1132. のるむ環トスペクトル定理

吉田　耕作(名大)

對稱線型作用素ノスペクトル分解定理ガ東氏ハ東環ノ見地カラ取扱ヒ得ルコトハ既ニ良ク知ラレタコトデアルガ，問題ハソノ取扱ヒ方ニアルト思フ。以下ニ述ベルノハ格別巧イ方デモナイガ，先ノ談話240号250号ニ關聯シテ讀ンデ頂キタイ。

T ヲ對稱線型作用素，R ヲ T カラ生成サレタ作用素環トスル。R ハ實數ヲ係數トスルのるむ環：$\|T\| = \sup_{\|f\|=1} \|T\cdot f\|$ デアル。各 $S \in R$ ハ對稱線型作用素ダカラ

$$\|S\| = \sup_{\|f\|=1} |(S\cdot f, f)|$$

從ッテ $\|S^2\| = \sup|(S^2\cdot f, f)| = \sup(Sf, Sf) = \|S\|^2$，故ニ

(1) $\|S\| = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|S^n\|}$

又 S ノ graph ヲ考ヘテ容易ニワカル様ニ[1]

(2) $S \neq 0$ ナラバ $(1+S^2)^{-1} \in R$

上ノ二ツノ性質カラ R ハ或ルこむぱくと空間 $\mathfrak{M}$

---

(1) 例ヘバ Murray ノ本ノ 42 頁

(2) のるむ環ノ基本定理

ノ上ノ連續函數ノ全体トシテ環同型的ニ表現サレル譯デアル。

$$S \longleftrightarrow S(M), \quad M \in \mathfrak{M}$$

コノコトカラ $(S \cdot f, f) \geqq 0$ (全テノ f ニ對シテ) ヲ $S \geqq 0$ トシタトキ R ガ束ニナルコトガ云ヘル。即チ $S(M) \geqq 0$ (on $\mathfrak{M}$) ヲ $S \succeq 0$ ト書クトキ

(3) $S \succeq 0$ ト $S \geqq 0$ トハ同等

ナコトガ云ヘレバヨイコトハ明カデアルガ

(3)ノ証明ハ容易イ。$S \succeq 0$ トスレバ $S = T^2$ ナル如キ T ($T(M) = \sqrt{S(M)}$) ガアルカラ $S = T^2 \geqq 0$

逆ニ $S \geqq 0$ トスル。$S_1(M) = \sup(S(M), 0)$, $S_2(M) = \sup(-S(M), 0)$ トスレバ、上カラ

$$S = S_1 - S_2, \quad S_1 S_2 = 0, \quad S_i \geqq 0, \quad S_i \succeq 0 \qquad (i = 1, 2)$$

故ニ $S_2 = 0$ ヲ云ヘバヨイ。所ガ $S \geqq 0$ ニヨリ

$$\begin{cases} (S \cdot S_2 f, S_2 f) = (-S_2^2 f, S_2 f) \\ \qquad = (-S_2^3 f, f) \geqq 0 \\ \text{従ッテ } (-S_2^3) \geqq 0 \text{ 一方 } S_2^3 \geqq 0 \text{ ハ明カダカラ} \\ S_2^3 = 0 \end{cases}$$

之カラ $S_2^4 = 0$ ヲ得テ $S = 0$[1]

斯クシテ R ハ束デアルコトガワカッタ。ソウスレバ

(1) $\|S^2\| = \|S\|^2$ カラ R ハ nilpotent ナ元ヲ含マナイ。

$\mathcal{R}$ ガ σ-完備ナコトハ又簡単ニ証明デキル。（談話1072）

コレ迄クレバすぺくとる定理ノ証明ハ，Baire ノ category 論法（談話 1072）デモ或ヒハ多クノ人ガ指摘シタヤウニ Freudenthal ノすぺくとる定理デモ使ヘバ直グ出セル。

兎ニ角對稱性ノ定義カラ直グ出テクル (1), (2) ガ丁度實のある環ノ表現定理ヲ使フタメノ條件ニナッテヰルコトガ，問題ノ核心デアル所ノ $\mathcal{R}$ ガ束ナルコトノ証明ニ役立ツワケデアリマス。