1139. 河口空間ノ共形幾何學 III

岩本 斉行 (東大)

計量スカラー $F(x, x^{(1)}, \cdots\cdots, x^{(M)})$ カラ得ラレル M コノ Synge ノベクトル $E_{i\mu}$ ($1 \leqq \mu \leqq M$) カラ次ノ如ク intrinsic ナ M コノベクトル $\overset{\circ}{E}_{i\mu}$ ($1 \leqq \mu \leqq M$) ヲ導クコトガ出来ル。

$$\overset{\circ}{E}_{i\mu} = F^{-1} \sum_{\nu \geqq \mu}^{M} \underset{\mu}{A}^{\nu} E_{i\nu} \qquad (\mu = 1, 2, \cdots\cdots, M)$$

$\mathrm{rank}\,(F_{(M)i\,(M)j}) = n-1$ ト假定シテ

$$\gamma_{ij} = F^{2M-1} F_{(M)i\,(M)j} + \overset{\circ}{E}_{i1} \overset{\circ}{E}_{j1}$$

トオケバ γ_{ij} ハ intrinsic ナ二階對称テンソルデ

$|\gamma_{ij}| \neq 0$

従ツテ

$$\gamma_{ia} \gamma^{aj} = \delta_i^j$$

トナル様ナ intrinsic ナ反変對称テンソル γ^{ij} ガ一義的ニ確定スル。尚

$$F^2 F_1 = \begin{vmatrix} F_{(M)i\,(M)j} & \overset{\circ}{E}_{i1} \\ \overset{\circ}{E}_{j1} & 0 \end{vmatrix}$$

トオク。F_2 ハ intrinsic ナ相対スカラーデ，之ヲ用フレバ γ_{ij} ノ行列式 $\gamma = |\gamma_{ij}|$ ハ

$$\gamma = F^{(2M-1)(n-1)+2} F_1$$

トカクコトガ出来ル。

$\overset{\circ}{E}_{i\mu}$ ニ関シテハ，基本的ナ関係

$$\overset{\circ}{E}_{i\mu}x^{(1)i}=0 \qquad (2\leqq\mu\leqq M)$$

$$\overset{\circ}{E}_{i1}\,x^{(1)i}=-F$$

ガ成立スル。即チ M コノ intrinsic ナ Synge ノベクトル $\overset{\circ}{E}_{i\mu}$ ノ表ハス二枚ノ互ニ平行ナ超平面ハ，$\overset{\circ}{E}_{i1}$ 以外ハ全部曲線ニ沿フラ切スルベクトル $x^{(1)i}$ ノ方向ヲ含ンデヰル。之レカラ容易ニ次ノ関係ノ成立スルコトガワカル。

$$\gamma_{ij}\,x^{(1)j}=-F\overset{\circ}{E}_{i1},\quad \gamma_{ij}\,x^{(1)i}x^{(1)j}=F^{2}$$

従ッテ γ_{ij} ヲ基本テンソルニトルコトが出来ル。然シ之ハ共形不変量デハナイ。

次ニ再ビ ρ が急函数ノ場合ヲ論ジヨウ。

定理1. μ コノ Synge ノベクトル $\overset{\circ}{E}_{iM},\cdots\cdots,$ $\overset{\circ}{E}_{iM-\mu+1}$，$(1\leqq\mu\leqq M-1)$ ノツクル平行 2μ 面体ノ基本テンソル γ_{ij} ノ意味デノ体積ハ重サ $-\frac{1}{2}\mu(\mu-1)$ ノ intrinsic ナ共形スカラーデアル。

先ヅ次ノ lemma ヲ証明シヨウ。

lemma $\gamma^{ij}E_{i\mu}E_{j\nu}$ $(M\geqq\mu,\ \nu\geqq2)$ ナル量ハ重サ $-2M$ ノ共形スカラーデアル。

証明

$$r^{ij} t_{i\mu} t_{i\nu} = -\frac{1}{r}\begin{vmatrix} r_{ij} & t_{i\mu} \\ t_{j\nu} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{r}\begin{vmatrix} f_{ij}+\mathring{E}_{i1}\mathring{E}_{j1} & t_{i\mu} \\ t_{j\nu} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{1}{r}\begin{vmatrix} f_{ij}+\mathring{E}_{i1}\mathring{E}_{j1} & t_{i\mu} & \mathring{E}_{i1} \\ t_{j\nu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{1}{r}\begin{vmatrix} f_{ij} & t_{i\mu} & \mathring{E}_{i1} \\ t_{j\nu} & 0 & 0 \\ -\mathring{E}_{j1} & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

即チ

$$r^{ij} t_{i\mu} t_{j\nu} = -\frac{1}{r}\begin{vmatrix} f_{ij} & t_{i\mu} & \mathring{E}_{i1} \\ t_{j\nu} & 0 & 0 \\ \mathring{E}_{j1} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$(f_{ij} = F^{2M-1} F_{(M)i\,(M)j})$$

之ヲ用フレバ

$$\bar{r} = \rho^{2M(n-1)+2}\, r, \quad \bar{\mathring{E}}_{i1} = \rho\, \mathring{E}_{i1} + [\cdots\cdots]$$

（$[\cdots\cdots]$ノ項ハ $\mathring{E}_{i\mu}$ $(M \geqq \mu \geqq 2)$ノ一次同次式）

及ビ

$$E_{i\mu} x^{(1)i} = 0, \quad t_{i\mu} x^{(1)i} = 0 \qquad (\mu \geqq 2)$$

$$f_{ij} x^{(1)j} = 0$$

ナル関係ニヨリ容易ニ証明スルコトガ出来ル。

定理1ノ証明

$$E_{i\nu} = F\sum_{\mu=\nu}^{M} \overset{\mu}{A}_{\nu}\, \mathring{E}_{i\mu}$$

$$\mathfrak{E}_{i\nu} = \sum_{\mu=\nu}^{M} \binom{\mu}{\nu}\left(\frac{1}{F}\right)^{(\mu-\nu)} E_{i\mu}$$

ニヨリ

$$\mathfrak{E}_{i\mu} = F\sum_{\lambda=\mu}^{M}\left[\sum_{\nu=\mu}^{\lambda}\binom{\nu}{\mu}\left(\frac{1}{F}\right)^{(\nu-\mu)} \overset{\lambda}{A}_{\nu}\right]\mathring{E}_{i\lambda} = \sum_{\lambda=\mu}^{M} k_{\mu}^{\lambda}\, \mathring{E}_{i\lambda}$$

$$k_{\lambda}^{\lambda} = F^{-\lambda}$$

$$(\mathfrak{E}_{\mu},\ \mathfrak{E}_{\nu}) = \gamma^{ij}\,\mathfrak{E}_{i\mu}\,\mathfrak{E}_{j\nu},\quad (\mathring{E}_{\mu},\ \mathring{E}_{\nu}) = \gamma^{ij}\mathring{E}_{i\mu}\mathring{E}_{j\nu}$$

トオケバ

$(\mathfrak{E}_{M}, \cdots\cdots, \mathfrak{E}_{M-\mu+1})$ 及ビ $(\mathring{E}_{M}, \cdots\cdots, \mathring{E}_{M-\mu+1})$

ノツクルニツノ平行2μ面体ノ体積 $\mathfrak{E}(\mu)$, $E(\mu)$ ハソレゾレ

$$\mathfrak{E}(\mu)^2 = \begin{vmatrix} (\mathfrak{E}_{M},\ \mathfrak{E}_{M}) & \cdots\cdots & (\mathfrak{E}_{M-\mu+1},\ \mathfrak{E}_{M}) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ (\mathfrak{E}_{M-\mu+1},\ \mathfrak{E}_{M}) & & (\mathfrak{E}_{M-\mu+1},\ \mathfrak{E}_{M-\mu+1}) \end{vmatrix}$$

$$= \left|\begin{pmatrix} \mathring{E}_{iM} \\ \vdots \\ \mathring{E}_{iM-\mu+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{ij} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathring{E}_{iM} \\ \vdots \\ \mathring{E}_{iM-\mu+1} \end{pmatrix}'\right|$$

$$E(\mu)^2 = \begin{vmatrix} (\mathring{E}_{M},\ \mathring{E}_{M}) & \cdots\cdots & (\mathring{E}_{M-\mu+1},\ \mathring{E}_{M}) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ (\mathring{E}_{M-\mu+1},\ \mathring{E}_{M}) & \cdots & (\mathring{E}_{M-\mu+1},\ \mathring{E}_{M-\mu+1}) \end{vmatrix}$$

$$= \left| \begin{pmatrix} \overset{\circ}{E}_{iM} \\ \vdots \\ \overset{\circ}{E}_{iM-\mu+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{ij} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overset{\circ}{E}_{iM} \\ \vdots \\ \overset{\circ}{E} \end{pmatrix}' \right|$$

デ與ヘラレル。從ッテ

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{E}_{iM} \\ \vdots \\ \mathfrak{E}_{iM-\mu+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddots & & 0 \\ & h_{\mu}^{\lambda} & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overset{\circ}{E}_{iM} \\ \vdots \\ \overset{\circ}{E}_{iM-\mu+1} \end{pmatrix}$$

ナル關係ニヨリ

$$\mathfrak{E}(\mu)^2 = \begin{vmatrix} \ddots & & 0 \\ & h_{\mu}^{\lambda} & \\ & & \ddots \end{vmatrix}^2 E(\mu)^2 = F^{-2(M+\overline{M-1}+\cdots\cdots+M-\mu+1)} E(\mu)^2$$

或ハ　$E(\mu)^2 = F^{2(M+\overline{M-1}+\cdots\cdots+\overline{M-\mu+1})}\ \mathfrak{E}(\mu)^2$

前ノ *lemma* ニヨリ $\mathfrak{E}(\mu)^2$ ハ重サ $-2M\mu$ ノ共形スカラーデアル。

從ッテ $E(\mu)^2$ ハ重サ $-\mu(\mu-1)$ ノ共形スカラーデアル。ソレガ *intrinsic* ナルコトハ，ソノツクリ方カラ明カデアル。

從ッテ $F \geqq 0$, $\rho \geqq 0$ ナル場合ニ限レバ

$$K(\mu) = \left| E(\mu)^2 \right|^{\frac{+1}{\mu(\mu-1)}}$$

デ定義サレルK(μ)ハ次數 $M+\mu-1$ ノ線素ニマデ *depend* スル重サ -1 ノ *intrinsic* ナ共形スカラーデ，且ツ

$$K(\mu) = \left\{ a_{\mu ij}\, x^{(M+\mu-1)i} x^{(M+\mu-1)j} + 2a_{\mu i}\, x^{(M+\mu-1)i} + a_{\mu} \right\}^{\frac{1}{\mu(\mu-1)}}$$

ノ形デアル。コヽニ $a_{\mu ij}$, $a_{\mu i}$, a_{μ} ハイヅレモ $x, x^{(1)}, \cdots$ $\cdots, x^{(M+\mu-2)}$ ノ函数トスル。

$$t_{iM} = (-1)^M F^{-1} F_{(M)i}$$

$$t_{iM-1} = (-1)^M M\Big[\Big\{F^{-1}F_{(M)i(M)j} - F^{-2}F_{(M)i}F_{(M)j}\Big\}x^{(M+1)j} + h_i(x, \cdots\cdots, x^{(M)})\Big]$$

$$h_i = F^{-1}\sum_{r=0}^{M-1} F_{(M)i(r)j}\, x^{(r+1)j} - F^{-2}F_{(M)i}\sum_{r=0}^{M-1} F_{(r)j}\, x^{(r+1)j}$$

$t_{iM}x^{(1)i} = 0$, $t_{iM-1}x^{(1)i} = 0$, $h_i x^{(1)i} = 0$ 等ヨリ

$$E(2)^2 = F^{-2(2M-1)}\Big[(t_{M}, t_M)(t_{M-1}, t_{M-1}) - (t_M, t_{M-1})^2\Big]$$

$$= F^{-2(M+1)}M^2\Big[(\mathring{E}_M, \mathring{E}_M)\gamma^{ij}\Big\{(f_{ia} - \mathring{E}_{iM}\mathring{E}_{aM})x^{(M+1)a}$$

$$+ H_i\Big\}\Big\{(f_{jb} - \mathring{E}_{jM}\mathring{E}_{bM})x^{(M+1)b} + H_j\Big\}$$

$$-\gamma^{ij}\mathring{E}_{iM}\Big\{(f_{ja} - \mathring{E}_{jM}\mathring{E}_{aM})x^{(M+1)a}$$

$$+ H_j\Big\}\gamma^{kh}\mathring{E}_{kM}\Big\{(f_{hb} - \mathring{E}_{hM}\mathring{E}_{bM})x^{(M+1)b} + H_b\Big\}\Big]$$

$$(H_i = F^{2M}h_i)$$

$$= M^2F^{-2(M+1)}\Big[\Big\{(\mathring{E}_M, \mathring{E}_M)f_{ij} - \mathring{E}_{iM}\mathring{E}_{jM}\Big\}x^{(M+1)i}x^{(M+1)j}$$

$$+ 2\Big\{(\mathring{E}_M, \mathring{E}_M)H_i - (\mathring{E}_M, H)\mathring{E}_{iM}\Big\}x^{(M+1)i}$$

$$+\left\{\left(\mathring{E}_M, \mathring{E}_M\right)(H, H)-\left(\mathring{E}_M, H\right)^2\right\}$$

即チ $\quad K(2)=\left\{a_{ij}x^{(M+1)i}x^{(M+1)j}+2a_i x^{(M+1)i}+a\right\}^{\frac{1}{2}}$

$$\frac{1}{M^2}F^{2(M+1)}a_{ij}=(\mathring{E}_M, \mathring{E}_M)\gamma_{ij}-\mathring{E}_{iM}\mathring{E}_{jM}$$

$$\frac{1}{M^2}F^{2(M+1)}a_i=(\mathring{E}_M, \mathring{E}_M)H_i-(\mathring{E}_M, H)\mathring{E}_{iM}$$

$$\frac{1}{M^2}F^{2(M+1)}a=(\mathring{E}_M, \mathring{E}_M)(H, H)-(\mathring{E}_M, H)^2$$

コヽニ

$$(\mathring{E}_M, H)=\gamma^{ij}\mathring{E}_{iM}H_j$$

$$(H, H)=\gamma^{ij}H_iH_j$$

トスル。

a_{ij}, a_i, a ハ イヅレモ $(x, \cdots\cdots, x^{(M)})$ ノミノ函数デアル。

$$\zeta_i\equiv a_{ij}x^{(M+1)j}+a_i$$

ハ *intrinsic* ナ共変ベクトルデ，且

$$a_{ij}x^{(1)j}=0, \quad a_i x^{(1)i}=0$$

ナル関係ガ成立スル。従ッテ (a_{ij}) ノ *rank* ヲ $n-1$ ト假定スレバ

$$a_{ij}x^{(M+1)j}+a_i=0$$

ハ $x^{(M+1)j}$ ヲ未知數トスル聯立一次方程式ト考ヘタトキニ解ヲモツ。ソノ一ツノ特殊解ヲ

$$x^{(M+1)j} = -H^j$$

トスレバ一般解ハ $p(t)$ ヲ t ノ任意ノ函數トスルトキ

$$x^{(M+1)j} + H^j + p(t)\,x^{(1)j} = 0$$

トナル。從ッテ微分方程式

$$C_i = 0$$

ハ M+1 級 path ノ互ニ projective ナ class ヲ表ハシ，シカモコノ path ハ Eigenschaft Γ ヲモツ。從ッテ之レカラ projective invariant ナ ausgezeichnete System

$$x^{(M+1)j} + h^j = 0$$

ヲ herausziehen スルコトガ出來ル。從ッテ之レカラ次數 M ノ線元素ノ範圍デ conform - affine ナ lineare übertragung ヲ許ケノ空間ニ導入スルコトガ出來ル。

パス系 $C_i = 0$ カラ一般ニ次數 M ノ conformal invariant デ且ツ parameter ノ変換デ F ト同ジ変換ヲウケル量 $\mathcal{F}$ ヲ導キ出スコトガ出來ル。例ヘバ

$$\mathcal{F} = a_{ij} H^i H^j - 2a_i H^i + a$$

之トパス系 $\mathfrak{C}_i = 0$ ヲ用フレバ (I) デ導イタ conform-affine connection ヲ少シ修正シテ次數 M ノ線素マデノ範囲デ接續ヲ決定スルコトガ出來ル。又

$$\sigma = \int_{t_0}^{t} \mathcal{F}(x, \cdots\cdots, x^{(M)})\, dt$$

デ定義サレル σ ハ明ラカニ conformal invariant ナ次數 M ノ河口-Metrik ヲ考ヘル。

定理 2. $M \geqq 3$, $\mathrm{rank}\,(F_{(M)i\,(M)j})$

$$= \mathrm{rank}\left((\overset{\circ}{E}_M, \overset{\circ}{E}_M) f_{ij} - \overset{\circ}{E}_{iM} E_{jM} \right) = n-1$$

ナル如キ河口空間ニ於テ

$$\mathfrak{C}_i \equiv \frac{\partial}{\partial x^{(M+1)i}} \begin{vmatrix} (\overset{\circ}{E}_M, \overset{\circ}{E}_M) & (\overset{\circ}{E}_M, \overset{\circ}{E}_{M-1}) \\ (\overset{\circ}{E}_{M-1}, \overset{\circ}{E}_M) & (\overset{\circ}{E}_{M-1}, \overset{\circ}{E}_{M-1}) \end{vmatrix} = 0$$

ハ次數 0 ノ共形変換デ不変ナル M+1 級 path ノ projektive Klasse ヲ與ヘル。且ツ一般ニ次數 M ノ conformal metric

$$\sigma = \int_{t_0}^{t} \mathcal{F}(x, \cdots\cdots, x^{(M)})\, dt$$

ガ存在スル。

次ノ議論ハ一般ニ次數 α ノ共形変換ニ對シテ成立スル。

$$\gamma = F^{(2M-1)(n-1)+2} F_1$$

トオク．γ ハ重サ $2M(n-1)+2$ ノ共形スカラーデアル。

$$\Gamma = F|\gamma|^{-\frac{1}{2[M(n-1)+1]}}$$

トオケバ，Γ ハ *conformal invariant* ナ相對スカラーデ，*parameter* ノ変換デ F ト同ジ変換ヲスル。

$$\gamma_{i\mu} = E_{i\mu}(\log\gamma)$$

トオク。$\gamma_{i\mu}$ ハ i ニツイテ絶対共変ベクトルデ

$$\gamma_{i\mu} x^{(1)i} = 0 \quad (\mu \geqq 2), \quad \gamma_{i1} x^{(1)i} = -1$$

ナル関係ガ成立スル。而シテ

$$\underset{\mu}{H}^{\lambda} = F^{-1}\sum\binom{\lambda}{\alpha} F^{(\lambda-\alpha)} \underset{\mu}{A}^{\alpha}(F, F^{(1)}, \cdots\cdots F^{(\lambda-\mu)})$$

$$\mathring{\gamma}_{i\mu} = \sum_{\lambda=\mu}^{M} \underset{\mu}{H}^{\lambda} \gamma_{i\lambda}$$

トオケバ，$\mathring{\gamma}_{i\mu}$ ハ *intrinsic* ナ共変ベクトルデ

$$\mathring{\gamma}_{i\mu} x^{(1)i} = 0 \quad (\mu \geqq 2) \quad \mathring{\gamma}_{i1} x^{(1)i} = -F$$

ナル関係ガ成立シ，且ツ共形変換デ

$$\overline{\mathring{\gamma}_{i\mu}} = \rho^{\mu} \mathring{\gamma}_{i\mu} + [*]$$

$$\left([*] \text{ハ } \mathring{\gamma}_{i\mu+1}, \cdots\cdots, \mathring{\gamma}_{iM} \text{ ノ一次同次式}\right)$$

ノ如ク変換スル。

従ツテ

$$\gamma_{ij} = F^{2M-1} F_{(M)i\,(M)j} + \overset{\circ}{\gamma}_{i1}\overset{\circ}{\gamma}_{j1}$$

トオケバ

$$\gamma_{ij}\, x^{(1)j} = -F\overset{\circ}{\gamma}_{i1}, \qquad \gamma_{ij}\, x^{(1)i} x^{(1)j} = F^{2}$$

トナッテ γ_{ij} ヲ基本テンソルトシテ採用スルコトガ出来。

且ツ定理1ト同様ニ次ノ定理3ガ成立スル。

定理3. μ コノ Synge ノベクトル $\overset{\circ}{\gamma}_{iM}, \ldots, \overset{\circ}{\gamma}_{iM-\mu+1}$ ノツクル平行 2μ 面体ノ基本テンソル γ_{ij} ノ意味デノ体積ハ重サ $-\frac{1}{2}\mu(\mu-1)$ ノ共形スカラーデ且ツ intrinsic デアル。

$\overset{\circ}{\gamma}_{iM}, \ldots, \overset{\circ}{\gamma}_{iM-\mu+1}$ ノツクル平行 2μ 面体ノ体積ヲ $\gamma(\mu)$ トスレバ

$$\chi(\mu) = |\gamma(\mu)|^{\mu(\mu-1)}$$

デ定義サレル $\chi(\mu)$ ハ重サ -1 ノ共形スカラーデ、$(x, \ldots, x^{(M+\mu-1)})$ ノ函数デ

$$\chi(\mu) = \left\{ \underset{\mu}{A}_{ij}\, x^{(M+\mu-1)i} x^{(M+\mu-1)j} + 2\underset{\mu}{A}_{i}\, x^{(M+\mu-1)i} + \underset{\mu}{A} \right\}^{\frac{1}{2}\mu(\mu-1)}$$

ノ形デアル。$\underset{\mu}{A}_{ij}$, $\underset{\mu}{A}_{i}$, $\underset{\mu}{A}$ ハ何レモ $(x, \ldots, x^{(M+\mu-2)})$ ノ函数デアル。

特ニ $\mu = 2$ ノ場合ハ

$$\chi(z)=\left\{A_{ij}\,x^{(M+1)i}x^{(M+1)j}+2A_i x^{(M+1)i}+A\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$A_{ij}=r^{-2}\Big[\big((\Gamma_M,\Gamma_M)F^{2(M-1)}g^{ab}\gamma_{(M)a(M)i}\gamma_{(M)b(M)j}$$
$$+F^{2(M-1)}g^{\alpha\beta}g^{ab}\Gamma_{\alpha M}\Gamma_{aM}\gamma_{(M)\beta(M)i}\gamma_{(M)b(M)j}$$

トカヽレ，又

$$A_{ij}x^{(M+1)j}+A_i=0$$

ガ rank $(A_{ij})=n-1$ ノトキニ conformal invariant ナ M+1 級 path ノ projective ナ class ヲ與ヘ，之レカラ次數 M ノ共形變換ニ對シテ不變ナ conformal affine connection ガ定マルコトデアル。又一般ニ次數 M ノ conformal metrik F ガ存在スルコトモ前ト同樣デアル。

定理4. $M\geqq 3$, rank $(F_{(M)i(M)j})=$ rank $(A_{ij})=n-1$ ナル河口空間 F ニ於テ

$$\frac{\partial}{\partial x^{(M+1)i}}\begin{vmatrix}(\mathring{r}_M,\mathring{r}_M) & (\mathring{r}_M,\mathring{r}_{M-1})\\ (\mathring{r}_{M-1},\mathring{r}_M) & (\mathring{r}_{M-1},\mathring{r}_{M-1})\end{vmatrix}=0$$

ニヨリ conformal invariant ナ path ノ projective ナ class ガ定義サレル。

(III) デ次ノ定理ヲ證明シテオイタ。

T ガ重サ l ノ共形 Affinor ナラバ

$$F\mathcal{D}_{\mu}(T, v)$$

$$=\sum_{\nu\geqq\mu}\binom{\nu}{\mu}T_{(\nu)i}\,v^{(\nu-\mu)i}-T\sum_{\nu=\mu}^{\alpha}(-1)^{\nu}\binom{\nu}{\mu}(t_{i\nu}v^{i})^{(\nu-\mu)}$$

ハ次數 α ノ共形變換ニ對シテハ invariant ナ T ト同ジ種類ノ affinor デアルガ次數 $\alpha+1$ 以上ノ共形變換ニ對シテハ invariant デナイ。

之ヲ用ヒテ我々ノ空間ニ一般ノ共形變換ニ對シ不變ナル接續ヲ導入スル。

$$K_{\mu}^{\lambda}=\mathcal{F}^{-1}\sum_{\alpha=\mu}^{\lambda}\binom{\lambda}{\alpha}\mathcal{F}^{(\lambda-\alpha)}A_{\mu}^{\alpha}(\mathcal{F}, \mathcal{F}^{(1)}, \cdots\cdots, \mathcal{F}^{(\alpha-\mu)})$$

$$\Gamma_{i\mu}=\sum_{\lambda=\mu}^{M}K_{\mu}^{\lambda}\gamma_{i\lambda}$$

トオク。

$\Gamma_{i\mu}$ ハ intrinsic ナ共形不變量デ

$$\Gamma_{i\mu}x^{(1)i}=0\ (\mu\geqq 2),\quad \Gamma_{i1}x^{(1)i}=-\mathcal{F}$$

ナル關係ガ成立スル。之レヲ用ヒテ二階對稱ナ tensor

$$g_{ij}=F\mathcal{F}^{2(M-1)}F_{(M)i(M)j}+{}'\Gamma_{i1}{}'\Gamma_{j1}$$

$$'\Gamma_{i1}=\kappa\Gamma_{i1},\quad \kappa=F/\mathcal{F}.$$

ヲツクル。g_{ij} ハ intrinsic デ共形變換 (M−1) 次デ

$$\overline{g}_{ij} = \rho^2 g_{ij}$$

ノ如ク変換シ、且ツ

$$g_{ij} x^{(1)j} = -F\,T_{i1}, \quad g_{ij} x^{(1)i} x^{(1)j} = F^2$$

ナル関係ガ hold スル。但シ T_{i1} ナル Vektor デ M+1 次以上ノ線素ガアラハレタトキニハスベテ path 系

$$A_{ij} x^{(M+1)j} + A_i = 0$$

カラ得ラレル量 $x^{(M+1)j} = -H^j - \varphi x^{(1)j}$ デ置キカヘネバナラナイ。

上ノ式ヲ $\mu = M-1$ トシ、T ノ代リニ $F_{(M)i}$ ヲトリ、$\mathfrak{D}_\mu(T, v)$ ヲ少シク修正シテ次ノ量ヲ得ル。

$$\mathfrak{D}_\mu(F_{(M)i}, v) = F\mathcal{F}^{2(M-1)}\Big[F_{(M)i(M)j}\frac{dv^j}{dt} + \frac{1}{M}\Big\{F_{(M)i(M-1)j} + \Big(\frac{d}{dt}\binom{M}{2}\log\mathcal{F}\Big)F_{(M)i(M)j}\Big\}v^j + (-1)^M\frac{1}{M}F_{(M)i}\,\varepsilon_{jM-1}v^j\Big]$$

$\mathfrak{D}_\mu(F_{(M)i}, v)$ ハ intrinsic ナ共変ベクトルデ、任意ノ conformal invariant, intrinsic ナベクトル v^i ニ対シ次数 M−1 ノ共形変換デ不変デアル。

之レト

$$\varkappa^2 \Gamma_{i1}\left(\Gamma_{j1} v^j\right)^{(1)} = {}'\Gamma_{i2}\, {}'\Gamma_{j1} \frac{dv^j}{dt} + \varkappa^2 \Gamma_{i1} \Gamma_{j1}^{\cdot\cdot(1)} v^j$$

ヨリ次ノ曲線ニ沿フ共変微分ノ式ヲ得ル。

$$\frac{\delta v^i}{dt} = \frac{dv}{dt} + \Gamma_{j}^{\cdot i} v^j$$

$$\Gamma_{j}^{\cdot i} = \frac{1}{M} F \mathcal{F}^{2(M-1)} g^{ia}\Big\{ F_{(M)a(M-1)j} + \binom{M}{2}(\log \mathcal{F})^{(1)} F_{(M)a(M)j}$$

$$+ (-1)^M F_{(M)a}\, \varepsilon_{j\,M-1}\Big\} - \frac{x^{(1)i}}{\mathcal{F}} \Gamma_{j1}$$

$$D_\mu \Gamma_{j}^{\cdot i} = \sum_{\lambda=\mu}^{M} \binom{\lambda}{\mu} \Gamma_{j\ (\lambda)K}^{\cdot i}\, dx^{(\lambda-\mu)K}$$

$$\mathcal{D}_1 \Gamma_{j}^{\cdot i} = \sum_{\lambda=1}^{M} A_1^\lambda D_\lambda \Gamma_{j}^{\cdot i}$$

ヲ用ヒテ

$$\delta v^i = dv^i + \mathcal{D}_1 \Gamma_{j}^{\cdot i} \cdot v^j$$

ナル共変微分ヲ定義出来ル。又次ノ如キ種々ノ共変微分ヲ定義出来ル。

定理5. v^i ガ任意ノ intrinsic, conformal invariant ナル反変ベクトルナラバ

$$\frac{\overset{\mu}{\delta} v^i}{dt^\mu} = \binom{M}{\mu}^{-1} g^{ia}\Big\{\mathcal{F}^{M+\mu-2} F \mathcal{D}_{M-\mu}\left(F_{(M)a\cdot} v\right) + \varkappa^2 \mathcal{F}^{-\mu} \Gamma_{a1}\left(\Gamma_{j1} v^j\right)^{[\mu]}\Big\}$$

$$= \frac{d^\mu v^i}{dt^\mu} + \sum_{r=0}^{\mu-1} \overset{\mu}{\Gamma}{}_{r\,j}^{\cdot i} v^{(r)j}$$

ハ i ニツキ intrinsic デ次数 α ノ共形変換デ不変デアル。コヽニ $[\mu]$ ハ conformal parameter σ ニ関スル微分デ且ツ

$$\binom{M}{\mu}\overset{M-\mu}{\underset{0}{\Gamma}}{}^{i}_{j} = \mathcal{F}^{2(M-1)} F g^{ia}\Big[D_0\big(F_{(M)a}, \underset{\mu}{A}\big) - F_{(M)a}\sum_{\nu=\mu}^{\alpha}(-1)^{\nu}\binom{\nu}{\mu} D_0\big(\overset{\nu-\mu}{A}, \mathcal{E}_{j\nu}\big)\Big] + \frac{x^{(1)i}}{\mathcal{F}} D_0\big(\overset{\mu}{A}, \Gamma_{j1}\big)$$

$$\binom{M}{\mu}\overset{M-\mu}{\underset{\gamma}{\Gamma}}{}^{i}_{j} = \mathcal{F}^{2(M-1)} F g^{ia}\Big[D_\gamma\big(F_{(M)a}, \underset{\mu}{A}\big) - F_{(M)a}\sum_{\nu=\mu}^{\alpha}(-1)^{\nu}\binom{\nu}{\mu} D_\gamma\big(\overset{\nu-\mu}{A}, \mathcal{E}_{i\nu}\big)\Big] + \frac{x^{(1)i}}{\mathcal{F}} D_\gamma\big(\overset{\mu}{A}, \Gamma_{j1}\big)$$

$$(1 \leqq \gamma \leqq \alpha-\mu)$$

$$\binom{M}{\mu}\overset{M-\mu}{\underset{\gamma}{\Gamma}}{}^{i}_{j} = \mathcal{F}^{2(M-1)} F g^{ia} D_\gamma\big(F_{(M)a}, \underset{\mu}{A}\big) + \frac{x^{(1)i}}{\mathcal{F}} D_\gamma\big(\overset{\mu}{A}, \Gamma_{j1}\big)$$

$$(\alpha-\mu+1 \leqq \gamma \leqq M-\mu)$$

$$D_\gamma\big(F_{(M)a}, \underset{\mu}{A}\big) = \sum_{\beta \geqq \gamma}\binom{\beta}{\gamma} F_{(M)a(\beta)j}\, \underset{\mu}{A}{}^{\beta-\gamma}$$

$$D_\gamma\big(\overset{\mu}{A}, \mathcal{E}_{j1}\big) = \sum_{\beta \geqq \gamma}\binom{\beta}{\gamma} \overset{\mu}{A}_{\beta}\, \mathcal{E}_{j1}^{\cdot\cdot(\beta-1)}$$

$$\mathcal{E}_{i1} = \sum_{\lambda=\mu}^{M} K^{\lambda}_{\mu}\, l_{i\lambda}$$

トスル。

次ノ conformal invariant ナ基接續ヲ導入ス

ル。

定理16. T ヲ任意ノ重サ1ノ共形 Affinor トスレバ

$$\overset{\alpha}{\vartheta}_{\mu}(\mathrm{T})=\sum_{\lambda=0}^{M-\mu}\binom{\lambda+\mu}{\mu}\Big[\mathrm{T}_{(\lambda+\mu)i}$$

$$-\mathrm{T}\sum_{\nu=\lambda+\mu}^{\alpha}(-1)^{\nu}\binom{\nu}{\lambda+\mu}t_{i\nu}^{(\nu-\lambda-\mu)}\Big]dx^{(\lambda)i}$$

$$(\mu=1,2,\cdots\cdots M)$$

ナル Pfaffian ハ T ト同種ノ Affinor デ且ツ次数 α ノ共形変換ニ對シテ不変デアル。(次数 $\alpha+1$ 以上ノ共形変換ニ對シテハ不変デナイ)

定理17. T ガ intrinsic ナ重サ1ノ共形 Affinor ナラバ

$$\overset{\alpha}{\vartheta}_{\mu}(\mathrm{T})=\Big[D_{0j}(\mathrm{T},\underset{\mu}{A})-\mathrm{T}\sum_{\nu=\mu}^{\alpha}(-1)^{\nu}\binom{\nu}{\mu}D_{0j}(\overset{\nu-\mu}{A},\varepsilon_{\nu})\Big]dx^{j}$$

$$+\sum_{\gamma=1}^{\alpha-\mu}\Big[D_{\gamma j}(\mathrm{T},\underset{\mu}{A})-\mathrm{T}\sum_{\nu=\mu}^{\alpha}(-1)^{\nu}\binom{\nu}{\mu}D_{\gamma j}(\overset{\nu-\mu}{A},\varepsilon_{\nu})\Big]dx^{(\gamma)j}$$

$$+\sum_{\gamma=\alpha-\mu+1}^{M-\mu}D_{\gamma j}(\mathrm{T},\underset{\mu}{A})dx^{(\gamma)j}$$

ハ T ト同種ノ共形 Affinor デ且ツ parameter ノ変換:

$$\bar{t}=\bar{t}(t):\quad x^{(\bar{\mu})i}=a_{\nu}^{\mu}x^{(\nu)i},$$

$$dx^{(\mu)i} = a^{\mu}_{\nu} dx^{(\nu)i} + a^{\mu}_{\nu\omega} dt^{(\overline{\omega})} x^{(\nu)i}$$

ニ對シテ不變デアル。コヽニ

$$D_{\gamma i}(\mathrm{T}, \underset{\mu}{\mathrm{A}}) = \sum_{\beta=\gamma+\mu}^{M} \binom{\beta}{\gamma} \underset{\mu}{\mathrm{T}}_{(\beta)i} \underset{\mu}{\mathrm{A}}^{\beta-\gamma}$$

$$D_{\gamma i}(\overset{\mu}{\mathrm{A}}, \mathcal{E}_{\nu}) = \sum_{\beta=\gamma}^{\mu} \binom{\beta}{\gamma} \mathrm{A}_{\beta} \mathcal{E}_{i\nu}^{\cdot\cdot(\beta-\gamma)}$$

Tノ所ヘ $\mathrm{F}_{(M)i}$ ヲ入レテ，次ノ接續ヲ得ル。

$$\mathrm{F}.\mathcal{F}^{2(M-1)} g^{ij} \delta \mathrm{F}_{(M)j} = \delta x^{(M)i}$$

$$= \left(\delta^{i}_{j} - \frac{x^{(1)i}}{\mathcal{F}} \Gamma_{j1}\right) dx^{(M)j} + \sum_{p=0}^{M-1} \overset{p}{\underset{M}{\Lambda}}{}^{i}_{j} dx^{(p)j}$$

$$\binom{M}{\mu}^{-1} \mathrm{F}^{-(M-\mu-1)} \mathcal{F}^{2(M-1)} g^{ij} \overset{\alpha}{\vartheta}_{M-\mu}(\mathrm{F}_{(M)j}) = \delta x^{(\mu)i}$$

$$= \left(\delta^{i}_{j} - \frac{x^{(1)i}}{\mathcal{F}} \Gamma_{j1}\right) dx^{(\mu)j} + \sum_{p=0}^{\mu-1} \overset{p}{\underset{\mu}{\Lambda}}{}^{i}_{j} dx^{(p)j}$$

之ハ次數 α ノ共形變換ニ對シ不變デアル。