1127 自由位相群ノ極大概週期性

中山　正（名大）

岩澤君ハ「位相数學」4—2 ニ自由群其ノ他ノ色々ノ群ノ極大概週期性ヲ論ジラレマシタ。コレニ関係シテ，実ニ自明ニ近イコトデアリマスが，Markhoff ノ自由位相群モ極大概週期的ニナル様デアリマスノデ，以下ソレヲ述ベテミマス。

S ヲ完全正則ナ位相空間，F ヲソレデ生成サレタ自由位相群トスル。F ノ任意ノ一ツノ元 g ヲ考ヘ（但シ $g \neq 1$）ソレヲ S ノ元ノ巾積ト表ハストキニ出テ来ル S ノ元ヲ $u_1, u_2, \cdots\cdots, u_n$ トスル：

$$g = u_{i_1}^{\pm 1} u_{i_2}^{\pm 1} \cdots\cdots u_{i_m}^{\pm 1}$$

今 n 個ノ元 $u_1, u_2, \cdots\cdots, u_n$ デ生成サレタ自由群 F_0 ヲ考ヘ，ソコデ g ヲ含マヌ F_0 ノ不変部分群 N_0 デ $(F_0 : N_0)$ ガ有限ナモノヲ採ル（ソノ存在ハ Magnus ノ定

理ヨリ明カ. 上記岩澤氏所説参照). 今 F_0/N_0 ノユニテール表現 $A(h)$, $(h \in F_0)$ デ $A(g) \neq E$ ナルモノヲ考ヘル. 簡単ノタメ

$$A_1 = A(u_1),\ A_2 = A(u_2),\ \cdots\cdots,\ A_n = A(u_n)$$

トオク. 扨テ, ユニテール行列群 $\mathfrak{U}$ ハ連結ダカラ E ト各 A_i ヲ $\mathfrak{U}$ ノ中ノ連續ナ路デ結ブ: $A_i(\tau)$ $(0 \leqq \tau \leqq 1)$ $(A_i(0) = E,\ A_i(1) = A_i)$

他方 S ニ於テ各 u_i ヲ互ニ共通点ノナイ近傍 V_i デ囲ム. 而シテ各 i ニツキ, u_i デ 1, V_i ノ外デ 0 ナル $[0, 1]$ ノ値ヲトル連續函數 $f_i(x)$ $(x \in S)$ ヲ作ル. 今 S ノ元 x ニ對シ

$$A(x) = \begin{cases} E & (\text{若シ}x\text{ガドノ}V_i\text{ニモ屬サヌ特}) \\ A_i(f_i(x)) & (x \in V_i\text{ ノトキ}) \end{cases}$$

トオク. (特ニ $x = u_i$ ノトキハ $A(u_i) = A_i$ トナルカラ元ノ來ノ定義ト一致シテ丁度ヨイ). 然ラバ $x \to A(x)$ ハ S カラ $\mathfrak{U}$ ノ中ヘノ連續寫像ナルコト明カ. ヨッテ自由位相群 F ノ性質ニヨリ, ソノ擴張トシテ F カラ $\mathfrak{U}$ ノ中ヘノ連續準同型, 即チ F ノ連續ユニテール表現が得ラレル. 特ニ $A(u_i) = A_i$ デアリ, 我々ノ g ニ對シテハ

$$A(g) = A_{i_1}^{\pm 1} \cdots\cdots A_{i_n}^{\pm 1} \neq E$$

g ハ F ノ任意ノ元 $(\neq 1)$ ダカラ F ハ *maximally almost periodic* デアル. (証了)

斯クテFニ新タニ完全有界ナ位相ガ入ッテ，ソレデFガマタ位相群ニナルワケデアルガ，ソレヲF'デデモ表ス。自由位相群Fトシテノモトノ位相ヨリ弱ク，一般ニハ本當ニ弱イデアリマセウガ，一寸面白イコトハSノ上デハ同ジ位相ヲ與ヘルコトデアリマス。何デモナイコトデスガ．即チSノ一点u，及ビソノ近傍Vニ對シ，例ノ如クuデ1云々ノ連續函數$f(x)$ヲ考ヘ，ソシテ$\alpha(x)=e^{\pi i f(x)}$トデモオケバSカラ単位円ノ上ヘノ連續寫像ガ得ラレテ$\alpha(u)=-1$，$\alpha(x)=1$，$x \bar{\in} V$．コレヲ上記ノ如クFノ表現ニマデ擴張スレバ，ソコデ$|\alpha(g)-\alpha(u)|<2$ナルF'ノ意味ノuノ近傍ノSニ屬スル部分ハVニ含マレル。コレデF'デヤハリSガ部分空間ニナルワケデアリマス。ソレデF'ハ丁度例ヘバ自由完全有界位相群トヨブベキ性質ヲモツモノデアリマセウ。

次ニ<u>SハコノF'ノ中デモ閉ヂテヰル</u>コトヲ証明シマス（Fニツイテノ同様ノコトハMarkhoffニアル）．ソレモ簡単デ，gヲSニ屬サヌFノ任意ノ元トスル，$u_1, u_2, \ldots, u_n$ヲ上ト同ジヤウナ意味トシ，F_0ノ（$F_0 : N_0$）ガ有限ナ不変部分群デアッテ mod N_0デgガ$u_1, \ldots, u_n$ノドレトモ一致シナイ様ナモノトスル。ソコデ例ヘバF_0/N_0ノtreuナうにてーる表現$A(h)$ $(h \in F_0)$ヲトリ，ソレカラ上記ノ様ニFノうにてーる連續表現$A(h)$ $(h \in F)$ヲツクルノデアルガ，コノ際Eト各$A_i=$

A(U_i) ヲムスブ路ガ $\mathfrak{U}$ ノ中ノ A(g) ノアル近傍ヲ通ラナイヤウニスレバ確カニコノ A(h) デノ準距離ノ意味デ g ハ S カラ正ノ距離ヲモツカラ主張ガ成立ツ。而シテ A(g) ヲトホラヌ路ノ存在ハ A(x) ガ一次ノ表現デナイノヲモッテ来テオケバ明カデアラウ。

ナホ、取リ立テテ云フホドノ事デモナイカモ知レマセンガ，上ノ如ク S ガ完全有界ナ F' ノ部分空間ニナルノデスカラ，任意ノ完全正則ナ位相空間ハ適當ナ Compact group ノ中ニ imbed 出来ルナドトイフコトガ知レルワケデアリマセウ，マタ normal デナイ完全有界ナ group ノ存在モ出ルワケ。

モ一ツ，S ト F 及ビ F' トノ関係デスガ，S ガ 0-dimensional ナラ F' モ従ツテ F モ 0-dimensional デアリマス。ソレハ例ヘバ上述証明中デ V_i ヲ開且ツ閉ニトリソコノ連續函數 $f_i(x)$ トシテ V_i デハ 1，V_i ノ外デハ 0 トスレバ結局 A(h) ハ有限表現デ，ソレデ g ガ 1 ト分離出来ルノデスカラ明カデアリマス。（然シ、モシ S ガ 0-dim. デナケレバ F 及ビ F' ハスベテ ∞-dim. ニナルコトモ容易ニ知ラレマセウ）。

—— 以上 ——