\alpha$ トナル $\mathfrak{x}$ ノ全部ト $K_0 \ni \mathfrak{x}$, $\mathfrak{x} \geqq \bigcup_\alpha \mathfrak{n}_\alpha$ ナル $\mathfrak{x}$ ノ全部トノ和集合ヲ K_2 トスレバ，K_2 ハ又明カニ Kette トナリ、$K_2 \subset K_0$, $K_2 \ni \mathfrak{x}_0$ デアリマス。故ニ $K_2 = K_0$ デナケレバナリマセン。

從ッテ $K_0 \ni \mathfrak{x}$, $\mathfrak{x} < \bigcup_\alpha \mathfrak{n}_\alpha$ ナレバ、何レカ一ツノ α ニ對シ $\mathfrak{x} < \mathfrak{n}_\alpha$、從ッテ $\mathfrak{x}_+ \leqq \mathfrak{n}_\alpha \leqq \bigcup_\alpha \mathfrak{n}_\alpha$ トナリマスカラ、$\bigcup_\alpha \mathfrak{n}_\alpha$ ハ又 normal デアリマス。

以上ニヨリ K_0 ノ normal ナ Ideal ノ全体ヲ N トシマスト，N ハ又 Kette トナリマシテ、$N \subset K_0$, $N \ni \mathfrak{x}_0$ デアリマス。故ニ $N = K_0$。然カモ N ハ linear ordered デナケレバナリマセンカラ、$\sum N$ ハ Ideal トナリ、然カモ $\mathfrak{x}_0$ ヲ含ム maximal Ideal デアリマス。

以上ノ証明ハ $\mathfrak{L}$ ガ Boolean algebra デナクトモ semi-ordered デ任意ノ a, b ニ對シ $a \geqq c$, $b \geqq c$ ナル c ガ存在スレバ，其ノマヽ適用サレルコトハ明カデアリマス。

(18. 4. 28)