1154 Locally compact abelian group トソノ character-group ニツイテ

丸山 滋彌（阪大）

1) van Kampen ノ annal. of math. vol. 36 ニアル標記ノ論文ガ稍々簡単ニ過ギルノデ，ソノ註釋ノヤウナコトデスガ、以下ニ述ベテ見マス。尚ホ，コノ"ノート"ハ小生ノ角谷先生ノ下デノセミナリイノ原稿デ、先生及ビ安西君カラ色々援助シテ戴イテ出来タモノデアリマス。

2) 以下ニ屡々用ヒル同型定理ヲ二ツ述ベテ置キマス。

1. G ヲ topological group H 及ビ N ヲソノ normal subgroup デ且 $H \supset N$ トスル。

$$G/H \cong (G/N)/(H/N)$$

2. $G=E\oplus F$ ($\oplus$ ハ direct sum) トスレバ

$$G/E\cong F$$

3) G ヲ locally compact, connected, abelian group トスル. 其時 free, discrete デ有限階ノ subgroup H ガ存在シテ G/H ガ compact ニナル.

コノ証明ハ第二可附番公理ガ假定サレテヰナイタメ少シ複雜ニナルガ、結局 Kampen ノト同様ナコトヲ適當ニ改メテ行ヘバヨイ。

4) compact abelian group G ハ任意ニ小ナル subgroup H デ G/H ガ有限次元 s ナル Torus K^s ト有限群 E トノ直和 $K^s\oplus E$ トナルヤウナモノヲ有スル。

コレハ Kampen ソノ儘

5) G ヲ locally compact abelian group, G_0 ヲソノ component トスル。若シ G/G_0 ガ compact ナラ, G ハ一意ニ定マル最大ノ compact ナ部分群 R ヲ有シ, $G=T\oplus R$. T ハ有限次元ノ vector 群デアル.

証明) 3), 4) ニヨリ Kampen ノト同様ニ G ハ free, discrete ナ subgroup H ト任意ニ小ナル部分群 D デ且 $G/(H\oplus D)=K^s\oplus E$ K^s ハ s-次元ノ Torus, E ハ有限群トナル様ナ H, D ガアル。從ッテ Pontrjagin, Topological groups §35, B) ト同様ニシテ $G/D=T'\oplus R'$, T' ハ vector 群, R' ハ compact 群トナル。今 $G\to G/D$ ナル natural homomorphic mapping ヲ f トスレバ, D ハ compact トシテヨイカラ $R=f^{-1}(R')$ ハ compact デ

且ツ $G/R=T'$ デアルカラ R ハ G ノ maximal compact ナ部分群デアル。$S=f^{-1}(T')$ トオケバ

i) $S\supset H$

ii) S/H ハ compact （i), ii) ハ T' ノ作リ方カラ判ル）

iii) $[S,R]=G$

ヲ満足スル。

$\mathfrak{r}$ ヲ上ノ i), ii), iii) ヲ満足スルヤウナ G ノ部分群ノ全体トスレバ，$\mathfrak{r}$ ガ空集合デナイコトガ判ッタ。$\mathfrak{r}$ ノ element S, S' ヲ $S\supset S'$ ナル関係デ順序ヲツケ $\mathfrak{r}$ ヲ partially ordered set トスル。$\mathfrak{r}$ ノ任意ノ descending chain $\mathfrak{r}': S_1'\supset S_2'\supset\cdots\cdots\supset S_\alpha'\supset\cdots\cdots$ ヲトレバ $S_0'=\bigcap_{S_\alpha'\in\mathfrak{r}'} S_\alpha'$ ニ對シテ i), ii) ノ條件ガ成立スルコトハ明カデアル。iii) ニ關シテモ、ソレハ成立スル。ソレヲ示スニハ與ヘラレヌ $g\in G$ ト任意ノ $S_\alpha'\in\mathfrak{r}'$ ニ對シテ $E_\alpha^{(g)}$ ヲ

$$E_\alpha^{(g)}=\{r_\alpha / g=r_\alpha+g_\alpha',\ r_\alpha\in R,\ g_\alpha'\in S_\alpha'\}$$

ト定義スレバ $\{E_\alpha^{(g)}|\alpha\}$ ハ finite intersection property ヲ有シ，且ツ $E_\alpha^{(g)}\subset R$ デ $E_\alpha^{(g)}$ ハ皆閉集合デアルカラ

$$r\in\bigcap_{E_\alpha^{(g)}} E_\alpha^{(g)}\subset R$$

ナル r ガアル。$g-r\in g-E_\alpha^{(g)}\subset S_\alpha'$ ガ任意ノ $S_\alpha'\in\mathfrak{r}'$ ニ

對シテ成立スルカラ $g-\gamma\in S_0'$ 即チ $G=[S_0', G]$
故ニ γ ハ極小ナ element ヲ有スル。ソノ一ツヲ S_0 トスルト S_0/H ハ compact デアル カラ、S_0 ノ部分群 D_0 デ D_0 ハ任意ニ小サク取レテ且ツ $H\cap D_0=\{0\}$, $S_0/D_0=T\oplus M$ トナル D_0 ガアル。コヽニ T ハ有限次元ノ vector 群、M ハ compact ナ群デアル。（モウ一度 Pontrjagin ノ §35 B) ノ方法デ）. T ノ S_0 ニオケル原像ヲ T_0 トスレバ T_0 ハ明カニ i), ii) ヲ満足スル。iii) ニ關シテハ D_0 ハ compact ト假定シテヨイカラ M ノ S_0 ニオケル原像 M_0 ハ compact デ從ッテ $M_0\subset R$. 故ニ

$$[T_0, R]=[T_0, M_0, R]=[S_0 R]=G$$

S_0 ハ極小ナ γ ノ element ナルコトヨリ $T_0=S_0$ 即チ $S_0/D_0=T_0/D_0=T$. コレハ D_0 ガ S_0 ノ maximal compact ナ部分群デアルコトヲ示シテヰル。ソレハ一意的ニ定マルモノデアルカラ、D_0 ヲ任意ニ小ナルモノニ取レルコトヨリ $D_0=\{0\}$ 即チ $S_0=T$ ハ vector 群デ、從ッテ $S_0\cap R=\{0\}$, iii) ニヨリ

$$G=T\oplus R$$

b) 構造定理. G ヲ locally compact ナ abel 群トスレバ $G=T\oplus P$ コヽニ T ハ vector 群、又 P ハ P/Q ガ discrete ニナルヤウナ compact 部分群 Q ヲ有スルヤウナ群デアル。

証明) a) G_0 ヲ G ノ component トスレバ G/G_0 ハ totally disconnected デアルカラアル compact ナ部

分群 H/G_0 ガアッテ $(G/G_0)/(H/G_0)=G/H$ ガ discrete トナル。ヨッテ H ノ component H_0 ハ G_0 ト一致スル。H/H_0 ガ compact デアルカラ 5) ニヨリ $H=T\oplus R$, T ハ vector 群, R ハ compact 群, ヨッテ $G/(T\oplus R)=D$ ハ discrete.

b) F ヲ G ノスベテノ compact ナ部分群 R_λ ノ和集合 $F=\bigcup_\lambda R_\lambda$ トスレバ $\overline{F}$ ハ G ノ部分群デ $\overline{F}\supset R$ デアル。H ハ G ノ開部分群デアルカラ $\overline{F}\cap H\subseteq\overline{F\cap H}$ 又 $F\cap H=(\bigcup_\lambda R_\lambda)\cap H\subset\bigcup_\lambda(R_\lambda\cap H)$ H ノ maximal compact ナ部分群ガ R デアルカラスベテノ λ ニツイテ $R_\lambda\cap H\subset R$. 故ニ $\overline{F}\cap H\subset\overline{F\cap H}\subset R$. ヨッテ $T\subset H$ ヨリ $\overline{F}\cap T\subset\overline{F}\cap H\cap T\subset R\cap T=\{0\}$ 即チ $[T,\overline{F}]$ ハ直和 $T\oplus\overline{F}$ デアル。$T\oplus\overline{F}\supset T\oplus R=H$ デアルカラ $T\oplus\overline{F}$ ハ開イタ部分群即チ $T\oplus\overline{F}$ ハ確カニ G ノ部分群デアル。

c) $F=\overline{F}$ ヲ証明スル。$G\to G/(T\oplus R)=D$ ナル natural homomorphic mapping ヲ f トスレバ D ハ discrete デアルカラ $\overline{f(F)}=f(F)$. 故ニ $f(\overline{F})\subset\overline{f(F)}=f(F)$. ヨッテ任意ノ $a\in\overline{F}$ ナル a ヲトルト $f(a)\in f(F)$ 即チ $f(a)=f(b)$, $b\in F$ ナル b ガ存在スル。F ノ定義ヨリ $b\in R_\lambda$ ナル λ ガアルカラ $f(b)\in f(R_\lambda)$ デアルガソノ $f(R_\lambda)$ ハ compact discrete 即チ有限群デアル。ヨッテテアル整数 n ヲトルト

$$0=nf(b)=nf(a)=f(na)$$

即チ $na\in T\oplus R$ ヨッテ $na=t+r$, $t\in T$, $r\in R$ トスル

ト $n \in R \subset \overline{F}$ ナル故 $t = na - n \in \overline{F} \cap T = \{0\}$ 故ニ $na \in R$. コレハ $\overline{F}/R$ ガ infinite order ノ element ヲ有タヌコトヲ示ス。従ッテ任意ノ $\overline{F}$ ノ element a ヲ取ルトaノ $\overline{F}/R$ ヘノ image ハ有限群ヲ成生シソノ群ノ $\overline{F}$ ヘノ原像ハ a ヲ含ム compact ナ群デアル。ヨッテ $F = \overline{F}$.

d) $G' = G/(T \oplus F)$ ハ finite order ノ element ヲ有タナイ。

何トナレバ $G \to G'$ ナル natural homomorphic mapping ヲ h トスルトキ若シアルGノ element g ニ対シ $h(g)$ ガ order m ヲ有テバ $h(m, g) = 0$, $mg \in T \oplus F$.

$$mg = t + f, \quad t \in T, \quad f \in F$$

トスレバ $\frac{1}{m} \cdot t \in T$ デアルカラ $d = g - \frac{1}{m} \cdot t$ ニ対シテ $md \in F$ c) ニヨリ F/R ガ finite order ノ element バカリデアルカラ適當ナ整数 n ヲトレバ $nmd \in R$. ヨッテ d トRトカラ成生サレル群ハ compact トナル。従ッテソレハFニ含マレルカラ $d \in F$. 即チ $g = \frac{1}{m} \cdot t \in T$ トナリ始メカラ $h(g) = 0$ デアル。

e) $G'' = G/F$ トスレバ G'' ハTト同型ナ群 T' ヲ含ミ $G''/T' = G'$ デアル。G' ハ d) ニヨリ finite order ノ element ヲ含マナイカラ G' ノ中ニ $\{S'_\alpha | \alpha\}$ ナル集合ヲ作ッテ任意ノ $g' \in G'$ ナル element ヲ取ッタトキ唯一通リニ k, k_{α_i} $i = 1, 2, \cdots\cdots, n$ ナル有限ケノ 0 デナイ整数ガ定マッテ

$$k \cdot g' = \sum_{i=1}^{n} k_{\alpha_i} S'_{\alpha_i}$$

テルヤウニスルコトガ出來ル. $G'' \to G'$ ナル natural homomorphic mapping ヲ l トシテ $l^{-1}(S'_\alpha)$ ノ中ニ任意ノ element S''_α ヲ取ル。$g'' \in G$, $g'' \in l^{-1}(g')$ ナラバ

$$k \cdot g'' - \sum_{i=1}^{r} k_{\alpha_i} S''_{\alpha_i} \in T'$$

デアルカラ $t'' \in T'$ ヲ適當ニトレバ $kt'' = kg'' - \sum_{i=1}^{r} k_{\alpha_i} S''_{\alpha_i}$ コノ t'' ニ對シテ $g''_0 = g'' - t''$ トスレバ $g''_0 \in l^{-1}(g')$ 且ツ $kg''_0 = \sum_{i=1}^{r} k_{\alpha_i} S''_{\alpha}$.

コノ樣ニ $kg' = \sum_{i=1}^{r} k_{\alpha_i} S'_{\alpha_i}$ トル關係ニ對シテ必ズ g' ノ原像ノ中ニ $kg'' = \sum_{i=1}^{r} k_{\alpha_i} S''_{\alpha_i}$ ナル關係ヲ滿足スル g'' ガアル。g' ヲ G' 全体ニ亘ラセルトキ現ハレルカヽル g'' ノ全体ヲ E' トスレバ $E' \cong G'$ (G' ハ discrete デアル) 且ツ $G'' = T' \oplus E'$ 群 $E' \subset G'' = G/F$ ノ G ヘノ原像ヲ P トスレバ $P \frown T = F \frown T = \{0\}$ デアルカラ $G = P \oplus T$, $P = G/T$ ナル故 Q ヲ R ノ P ヘノ像トスレバ Q ハ compact デ且ツ $P/Q = (G/T)/Q = G/(T \oplus R) = D$ ハ discrete.

7) G ヲ locally compact abel 群トスル。若シアル compact ナ部分群 B ガアッテ $G/B = D$ ガ discrete ナラバ G ニ對シテハ duality theorem ガ成立スル。

a) G^{**} ヲ G ノ character group G^* ノ character group トスル。G^{**} ハ [topology ナシデ考ヘル時ハ] G ヲ部分群トシテ含ム。即チ任意ノ 0 デナイ $g \in G$ ニ對シテ $g^* \in G^*$ ガ存在シテ $(g^*, g) \neq 0$ デアル. 何トナレバ $g \in B$ ナラバ compact 群ノ双對定理ニヨリ $g'^* \in B^*$ ガ存

在シテ $(g'^{*}, g) \neq 0$ デアル。

$G/B=D$ ガ *discrete* デアルカラ g'^{*} ヲ G 全体ニ拡張スルコトガ出来ル。（Kampen Lemma 2）ソノ拡張ノーツヲ g^{*} トスレバ $(g^{*}, g) \neq 0$. 又 $g \notin B$ ナラバ g ノ $G/B=D$ ニオケル像 $\bar{g}$ ハ $\bar{0}$ デナイ。故ニ D^{*} ヲ $\bar{g}^{*}$ ナル $\bar{g}^{*}$ ガアッテ $(\bar{g}^{*}\bar{g}) \neq 0$. 然ルニ $\bar{g}^{*}$ ハ G^{*} ノ element g^{*} ト考ヘラレルカラ $(g^{*}, g) \neq 0$.

b) $B^{*}=G^{*}/(G^{*}, B)$ コレガ代数的ニ（位相ヲ考ヘズニ）成立スルコトハ明カ。今 ε ヲ充分小ニトリ G^{*} ノ近傍 V^{*} ヲ

$$V^{*}=\{g^{*}/g^{*}\in G^{*}|(g^{*}, B)|<\varepsilon\}$$

ト定義スレバ $V^{*}=(G^{*}, B)$ トナル。ヨッテ $B^{*} \cong G^{*}/(G^{*}, B)$ モ discrete ナ位相ヲ有スルカラ位相群トシテモ成立スル。

c) $D^{*}=(G/B)^{*}=(G^{*}, B)$ コレモ代数的ニハ明カデアル。位相ガ一致スルコトハ D^{*} ガ compact デアルカラ上ノ D^{*} カラ (G^{*}, B) ヘノ對應ガ連續ナラバヨイ。今 $\bar{g}^{*}\in(G/B)^{*}$ ガ定義スル (G^{*}, B) ノ element ヲ g^{*} トスレバ $\bar{g}^{*}\rightarrow g^{*}$ ガ上ノ對應デアル。G^{*} ノ近傍 V^{*} ガアル G ノ compact ナ集合 C ト正数 ε トデ

$$V^{*}=(g^{*}/g^{*}\in G^{*}, |(g^{*}, C)|<\varepsilon)$$

デ與ヘラレテヰルトキ，C ノ G/B ヘノ像ハ compact, discrete ナル故有限集合 $\{\bar{C}_1, \cdots\cdots \bar{C}_m\}$ デアル。ヨッテ D^{*} ノ近傍

$$\{\bar{g}^* / \bar{g}^* \in D^*, |(\bar{g}^*, c_i)| < \varepsilon\}$$

ノ中ニアル D^* ノ element $\bar{g}^*$ ハ $V^* \cap (G^*, B)$ 内ノ g^* ニ對應スル。コレデ對應ノ連續性ガ示サレタ。

d) b), c) ニヨリ $B^* = G^*/(G^*, B) = G^*/D^*$ B^* ハ discrete, D^* ハ compact ダカラ再ビ $D^{**} = G^{**}/B^{**}$ $D^{**} = D$, $B^{**} = B$ デアルカラ $D = G^{**}/B = G/B$

然ルニ a) ニヨリ代數的ニ $G^{**} \supset G$。コレヨリ $G^{**} = G$ ガ代數的ニ成立スル。何トナレバ $g^{**} \in G^{**}$ ノ D ヘノ像ハアル $g \in G$ ノ D ヘノ像ト一致スル。ヨッテ $g^{**} \in g + B \subset G$.

最後ニ B ハ G 及ビ G^{**} 両方ノ開イタ部分群デアル。ヨッテ G, G^{**} ノ位相ハ單位元ノ近傍デ、從ッテ全体デ一致シテヰル。

g) 双對定理. G ヲ locally compact ナ abel 群トスルトキ G ノ character 群ノ character 群 G^{**} ハ G ト topologically isomorph デアル。

証明) 構造定理 b) ニヨリ $G = T \oplus P$ ナル型ヲ有スル。f) ニヨリ $P^{**} = P$. 又 $T^{**} = T$ ハ明カデアルカラ

$$G^{**} = T^{**} \oplus P^{**} = T \oplus P = G$$