1149. 可解群ニ関スル一注意

岩澤　健吉（東大）

1. 群 $\mathfrak{G}=\mathfrak{G}_1$ ノ交換子群ヲ $\mathfrak{G}'=\mathfrak{G}_2$，$\mathfrak{G}_2$ ノ交換子群ヲ $\mathfrak{G}_2'=\mathfrak{G}''=\mathfrak{G}_3$，……　一般ニ $\mathfrak{G}_n$ ノ交換子群ヲ $\mathfrak{G}_n'=\mathfrak{G}_{n+1}$ トシマス。コノトキ適當ナ n ニ對シ

$$\mathfrak{G}_n=1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

トナルナラバ始メノ群 $\mathfrak{G}$ ヲ可解 (auflösbar) ト云フコトハ有限群論デ周知ノ通リデアリマスガ，我々ハ以下 $\mathfrak{G}$ ガ無限群ノ場合ニモ條件 (1) ヲ以テ可解ノ定義トスルコトニシマス。[1)]

サテ，以上ハ一般ノ abstract ナ群ニツイテノ話デアリマスガ今度ハ $\mathfrak{G}$ ガ位相群デアル場合ヲ考ヘテ見マス。$\mathfrak{G}$ ノ交換子群 $\mathfrak{G}_2$ ハ abstract ナ意味デハ確カニ $\mathfrak{G}$ ノ部分群デアリマスガ位相ヲ考ヘニ入レルト必ズシモ $\mathfrak{G}$ ニ於テ閉ヂテ居マセン。（ソノ例ハ後ニ示ス）ヨッテ位相群トシテノ $\mathfrak{G}$ ノ交換子群トシテハ $\mathfrak{G}_2$ ノ closure $\overline{\mathfrak{G}_2}=\mathfrak{G}_2^*$ ヲトルコトガ適當ト思ハレマス。實際 $\mathfrak{G}_2^*$ ハ $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ ガ abel 群デアル様ナ $\mathfrak{G}$ ノ閉ヂタ不變部分群 $\mathfrak{N}$ ノウチデ最小ノモノトナリマス。

ヨッテ $\mathfrak{G}=\mathfrak{G}_1^*$，$\mathfrak{G}_1^*$ ノ位相的交換子群ヲ $\mathfrak{G}_2^*$，$\mathfrak{G}_2^*$ ノ位相的交換子群ヲ $\mathfrak{G}_3^*$，……　一般ニ $\mathfrak{G}_n^*$ ノ位相的交換子群ヲ $\mathfrak{G}_{n+1}^*$ トオクコトニシ，(1) ト同様ニ適當ナ n ニ對シ

$$\mathfrak{G}_n^* = 1 \text{ .... (2)}$$

ガ成立スルトキ $\mathfrak{G}$ ヲ位相的ニ可解ト呼ブコトニシマス。ソシテ (1) ノ場合ハコレニ對シ代數的ニ可解ト特ニ斷ハルコトニシマス。

サテ次ノ定理ガ成立チマス。

定理1. 位相群 $\mathfrak{G}$ ガ代數的ニ可解デアルコトト位相的ニ可解デアルコトトハ同等デアル。シカモ (1), (2) ハ同ジ n ニ対シ同時ニ成立スル。

コレヲ証明スルタメニ一般ニ次ノ補助定理ヲ述べテオキマス。

補助定理1. $\mathfrak{H}$ ヲ位相群 $\mathfrak{G}$ ノ必ズシモ閉ヂテヰナイ部分群トシ $\overline{\mathfrak{H}}$ ヲソノ closure トスル。$\mathfrak{H}$ ノ代數的交換子群列ヲ $\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{H}, \mathfrak{H}_2, \mathfrak{H}_3, \text{-----}$ トシ, 又 $\overline{\mathfrak{H}}$ ノ位相的交換子群列ヲ $\mathfrak{H}_1^* = \overline{\mathfrak{H}}, \mathfrak{H}_2^*, \mathfrak{H}_3^*, \text{-----}$ トスレバ

$$\overline{\mathfrak{H}_n} = \mathfrak{H}_n^* \quad (n = 1, 2, \text{------}) \text{ ...... (3)}$$

証明. $n = 1$ ナルトキ

$$\overline{\mathfrak{H}_1} = \overline{\mathfrak{H}} = \mathfrak{H}_1^*$$

ハ定義ニヨリ成立スルカラ n ニ關シ帰納法ヲ用ヒルコトトシ

$$\overline{\mathfrak{H}_{n-1}} = \mathfrak{H}_{n-1}^* \text{ .... (4)}$$

ヲ假定シテ (3) ヲ証明スルコトニシマス。定義ニヨリ

$$\mathfrak{H}_n = [\mathfrak{H}_{n-1}, \mathfrak{H}_{n-1}], \quad \mathfrak{H}_n^* = \overline{[\mathfrak{H}_{n-1}^*, \mathfrak{H}_{n-1}^*]}^{\,2)}$$

(4) ニヨリ $\mathfrak{H}_{n-1} \subseteq \mathfrak{H}_{n-1}^*$, 故ニ $\mathfrak{H}_n \subseteq [\mathfrak{H}_{n-1}^*, \mathfrak{H}_{n-1}^*]$, コレカラ closure ヲトレバ $\overline{\mathfrak{H}_n} \subseteq \mathfrak{H}_n^*$. 又一方 $\mathfrak{H}_{n-1}/\mathfrak{H}_n$

ガ abel 群デアルコトカラ容易ニ $\bar{\mathfrak{h}}_{n-1}/\bar{\mathfrak{h}}_n$ ガ abel 群デアルコトガワカリマスカラ

$[\bar{\mathfrak{h}}_{n-1}, \bar{\mathfrak{h}}_{n-1}] \subseteq \bar{\mathfrak{h}}_n$, 即チ $[\mathfrak{h}^*_{n-1}, \mathfrak{h}^*_{n-1}] \subseteq \bar{\mathfrak{h}}_n$ closure ヲトレバ $\mathfrak{h}^*_n \subseteq \bar{\mathfrak{h}}_n$, ヨッテ (3) ガ証明サレマシタ。

特ニ $\mathfrak{h} = \mathfrak{G}$ トスレバ定理 1 ヲ得マスガ特別ナ場合トシテ又次ノ定理ガ得ラレマス。

定理 2. $\mathfrak{h}$ ヲ位相群 $\mathfrak{G}$ ノ稠密ナ部分群トスレバ $\mathfrak{h}$ ガ代数的ニ可解デアルトキ $\mathfrak{G}$ ハ又位相的ニ（又代数的ニ）可解デアル。

2. 上ノ定理ノ應用ヲ述ベテ見マス。ソノタメニ先ヅ

補助定理 2. compact (bicompact) connected ナ可解群[3] ハ abel 群デアル。

証明. ソノ様ナ群 $\mathfrak{G}$ ガ abel 群デナイト假定シ $ab \neq ba$ ナル元 a, b ヲトリマス。$\mathfrak{G}$ ノ適當ナ連續有界表現 D ヲトレバ $D(aba^{-1}b^{-1}) \neq E$, 即チ $D(a)D(b) \neq D(b)D(a)$ トナリマスカラ表現サレタ群 $D(\mathfrak{G})$ モ亦 abel 群デハアリマセン. サテ一方 $D(\mathfrak{G})$ ハ compact connected ナ Lie 群デスカラ local ニハ ソレハ abel 群ト非 abel 單純群トノ直積デアルワケデスガ今ノ場合 $\mathfrak{G}$ ハ（位相的ニ）可解デスカラ非 abel 群ノ部分ハ存在シマセン。即チ $D(\mathfrak{G})$ ハ local ニハ abelian デアリマスガ, ソレハ connected ナル故全体トシテモ

abel 群トナリマス。コレハ明カニ $D(a)D(b) \neq D(a)D(b)$ ニ矛盾シマス。

コレヲ用ヒテ

定理3. $\mathfrak{G}$ ヲ十分多クノ概週期函數ヲ有スル可解群トスル。但シ $\mathfrak{G}$ ニ位相ハ假定シナイ。$\mathfrak{G}$ ニ於テ指數 $[\mathfrak{G}:\mathfrak{N}]$ ガ有限デアルヤウナ凡テノ不変部分群 $\mathfrak{N}$ ノ共通部分群ヲ $\mathfrak{N}_0$ トスレバ $\mathfrak{N}_0$ ハ abel 群デアル。

證明. 概週期函數ヲ用ヒテ $\mathfrak{G}$ ヲ閉ヂテ bicompact ナ位相群 $\overline{\mathfrak{G}}$ ヲツクレバ $\mathfrak{G}$ ハ $\overline{\mathfrak{G}}$ ニ於テ稠密ナ部分群トナリマス。コゝデ定理2ヲ用ヒレバ $\overline{\mathfrak{G}}$ モ亦可解群デアルコトガ知ラレマス。$\overline{\mathfrak{G}}$ ノ單位元ヲ含ム connected ナ component ヲ $\mathfrak{N}^*$ トスレバ $\mathfrak{N}^*$ ハ明カニ connected bicompact ナ可解群, ヨッテ補助定理ニヨリ abel 群デアリマス。一方 $\overline{\mathfrak{G}}/\mathfrak{N}^*$ ハ 0-次元群ナル故 $\mathfrak{N}_0 \subseteq \mathfrak{N}^*$. ヨッテ證明サレマシタ。

上ノ定理ノ逆ヲ考ヘテ見マスト可解ナ群 $\mathfrak{G}$ デ上ノ如クニシテ作ッタ $\mathfrak{N}_0$ ガ abel 群デアルヤウナモノデアッテモ必ズシモ十分多クノ概週期函數ヲ有シテヰルトハ限リマセン。例ヘバ有理數 a, b, c ニヨリツクラレタ

$$\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} \qquad a \neq 0,\ b \neq 0$$

ノ如キ形ノ行列全体ノツクル群ハソノ一例デアリマス。

3. 最後ニ代數的交換子群 $\mathfrak{G}_2 = \mathfrak{G}'$ ト位相的交換子群 $\mathfrak{G}_2^* = \overline{\mathfrak{G}'}$ ガ一致シナイ例ヲ一ツ擧ゲテオキマス。

有理數全体ノ加法群ヲ$\mathfrak{R}_0$, 實數全体ノ加法群ヲ$\mathfrak{R}_1$トシ$\mathfrak{R}_0$ト$\mathfrak{R}_1$トノ直和(直積)ヲ$\mathfrak{N}$トシマス。

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{R}_0 + \mathfrak{R}_1$$

$\mathfrak{N}$ノ元ヲ一般ニ

$$A = (a, \gamma) \qquad a \in \mathfrak{R}_0, \ \gamma \in \mathfrak{R}_1$$

トカクトキ$\mathfrak{N}$ノ自己同型σヲ

$$A^\sigma = (a, \gamma + a)$$

ニヨリ定義シ$\mathfrak{N}$ヲσカラ生成サレル自由環狀群$\{\sigma^n\}$ニヨッテ拡大シタ群ヲ$\mathfrak{G}$トシマス。

$$\mathfrak{G} = \{\mathfrak{N}, \sigma\}$$

サテ, $\mathfrak{R}_0$, $\mathfrak{R}_1$ニ普通ノ位相ヲ入レレバσハ連續ナ自己同型ナル故, コレヲ拡張シテ$\mathfrak{G}$ニ位相ヲ導入スルコトが出來マス。(但シ$\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ハ*discrete*トナル)。$\mathfrak{G}$ノ代數的交換子群ヲツクルト容易ニ面ヲレル様ニソレハ

$$\{(0, a), \quad a: \text{有理數}\}$$

ナル形ノ元全体トナリ, ソノ closure

$$\{(0, \gamma), \quad \gamma: \text{實數}\}$$

ハ異ルコトがワカリマス。

脚註1) コノ様ナ可解ノ定義ハ無限群ノ場合ニハ條件が強スギルヌタデアリマス。實際, R. Baer 其ノ他, ソヴィエットノ學者達ハモット拡張シタ意味ニ可解ト云フ言葉ヲ用ヒテ居マス。

2) [,] ハ交換子群ヲ示ス。

脚註3)　定理1ニヨリ代数的ニ可解デアリ同時ニ位相的ニ
可解デアリマス。