$\boxed{1163}$ Gauss型確率變數系ニ就テ

伊藤　清（名大）

§1. (Ω, P) ヲ確率空間トスルトキ, (Ω, P) ノ上ノ實確率變數デ有限ノ二次ノ moment ヲ持ツモノ全体ハ $L^2(\Omega, P)$ デアル。今 $\mathfrak{M}$ $(\subseteq L^2(\Omega, P))$ ノ中カラ作ッタ任意ノ一次結合ガ Gauss 分布ニ從フトキニ, $\mathfrak{M}$ ヲ Gauss 型（又ハ簡單ニ G 型）トイフコトニスル。明ラカニ

定理1 $\mathfrak{M}$ ノ各元ガ Gauss 分布ニ從ヒ、且ツ独立ナル時ニハ, $\mathfrak{M}$ ハ G 型ナリ。

定理2 $\mathfrak{M}$ ガ G 型ナラバ, $L(\mathfrak{M})$（$\mathfrak{M}$ ノ張ル線型集合体）及ビ $\overline{\mathfrak{M}}$（$\mathfrak{M}$ ノ閉核）ハ共ニ G 型ナリ。

定理3 $\mathfrak{M}$ ガ G 型ナルタメノ必要且ツ充分ナル條件ハ

(1) $x_1, x_2, \cdots\cdots x_n \in L(\mathfrak{M})$,

$$\gamma(x_i, x_j) = 0 \quad (i \neq j)$$

ナラバ必ズ $\{x_1, x_2, \cdots\cdots x_n\}$ ⫫ トナルコトナリ。

茲ニ γ ハ相関係數ヲアラハシ ⫫ ハ独立ヲ示ス。

（証明）1. 必要性. $\mathfrak{M}$ ガ G 型ナルコトカラ, (1) ノ $x_1, x_2, \cdots\cdots x_n$ ガ独立ナルコトヲイフ。ソレニハ任意ノ實數 $t_1, t_2, \cdots\cdots t_n$ ニ對シテ

$$(2) \quad m\left(e^{i(t_1 x_1 + \cdots\cdots + t_n x_n)}\right) = \prod_k m\left(e^{i t_k x_k}\right)$$

ナルコトガイヘレバヨイ。$\mathfrak{M}$ガG型ナル故，$\sum t_k x_k$ハ Gauss 分布ニ從ヒ，ソノ平均値ハ$\sum t_k m(x_k)$

標準偏差ハ$\displaystyle\sum_{k,j} t_k t_j \sigma(x_k)\sigma(x_j) r(x_k, x_j)$

$$= \sum t_k^2 \sigma^2(x_k)$$

故ニ(2)ノ左辺$\displaystyle = exp\left\{ i\sum_k t_k m(x_k) - \frac{1}{2}\sum_k t_k^2 \sigma^2(x_k) \right\}$

$$= \prod_k exp\left\{ i t_k m(x_k) - \frac{1}{2} t_k^2 \sigma^2(x_k) \right\}$$

$$= \prod_k m(e^{it_k x_k})$$

2. 充分性. $\mathfrak{M}' \equiv \{x - m(x);\ x \in \mathfrak{M}\}$ がG型ナルコトヲイヘバヨイ。(1)ヲ書キカヘテ($x_i' = x_i - m(x_i)$)

(1)　$x_1', x_2', \ldots\ldots x_n' \in L(\mathfrak{M}')$,

$$(x_i', x_j') = 0 \quad (i \neq j)$$

ナラバ常ニ$\{x_1', x_2', \ldots\ldots x_n'\}$ $\perp\!\!\perp$，茲ニ(x_i', x_j')ハ内積ヲ表ハス。

$L(\mathfrak{M}')$ノ完全正規直交系ヲ$\{\varphi_\alpha\}$トスル。$(\varphi_\alpha, \varphi_\beta) = 0$，$(\alpha \neq \beta)$ナルが故ニ(1')ニヨリ$\{\varphi_\alpha\}$ $\perp\!\!\perp$。

偖テ$\mathfrak{M}'$ガG型ナルコトヲイフニハ，$\{\varphi_\alpha\}$ガGaussG型ナルコトガイヘレバヨイ。($\mathfrak{M}' \subseteq L\{\varphi_\alpha\}$，定理2ニ注意)。ソレニハ$\varphi_\alpha$ガ Gauss 分布ニ從フコトヲイヘバヨイガ，$(\varphi_\alpha, \varphi_\beta)$ノ分布法則ノ特性函數$F(t, s)$ガ$e^{-\frac{t^2+s^2}{2}}$ナルコトガイヘレバ尚更充分デアル。サテ，明

ラカニ

$$F(t,s)=m(e^{it\varphi_\alpha+is\varphi_\beta})$$

今，$t_1t_2+s_1s_2=0$ ナラバ

$$(t_1\varphi_\alpha+s_1\varphi_\beta\,,\ t_2\varphi_\alpha+s_2\varphi_\beta)=t_1t_2+s_1s_2=0$$

$\varphi_\alpha,\varphi_\beta\in L(m')$

故ニ $t_1\varphi_\alpha+s_1\varphi_\beta \perp\!\!\!\perp t_2\varphi_\alpha+s_2\varphi_\beta$ （假定 (1)）

故ニ $F(t_1+t_2\,,\ s_1+s_2)$

$$=m(e^{i(t_1+t_2)\varphi_\alpha+i(s_1+s_2)\varphi_\beta})$$

$$=m(e^{it_1\varphi_\alpha+is_1\varphi_\beta})\,m(e^{it_2\varphi_\alpha+is_2\varphi_\beta})$$

$$=F(t_1,s_1)F(t_2,s_2)$$

故ニ (3) $(t_1t_2+s_1s_2)=0\longrightarrow F(t_1+t_2\,,\ s_1+s_2)$

$$=F(t_1,s_1)F(t_2,s_2)$$

コレカラ $F(t,s)$ ノ連續性等ヲ考慮シテ，

$F(t,s)=e^{-\frac{t^2+s^2}{2}}$ ヲ得ル。

$\boxed{\S 2.}$ $M=\{x_\alpha\,;\ \alpha\in A\}$ ガG型トスル。今

(4) $\mu(\alpha)=m(x_\alpha)$

$$\rho(\alpha,\beta)=(x_\alpha-m(x_\alpha),\ x_\beta-m(x_\beta))$$

ト定義スル。明ラカニ $\rho(\alpha,\alpha)=\sigma^2(x_\alpha)$.

$\rho(\alpha,\beta)=\sigma(x_\alpha)\sigma(x_\beta)\,.\ r(x_\alpha,x_\beta)$

$\boxed{\text{定理4}}$ $\rho(\alpha,\beta)$ ハ $A\times A$ ノ上ノ *real positive* *definite function* ナリ。

（証明）$\rho(\alpha,\beta) = (x_\alpha - m(x_\alpha),\ x_\beta - m(x_\beta))$

$$= \rho(\beta,\alpha)$$

$$\sum \rho(\alpha_k,\alpha_j)\xi_k\bar{\xi}_j = \| \sum (x_{\alpha_i} - m(x_{\alpha_i}))\xi_i \|^2$$

$$\geqq 0$$

$\boxed{\text{定理5}}$ $\mathfrak{M} = \{x_\alpha ;\ \alpha \in A\}$ ヲ (Ω, P) ノ上ノ G 型確率変数トシ、$\mathfrak{M}' = \{x'_\alpha ;\ \alpha \in A\}$ ヲ (Ω', P')（コレハ (Ω, P) ト同ジデモヨイ）ノ上ノ G 型確率変数系トスル。

(5) $m(x_\alpha) = m(x'_\alpha)$

(6) $(x_\alpha - m(x_\alpha),\ x_\beta - m(x_\beta)) = (x'_\alpha - m(x'_\alpha),\ x'_\beta - m(x'_\beta))$

ナラバ，R^A ノ任意ノボレル集合 E ニ對シテ

(7) $P\{\omega ;\ (x_\alpha ;\ \alpha \in A) \in E\}$

$= P'\{\omega' ;\ (x'_\alpha ;\ \alpha \in A) \in E\}$

（証明）(7) ノ代リニ，任意ノ $\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots \alpha_n \in A$ 及ビボレル集合 $E_n\ (\subseteqq R^n)$ ニ對シテ

(7') $P\{\omega ;\ (x_{\alpha_1}, \cdots\cdots, x_{\alpha_n}) \in E_n\}$

$= P'\{\omega' ;\ (x'_{\alpha_1}, \cdots\cdots, x'_{\alpha_n}) \in E_n\}$

ガイヘレバヨイ。簡單ナタメニ $\alpha_1, \cdots\cdots \alpha_n$ ヲ夫々 $1, 2, \cdots\cdots n$ ニテ表ハシテオク。又 (5) ニヨリ $m(x_\alpha) = m(x'_\alpha) = 0$ トシテモ一般性ヲ失ハナイ。而ラバ (6) ハ $(x_\alpha, x_\beta) = (x'_\alpha, x'_\beta)$ トナル。$L\{x_1, x_2, \cdots\cdots x_n\}$ ノ上ノ完全正規直交系ヲ $\{\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots \varphi_m\}$

トシ，$\varphi_p=\sum a_{pq}x_q$，$x_q=\sum_p b_{qp}\varphi_p$ トスル。

今，$\varphi'_p\equiv\sum_q a_{pq}x'_q$ ト定義スレバ

$$\|x'_q-\sum_p b_{qp}\varphi'_p\|^2=\|x'_q-\sum_{p,r} b_{qp}a_{pr}x'_r\|^2$$

$$=\|x_q-\sum_{p,r} b_{qp}a_{pr}x_r\|^2$$

$$(\because\ (x_\alpha,x_\beta)=(x'_\alpha,x'_\beta))$$

$$=\|x_q-\sum_p b_{qp}\varphi_p\|^2$$

$$=0$$

故ニ $x'_q=\sum_p b_{qp}\varphi'_p$

又，同様ニ $(\varphi'_p,\varphi'_q)=(\varphi_p,\varphi_q)=\delta_{pq}$

故ニ $\{\varphi'_p\}$ ハ $L(\mathfrak{M}')$ ノ上ノ完全正規直交系ナリ。

$\mathfrak{M}$ ガ G 型，従ツテ定理 2 ニヨリ $L(\mathfrak{M})$ ガ G 型。$\varphi_p\in L(\mathfrak{M})$ ナル故 $\{\varphi_p\}$ ガ直交系ナルコトカラ，定理 3（必要性ノ方）ニヨリ $\{\varphi_p\}$ ⫫。同様ニ $\{\varphi'_p\}$ ⫫。

故ニ

$$P\{\omega;(\varphi_1,\varphi_2,\cdots\cdots\varphi_m)\in E^*_m\}$$

$$=\int\cdots\cdots\int_{E^*_m}\frac{1}{(2\pi)^{m/2}}e^{-\frac{\xi_1^2+\cdots\cdots+\xi_m^2}{2}}d\xi_1\cdots\cdots d\xi_m$$

$$=P\{\omega';(\varphi'_1,\varphi'_2,\cdots\cdots\varphi'_m)\in E^*_m\}$$

コノ式ニ於テ

$$E_m^* \equiv \left\{ (\lambda_1, \cdots\cdots \lambda_m) ; \left(\sum_p b_{qp} \lambda_p ; q = 1, 2, \cdots\cdots n \right) \in E_n \right\}$$

ト置イテ見レバ，ソレハ（7′）ヲ意味スル。

$\boxed{\text{定理6}}$ $\mu(\alpha)$ ヲ A ノ上ノ任意ノ實函數，$\rho(\alpha, \beta)$ ヲ A×A ノ上ノ任意ノ *real positive definite function* トスル。

而ラバ適當ナ確率空間 (Ω, P) ノ上ニ適當ナ G 型確率変数系 $\mathfrak{M} = \{ x_\alpha ; \alpha \in A \}$ ヲ定義シ，

$\mu(\alpha) = m(x_\alpha)$，$\rho(\alpha, \beta) = (x_\alpha - m(x_\alpha), x_\beta - m(x_\beta))$

ナラシメ得ル。

（証明） $\mu(\alpha) = 0$ $(\alpha \in A)$ トシテ一般性ヲ失ハナイ。

（コノ場合ノ系ヲ $\{ x_\alpha ; \alpha \in A \}$ トシ、$\mathfrak{M}' = \{ x_\alpha + \mu(\alpha) ; \alpha \in A \}$ ヲ考ヘルト，コレガ一般ノ場合ノ系トナッテ来ルカラ）

I. <u>A ガ有限集合ノ時</u>。 $A = \{ 1, 2, \text{-----}, n \}$ トスル。

假定ニヨリ $(\rho(\alpha\beta))$ ハ *positive definite symmetric* n^2-*matrix* ナル故，同様ナ *matrix* $(\lambda_{\alpha\beta})$ ヲ求メテ，

$$(\lambda_{\alpha\beta})(\lambda_{\alpha\beta})^* = (\rho(\alpha\beta))$$

ナラシメ得ル。 コヽニ＊ハ *transposed matrix* ヲ示ス。

今 R^n ノ上ニ P^n ヲ次ノ如ク定義スル。

$$P^n(E_n)=\int\cdots\int_{E_n}\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}e^{-\frac{\xi_1^2+\cdots\cdots+\xi_n^2}{2}}d\xi_1\cdots\cdots d\xi_n$$

今 $\omega=(\xi_1,\cdots\cdots\xi_n)$ ニ對シテ $\varphi_k(\omega)=\xi_k$ ト定義スレバ，(R^n, P^n) ノ上デ，φ_k ハ Gauss 分布(実ハ正規分布)ニ從ヒ，$\{\varphi_k\}$ ⊥ ナル故 $\{\varphi_k\}$ ハ G 型ナリ。コノ際 $m(\varphi_k)=0$，$(\varphi_k, \varphi_j)=\delta_{kj}$ ハ明ラカ。

今，$x_\alpha\equiv\sum_{\beta=1}^{n}\lambda_{\alpha\beta}\varphi_\beta$ トスレバ $\{x_\alpha\}\subseteq L(\{\varphi_k\})$ ナル故，$\{x_\alpha\}$ モ亦 G 型デ $m(x_\alpha)=\sum\lambda_{\alpha\beta}\, m(\varphi_\beta)=0$，

$(x_\alpha, x_\beta)=\sum_{\gamma,\delta}\lambda_{\alpha\gamma}\lambda_{\beta\delta}(\varphi_\gamma, \varphi_\delta)=\sum_{\gamma}\lambda_{\alpha\gamma}\lambda_{\beta\gamma}=\rho(\alpha,\beta)$.

II. <u>A ガ無限集合ノ時</u>。 B ヲ A ノ任意ノ有限(n 個)部分集合トスル。$\rho(\alpha,\beta)$ ハ B×B ノ上デ勿論 *positive definite* ナル故，I ニヨリ，(R^n, P^n) ノ上ノ G 型確率変数系 $\{x_\beta^B;\ \beta\in B\}$ ヲ定義シテ

$m(x_\beta^B)=0$，$(x_\beta^B, x_\gamma^B)=\rho(\beta,\gamma)$ ナラシメ得ル。

サテ R^A ノ上ニ次ノ如キ函數系 $\{x_\alpha;\ \alpha\in A\}$ ヲ定義スル。

$\omega=(\xi_\alpha;\ \alpha\in A)\ (\in R^A)$ ナラバ $x_\alpha(\omega)=\xi_\alpha$

備テ R^A ノ壔集合ニ對シテ次ノ如キ P_B ヲ定義スル。

$$P_B\{\omega;\ (x_\beta(\omega);\ \beta\in B)\in E_n\}$$
$$=P^{(n)}\{(\xi_1-\xi_n);\ (x_\beta^B;\ \beta\in B)\in E_n\}$$

而ラバ $\{x_\beta;\ \beta\in B\}$ ハ確率空間 (R^A, P_B) ノ上ノ確率変数系デアッテ, $\{x^B_\beta;\ \beta\in B\}$ ガG型ナル故, コレモ亦G型ナリ。今 $B\subseteq C$ ナル時

$$(8)\quad P_C\{\omega;\ (x_\beta(\omega);\ \beta\in B)\in E_n\}$$
$$= P_B\{\omega;\ (x_\beta(\omega);\ \beta\in B)\in E_n\}$$

ガ証明出来レバ, *Kolmogoroff* ノ定理ニヨリ, スベテノ P_B ト矛盾シナイ確率 P ヲ R^A ノ上ニ定義シ得ル。

(8) ヲ証明スルタメニハ前定理5ヲ用ヒル。$\{x_\beta;\ \beta\in B\}$ ハ $\{R^A, P_B\}$ ノ上デ考ヘテモ, $\{R^A, P_C\}$ ノ上デ考ヘテモ, G型デアッテ, ソノ平均値ハ何レモ 0。

$$(x_\beta, x_{\beta'})_{P_B} = (x^B_\beta, x^B_{\beta'}) = \rho(\beta, \beta')$$
$$= (x^C_\beta, x^C_{\beta'}) = (x_\beta, x_{\beta'})_{P_C}$$

茲ニ P_B ナル添字ハ内積ヲ作ル場合ニ P_B ー測度ヲ基トシタコトヲ示ス。故ニ前定理5ニヨリ (8) ガ成立スル。サテ (R^A, P) ノデ考ヘレバ x_β ノ平均値ハ0デ

$$(x_\beta, x_{\beta'}) = (x_\beta, x_{\beta'})_{P_B} = \rho(\beta, \beta')$$

(Bハ β, β' ヲ含ム任意ノ(Aノ)有限部分集合)。故ニ $\{x_\alpha;\ \alpha\in A\}$ ヲ (R^A, P) ノ上デ考ヘレバ, 求ムルG型確率変数系ナリ。

$\boxed{\S 3.}$ 應用 (*stationary process* ノ構成)

$\boxed{\text{定理7}}$ (Kolmogoroff-Khintchine)

任意ノ positive definite function $\rho(t)$ $(-\infty < t < \infty)$ ヲ自己相関係数トシテモツ強義ノ stationary process ガアル。

(証明) 前定理デ $A = R'$, $\mu(\alpha) = 0$, $\rho(\alpha, \beta) = \rho(\alpha - \beta)$ ト置イテ得ラレル $\{x_t;\ t \in R'\}$ ガ求ムルモノナリ。 $\{x_t;\ t \in R'\}$ 及ビ $\{x_{t+\tau};\ t \in R'\}$ ハ共ニ G 型デ

$$m(x_t) = m(x_{t+\tau}) \ (= 0)$$

$$(x_t, x_s) = (x_{t+\tau}, x_{s+\tau}) \ (= \rho(t-s))$$

故ニ定理5ニヨリ

$$P\{\omega;\ (x_t;\ t \in R') \in E\}$$

$$= P\{\omega;\ (x_{t+\tau};\ t \in R') \in E\}$$

コレハ $\{x_t\}$ ガ強義デ stationary ナルコトヲ示ス。