1129. Hilbert space ノ unit sphere ノ位相的性質

角谷 静夫（阪大）

n-次元 Euclid 空間ニ於ケル Brouwer ノ fix point theorem ハ J. Schauder, A. Tychonoff ニヨッテ次ノ如ク無限次元空間ノ場合ニ擴張サレタ。

「K ヲ locally convex ナ topological linear space $\mathfrak{X}$ 内ノ compact convex set トシ，$x' = \varphi(x)$ ヲ K ヲ K ノ内ヘ寫ス continuous mapping トスレバ $x_0 = \varphi(x_0)$ トナル如キ $x_0 \in K$ ガ存在スル」

同様ナ定理ガ Hilbert space ノ unit sphere $K = \{x \mid \|x\| \leqq 1\}$ ニ對シテ成立スルカドウカヲ調ベヨウ。先ヅ K ヲ K ノ中ヘウツス mapping $x' = \varphi(x)$ ガ weakly continuous デアレバ，K ガ weak topology ニ關シテ compact デアルコトヨリ上ノ結果ヲ用ヒルト直チニ fixed point ノ存在ヲ知ル。然ルニ $x' = \varphi(x)$ ガ單ニ strongly continuous デアルト云フダケヨリハ不動点ノ存在ハ必ズシモ結論サレナイ。実際 K ヲ K 自身ニウツス homeomorphism デ（勿論 strong topology ニ用シテ）アッテ fixed point ヲ持タナイモノガ存在スルコトガ示サレル。即チ

$\boxed{\text{定理1}}$ Hilbert space. H ノ unit sphere $K=\{x \mid \|x\| \leqq 1\}$ ヲK自身ニウツス homeomorphism デ不動点ヲ持タナイモノが存在スル。

$\boxed{\text{証明}}$ H ノ complete orthogonal normalized system ヲ $\{y_n / n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots\cdots\}$ トスル。次ニ H ヲ H 自身ニウツス unitary transformation $x'=U(x)$ ヲ $y_{n+1}=U(y_n)$, $n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots\cdots$ ニヨッテ定義スル。

然ル後

$$(1) \quad \varphi(x)=(1-\|x\|)\frac{y_0}{2}+U(x)$$

ト置ケバ $x \to \varphi(x)$ が求ムル如キ K ノ homeomorphism デアル。

先ヅ $x \to \varphi(x)$ が K ノ homeomorphism デアルコトヲ示スタメ $x \neq 0$ ナルトキ (1) ヲ次ノ如ク書キ改メル。

$$(2) \quad \varphi(x)=(1-\|x\|)\frac{y_0}{2}+\|x\| \, U\left(\frac{x}{\|x\|}\right)$$

$$=(1-\|x\|)\frac{y_0}{2}+\|x\| \, U(y)$$

ココニ $y=\frac{x}{\|x\|}$ ハ vector $\overrightarrow{0, x}$ ノ延長が unit sphere K ノ surface $S=\{x \mid \|x\|=1\}$ ニ交ハル点ヲ表ハス。然ルトキハ (2) ハ $\varphi(x)$ が $\frac{y_0}{2}$ ト $U(y) \in S$ ヲ結ブ線分 $\overline{\frac{y_0}{2}, U(y)}$ ヲ $\|x\|$:

$(1-\|x\|)$ ノ比ニ分ツ点デアルコト、即チ x が $\overline{0, y}$ ヲ

分ツノト同ジ比ニ分ツ点デアルコトヲ意味シテキル。

$y \to U(y)$ ガ S ノ homeomorphism ヲ與ヘルコトハ良ク知ラレテキルカラ，コレニヨッテ $x \to \varphi(x)$ ガ K ノ homeomorphism ヲ與ヘルコトヲ知ル。

次ニ此ノ mapping $x \to \varphi(x)$ ニ fixed point ガナイコトヲ示サウ。若シ $x_0 \in K$ ニ對シテ $x_0 = \varphi(x_0)$ トナッタトスレバ

$$(3) \quad x_0 - U(x_0) = (1 - \|x_0\|) \cdot \frac{y_0}{2}$$

トナル．コレヨリ $x_0 \neq 0$ ナルコトハ明カデアリ．又 $x \to U(x)$ ガ unit sphere K ノ surface S ノ homeomorphism デ fixed point ヲ持タナイコトヨリ $\|x_0\| < 1$ デナケレバナラナイコトヲ知ル。次ニ

$$(4) \quad x_0 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n y_n, \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 = \|x_0\|^2 < 1$$

トスレバ

$$(5) \quad x_0 - U(x_0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n y_n - \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n y_{n+1}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (a_n - a_{n-1}) y_n$$

トナル。コレト (3) トヨリ $a_0 - a_{-1} = \frac{1}{2}(1 - \|x_0\|) > 0$ ニテ且ツ $a_n = a_{n-1}$, $n = \pm 1, \pm 2, \cdots\cdots$ ヲ得ル．後者ヨリハ $a_0 = a_1 = a_2 = \cdots\cdots$, $a_{-1} = a_{-2} = a_{-3} = \cdots\cdots$ ヲ得ルカラ，コレハ $\sum_{-\infty}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$ トナルコトニ矛盾ス

ル。

ヨッテ K 内ニハ $x \to \varphi(x)$ ノ fixed point ハ存在シナイ。

$\boxed{\text{定理 2}}$ K ノ表面 $S = \{x \mid \|x\| = 1\}$ ハ K ノ retract（Borsuk ノ意味）デアル。即チ K ヲ S ニウツス continuous mapping $x' = \psi(x)$ ニテ $x \in S$ ナルトキ $\psi(x) = x$ トナルモノガ存在スル。

$\boxed{\text{証明}}$ 任意ノ $x \in K$ ニ対シテ $\varphi(x)$ ト x ト結ブ vector $\overrightarrow{\varphi(x), x}$ ノ延長ガ S ト交ハル点ヲ $\psi(x)$ ニテ表ハス。$x \to \psi(x)$ ガ求ムル retrating mapping デアルコトガ容易ニ示サレル。

$\boxed{\text{定理 3}}$ S ノ上ニテ identity mapping $\varphi(x) \equiv x$ ハ constant mapping $\varphi(x) \equiv x_0 \in S$ ト homotopic デアル。即チ $S \times (0.1)$（コレハ $x \in S$, $0 \leqq t \leqq 1$ ナル x, t ノ pair (x, t) 全体ニ普通ノ product topology ヲ與ヘタ空間ヲ意味スル）ヲ S ニウツス continuous mapping $x' = \psi(x, t)$ ガ存在シテ $t = 0$ ノトキ $\psi(x, 0) \equiv x_0$ on S, $t = 1$ ノトキ $\psi(x, 1) \equiv x$ on S トナル。

$\boxed{\text{証明}}$ 定理 2 ノ函数 $x' = \psi(x)$ ヲ使ッテ $\psi(x, t) = \psi(tx)$ ト置ケバヨイ。

最後ニ二三ノ $\boxed{\text{未解決ノ問題}}$ ヲ提出スル。K ト S ト H トハ互ニ homeomorph デアルカ？

pounded linear functional $f(x)$ ニ對シテ $D = \{x \mid f(x) \leqq 0\}$ ハ K, S 又ハ H ト homeomorph デアルカ? K ヲ K 自身ニウツルカ?
(Gebietzinvarianz ノ問題)