1137. l_2-space ニ於ケル解析函數ニツイテ

霜田 伊左衛 (阪大)

複素 l_2-space E ノ領域 D デ定義セラレ, 複素 l_2-space E' ニ於ケル値ヲトル函數 $f(x)$ ハ

1) D ニ於テ連續 (norm ノ意味デ)

2) D ノ任意ノ x, E ニ於ケル任意ノ y ニ對シ, α ヲ複素數トスレバ

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{f(y+\alpha x)-f(y)}{\alpha}$$

ガ存在スル。乃チ gatean ノ意味デ微分可能ナルトキ $f(x)$ ハ D デ正則デアルトイヒマス。條件2) ハ或ハ α ニツイテ 0 點ノ近傍デ正則デアルト言ヒカヘテモヨロ

シイデセウ。

今 $x=(x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots)$

$$f(x)=(f_1(x), f_2(x), f_3(x), \cdots\cdots)$$

（x_n, $f_n(x)$ ($n=1, 2, \cdots\cdots$) ハ複素数）トオキマスト $f(x)$ ノ正則性ニツイテ次ノ定理ガ成立シマス。

〔定理〕 $f(x)$ ガ D デ正則ナルタメノ必要十分條件ハ

1) $f(x)$ ハ D デ strongly ニ連續

2) $f_n(y+\lambda x)$ ガ λ ニツイテ正則

$$(n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

〔証明〕 條件1) ハ共有シテヰマスカラ條件2) ニツイテ考ヘマス。必要條件ニツイテハ，$f(x)$ ノ各成分ヲ考ヘマスト $f_n(x+\lambda y)$ ハ λ ノ適當ナ近傍（スベテノ $f_n(x+\lambda y)$ ニ共通）デ λ ニツイテ正則トナリマスコトハ明ラカデス。

十分條件ヲ証明スルニアタリマシテ，記述ヲ簡單ニスルタメニ D ∋ 0 且ツ一般性ヲ失ハズニ $y=0$ ノ場合ヲ考ヘマス。

$f(\lambda x)$ ガ λ ニツイテ正則ナルコトヲ証明スルニハ

$$\left(\frac{df_1(\lambda x)}{d\lambda}, \frac{df_2(\lambda x)}{d\lambda}, \frac{df_3(\lambda x)}{d\lambda}, \cdots\cdots\right)$$

ガ E ノ点トシテ確定スルコトヲ証明スレバ良イコトニナリマス。

Dカラ任意ニxヲトリ，コレヲ固定シマス．適当ナ正数rヲトリマストαx（$|\alpha| \leq r$）ハDニ含マレ且ツcompact setトナリマス。之レヲGトカキマス。$f(x)$ハDデ連續デスカラDデ有界ニナリマス。

乃チMが存在シ　$\|f(G)\| \leq M$

條件2）ヨリ$f_n(\alpha x)$ハαニツキ正則デスカラ

$$\frac{df_n(\alpha x)}{d\alpha} = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f_n(\zeta x)}{(\zeta-\alpha)^2} d\zeta \quad (c : |\zeta| = r)$$

今正数ρ（$\rho < r$）ヲ任意ニトリマスト$|\alpha| \leq r - \rho$ナルトキ

$$\left|\frac{df_n(\alpha x)}{d\alpha}\right|^2 \leq \left(\frac{r}{2\pi\rho^2}\int_0^{2\pi} |f_n(re^{i\theta}x)|\, d\theta\right)^2$$

$$\leq \frac{r^2}{4\pi^2\rho^4}\int_0^{2\pi} |f_n(re^{i\theta}x)|^2 d\theta \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$= \frac{r^2}{2\pi\rho^4}\int_0^{2\pi} |f_n(re^{i\theta}x)|^2 d\theta$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{df_n(\alpha x)}{d\alpha}\right|^2 \leq \frac{r^2}{2\pi\rho^4}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(re^{i\theta}x)|^2\right) d\theta$$

$$= \frac{r^2}{2\pi\rho^4}\int_0^{2\pi} \|f(re^{i\theta}x)\|^2 d\theta$$

$$\leq \frac{r^2 M^2}{\rho^4}$$

乃チ$f(\alpha x)$ハαニツイテ0點ノ近傍デ正則トナリ

マス。X ハ D ノ任意ノ点デスカラコレデ各々ノ定理ハ証明出来タコトニナリマス。

——（以　上）——