1169. 射影媒介変數ニツイテ

（談話 1159 ニ對スル注意）

矢野 健太郎（東大）

射影媒介変數ニ關スル高野一夫君ノ談話 1159 ニ對スル感想ヲノベテ御參考ニ供シマス。

§1. 擴張サレタ射影幾何學ノナカヘ始メテ射影媒介変數ヲモチコンダノハ，小生ノ知ル限リニ於テハ J. H. C. Whitehead (The representation of projective spaces. Annals of Math. vol. 32, 1931. 327—360)デアリマス。$\Pi^{\lambda}_{\mu\nu}$ ($\lambda, \mu, \nu, \cdots\cdots = 0, 1, 2, \cdots\cdots, n$) ヲ條件

$$(1.1) \quad (a) \quad \Pi^{\lambda}_{0\nu} = \Pi^{\lambda}_{\nu 0} = \delta^{\lambda}_{\nu}. \qquad (b) \quad \frac{\partial \Pi^{\lambda}_{\mu\nu}}{\partial x^{0}} = 0$$

ヲ滿足スル對稱射影接續ノ係數トスレバ, Veblen ノ意味ノ擴張サレタ射影幾何學ハ

$$(1.2) \quad \begin{cases} \bar{x}^{0} = x^{0} + \log \rho(x^{1}, x^{2}, \cdots\cdots, x^{n}) \\ \bar{x}^{i} = \bar{x}^{i}(x^{1}, x^{2}, \cdots\cdots, x^{n}) \end{cases}$$

ナル形ノ變換下ノ $\Pi^{\lambda}_{\mu\nu}$ ノ不變式論デアリマス。條件(1.1)ガ變換(1.2)デ不變デアルコトハ勿論デアリマス。

サテ今 $\Pi^{\lambda}_{\mu\nu}$ ヲ一ツノ $n+1$ 次元ノ對稱擬似接續空間 A_{n+1} ニ於ケル接續ノ係數トシ, モシ $\Pi^{\lambda}_{\mu\nu}$ ガ丁度(1.1)ナル條件ヲ滿足スルヤウナ特別ナ座標系ガ存在スルナラバ, カカル座標系ニ於ケル A_{n+1} ヲ用ヒテ Veblen ノ射影空間 P_n ヲ表現シ得ルワケデアリマス。シカモソノヤウナ座標系ハ(1.2)ナル形ノ變換デ互ニ結バレテヰル コトガ證明サレテ居リマス。

次ニ P_n ノ表現トシテノ A_{n+1} ヲトリ, A_{n+1} ニ於ケル道ノ方程式ヲ書キ下セバ

$$(1.3) \quad \frac{d^{2}x^{\lambda}}{dt^{2}} + \Pi^{\lambda}_{\mu\nu}\frac{dx^{\mu}}{dt}\frac{dx^{\nu}}{dt} = 0$$

デアリマス。但シココニ t ハ, A_{n+1} ノ道ニ對スル擬似媒介

変数デアリマス。シカシナガラコノ場合，(1.3) ハ實ハ P_n ニ於ケル道ノ表現ニナツテ居リ，シカモ t ハ P_n ニ於ケル道ニ対シテハ一ツノ射影的ナ媒介変数ニナツテヰルコトヲ示シテ，J. H. C. Whitehead ハコレヲ射影媒介変数ト呼ンデヰルノデアリマス。Whitehead ノ方法ハ所謂射影標準座標ヲ用ヒル方法デアリマスガ、ココデハモット直接ナ方法デコレヲ示シテミマス。

先ヅ (1.3) ニ於テ，$\lambda=0$, $\lambda=i$ ($i, j, k, \ldots\ldots = 1, 2, \ldots\ldots, n$) トオイテ之レヲ分ケテ書キマスト，(1.1) ナル條件ヲ用ヒテ

$$(1.4)\qquad \frac{d^2x^0}{dt^2}+\left(\frac{dx^0}{dt}\right)^2+\Pi^0_{jk}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt}=0$$

及ビ

$$(1.5)\qquad \frac{d^2x^i}{dt^2}+2\frac{dx^0}{dt}\frac{dx^i}{dt}+\Pi^i_{jk}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt}=0$$

ヲ得マス。ココデ (1.5) ノ形ヲ整ヘルタメー

$$(1.6)\qquad 2\frac{dx^0}{dt}=\frac{\dfrac{d^2t}{ds^2}}{\left(\dfrac{dt}{ds}\right)^2}$$

ニ依ツテ定義サレル新シイ媒介変数 s ヲ導入スレバ，(1.4) ハ

$$(1.7)\qquad \{t,s\}=\frac{\dfrac{d^3t}{ds^3}}{\dfrac{dt}{ds}}-\frac{3}{2}\left(\frac{\dfrac{d^2t}{ds^2}}{\dfrac{dt}{ds}}\right)^2=-2\Pi^0_{jk}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds}$$

(1.5) ハ

$$(1.8)\qquad \frac{d^2x^i}{ds^2}+\Pi^i_{jk}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds}=0$$

トナリマス。(1.7) カラ t ハ ーツノ Schwarz ノ微分デ定義サレルノデスカラ射影的ナ媒介変數デアルコトガ判リ、(1.8) カラコレハ P_n ノ道ヲ表現シテヰルコトガ判リマス。ナホ (1.6) ハ積分サレテ

$$(1.9)\qquad x^0=\frac{c}{2}\log\frac{dt}{ds}$$

ヲ與ヘルコトヲコヽニ注意シテオキマセウ。

猶 A_{n+1} ニ於ケル曲率テンソルヲ

$$(1.10)\qquad \mathcal{B}^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}=\frac{\partial\Pi^{\lambda}_{\mu\nu}}{\partial x^{\omega}}-\frac{\partial\Pi^{\lambda}_{\mu\omega}}{\partial x^{\nu}}+\Pi^{\alpha}_{\mu\nu}\Pi^{\lambda}_{\alpha\omega}-\Pi^{\alpha}_{\mu\omega}\Pi^{\lambda}_{\alpha\nu}$$

トスレバ、(1.1) ノ條件ニ依ッテ

$$\mathcal{B}^{\lambda}_{\cdot 0\nu\omega}=\mathcal{B}^{\lambda}_{\cdot\mu 0\omega}=\mathcal{B}^{\lambda}_{\cdot\mu\nu 0}=0$$

デアリマスカラ

$$(1.11)\qquad \mathcal{B}^{i}_{\cdot jkh}=\frac{\partial\Pi^{i}_{jk}}{\partial x^{h}}-\frac{\partial\Pi^{i}_{jh}}{\partial x^{k}}+\Pi^{a}_{jk}\Pi^{i}_{ah}-\Pi^{a}_{jh}\Pi^{i}_{ak}+\Pi^{0}_{jk}\delta^{i}_{h}-\Pi^{0}_{jh}\delta^{i}_{k}$$

即チ

$$(1.12)\qquad \Pi^{i}_{\cdot jkh}=\frac{\partial\Pi^{i}_{jk}}{\partial x^{h}}-\frac{\partial\Pi^{i}_{jh}}{\partial x^{k}}+\Pi^{a}_{jk}\Pi^{i}_{ah}-\Pi^{a}_{jh}\Pi^{i}_{ak}$$

トオケバ

(1.13) $\Omega^{i}_{\cdot jkh} = \Pi^{i}_{\cdot jkh} + \Pi^{0}_{jk}\delta^{i}_{h} - \Pi^{0}_{jh}\delta^{i}_{k}$

ガ一ツノ射影的ナテンソルデアルコトガ判リマス。コノ射影的ナテンソルトイフノハ

$$\bar{x}^0 = x^0 + \log \rho(x^1, x^2, \ldots\ldots, x^n)$$

ナル x^0 ノミノ変換ニ依ッテ Π^0_{jk} 及ビ Π^i_{jk} ハ夫々

$$(1.14)\quad \bar{\Pi}^0_{jk} = \Pi^0_{jk} - \frac{\partial^2 \log\rho}{\partial x^j \partial x^k} + \frac{\partial \log\rho}{\partial x^i}\Pi^i_{jk} - \frac{\partial \log\rho}{\partial x^j}\frac{\partial \log\rho}{\partial x^k}$$

$$(1.15)\quad \bar{\Pi}^i_{jk} = \Pi^i_{jk} - \frac{\partial \log\rho}{\partial x^j}\delta^i_k - \frac{\partial \log\rho}{\partial x^k}\delta^i_j$$

ニ変ルノデアリマスガ、$\Omega^i_{\cdot jkh}$ ハカヽル変換ニ對シテ不変デアリ，シカモ普通ノ座標変換ニ対シテハテンソルノ成分ニナッテヰルト云フ意味デアリマス。$\Omega^i_{\cdot jkh}$ ハ射影的ナテンソルナノデアリマスカラ

(1.16) $\Omega^i_{\cdot jki} = 0$

モ亦射影的ナ條件デアリマス。コレニ依ッテ (1.13) カラ Π^0_{jk} ヲ定メマスト

$$(1.17)\quad \Pi^0_{jk} = -\frac{1}{n-1}\Pi_{jk} \qquad (\Pi_{jk} = \Pi^i_{\cdot jki})$$

ヲ得マス。カリ Π^i_{jk}，及ビコレカラ定メラレタ Π^0_{jk} ヲ用ヒテ組立テタ射影接續ガ所謂標準射影接續デアリマス。ナホ Π^0_{jk} ガ (1.17) ノ如キ簡單ナ形ガ定ルノハ、實ハ $\Pi^\lambda_{\mu\nu} = \Pi^\lambda_{\nu\mu}$

トイフ條件ガ非常ニ強クキイテ居ルノデアリマシテ。一般ノ場合ニハ(1.17)ハモット複雑ナ形ヲトルモノデアリマス。

サテ(1.17)ヲ(1.7)ニ代入シマスト

$$(1.18)\qquad \{t, s\} = \frac{2}{n-1}\Pi_{jk}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds}$$

ヲ得マス。カク定メラレタtヲ吾々ハ標準射影媒介変數ト呼ブコトニシマス。(Berwald ノ prefered projective parameter デス)

以上ノ議論カラ判リマスヤウニ, Whitehead自身ハソコマデノベテヰルワケデハアリマセンガ, 彼ノ議論ハ既ニ後述ノ L. Berwald, J. Haantjes 及ビ筆者ノ議論ノ萌芽ヲ含ンデヰルノデアリマス。

§2. サテL. Berwald ハ(On the projective geometry of paths, Annals of Math., vol. 37, 1936, 879—898), 道ノ射影幾何學ヲ取扱フ他ノ新シイ方法ヲ提議シテヰマス。シカシ良ク考ヘテミマスト彼ノ方法ハ, 實ハ§1ニ於テ示シタ方法ヲ道ニタドルコトニアルノデス。即チ道ガ

$$(2.1)\qquad \frac{d^2x^i}{ds^2}+\Pi^i_{jk}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds}=0$$

デ與ヘラレタ場合

$$(2.2)\qquad \overline{\Pi}^i_{jk}=\Pi^i_{jk}-\varphi_j\delta^i_k-\varphi_k\delta^i_j$$

ナルΠ^i_{jk}ノ所謂射影変換ニ依ッテ, (2.1)ナル道ノ微分方程式ハソノ形ヲ変ヘナイコトハ周知ノ事實デアリマスガ, 今

(2.1) ナル道ノ上デ，一ツノ媒介変数 t ヲ

$$(2.3)\quad \{t,s\} = -2\,\Pi^{0}_{jk}\frac{dx^{j}}{ds}\frac{dx^{k}}{ds}$$

デ定義シマス。コヽニ Π^{0}_{jk} 及ビ Π^{i}_{jk} ハ何レモ二次形式ノ係数デスカラ，$\Pi^{0}_{jk}=\Pi^{0}_{kj}$，$\Pi^{i}_{jk}=\Pi^{i}_{kj}$ ト仮定シテモ一般性ヲ失ヒマセン。

サテ t ハ一ツノ Schwarz ノ微分デ定義サレルノデスカラ。一次分数変換ヲ除イテ定ル射影的ナ媒介変数デアルコトハ明デアリマスが，t ニ對シテ更ニ次ノ二ツノ條件ヲオキマス。即チ

(i) t ハ座標ノ変換ニ對シテ不変デアル。

(ii) t ハ Π^{i}_{jk} ノ射影変換 (2.2) ニ對シテ不変デアル。

ノ二ツデス。

(i) カラハ Π^{0}_{jk} が座標変換ニ對シテ對稱ナ二次ノ共変テンソルノ成分デアルコトが判リマス。(ii) カラハ，Π^{0}_{jk} ノ (2.2) ニ對スル変換法則トシテ

$$(2.4)\quad \overline{\Pi}^{0}_{jk} = \Pi^{0}_{jk} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi_{j}}{\partial x^{k}}+\frac{\partial\varphi_{k}}{\partial x^{j}}\right)+\varphi_{i}\Pi^{i}_{jk}-\varphi_{j}\varphi_{k}$$

が得ラレマス。Berwald ハカヽル変換法則ヲモツ Π^{0}_{jk} 及ビ Π^{i}_{jk} ノ不変式論ヲ拡張サレタ射影幾何学ト定義シテオルノデアリマスが，コレハ一般ニ §1 デノベタソレト一致イタシマセン。一致スルタメノ條件ハ，φ_{j} が一ツノ勾配ベクトルニナルコトデアリマス。コノ意味デ Veblen ノ射影

幾何學ヨリハ Berwald ノ射影幾何學ノ方ガ幾分廣イノデハアリマスガ，筆者ノ意見ニ依レバ何レモ $\Pi^0_{jk} = \Pi^0_{kj}$ ナル條件ヲトリ去ラヌ限リ，更ニ一般ナ射影幾何學ニハ到達出來サウモアリマセン．實ハ Π^0_{jk} ノ變換式トシテハ

$$(2.5)\qquad \bar{\Pi}^0_{jk} = \Pi^0_{jk} - \frac{\partial\varphi_j}{\partial x^k} + \varphi_i \Pi^i_{jk} - \varphi_j \varphi_k$$

ヲ得ルコトガ望マシイノデアリマスガ，コノママノ形デ $\bar{\Pi}^0$ 及ビ Π^0_{jk} ガ對稱デアルコトヲ要求スレバ，上式及ビ $\Pi^i_{jk} = \Pi^i_{kj}$ カラ φ_j ハ勾配ベクトルトナッテ Veblen ノ場合ニナッテシマヒ，$\bar{\Pi}^0_{jk}$ 及ビ Π^0_{jk} ハ對稱デアルガ，φ_j ハ勾配ベクトルデナイトイフノデアル (2.5) デハナク (2.4) ナル形ノ變換式ヲ用ヒルヨリ外ナク，Berwald ノ場合ニナッテシマフノデス。コノ点ハ更ニ後ニ詳論スルコトニシマス。

サテ Berwald ノ流儀ニ從ッテ Π^0_{jk} 及ビ Π^i_{jk} ノ不變式，例ヘバ Weyl ノ曲率テンソルヲ導クニハ次ノヤウニシマス。Π^i_{jk} ノ射影變換 (2.2) ニ對スル曲率テンソル Π^i_{jkh} ノ變換式ハ良ク知ラレテヰルヤウニ

$$(2.6)\qquad \bar{\Pi}^{\ i}_{\cdot jkh} = \Pi^{\ i}_{\cdot jkh} + \varphi_{jk}\delta^i_h - \varphi_{jh}\delta^i_k - \delta^i_j(\varphi_{kh} - \varphi_{hk})$$

但シ

$$\varphi_{jk} = \frac{\partial\varphi_j}{\partial x^k} - \varphi_i \Pi^i_{jk} + \varphi_j \varphi_k$$

デアリマス。(2.6) デ $i = k$ トオイテ縮約スレバ

$$\overline{\Pi}_{jk}=\Pi_{jk}+n\varphi_{jk}-\varphi_{kj}\quad(\overline{\Pi}_{jk}=\overline{\Pi}^{i}_{\cdot jki},\ \Pi_{jk}=\Pi^{i}_{\cdot jki})$$

ヲ得マス．又(2.4)カラ

$$2\overline{\Pi}^{0}_{jk}=2\Pi^{0}_{jk}+\varphi_{jk}+\varphi_{kj}$$

デス。コレラ二式ヲ加ヘ合セテコレヲ φ_{jk} デトケバ

$$(2.7)\quad \varphi_{jk}=\frac{1}{n+1}(2\overline{\Pi}^{0}_{jk}+\overline{\Pi}_{jk})-\frac{1}{n+1}(2\Pi^{0}_{jk}+\Pi_{jk})$$

ヲ得マス。(2.7)ヲ更ニ(2.6)ニ代入スレバ，吾々ハ

$$(2.8)\quad \Omega^{i}_{\cdot jkh}=\Pi^{i}_{\cdot jkh}-\frac{1}{n+1}(2\Pi^{0}_{jk}+\Pi_{jk})\delta^{i}_{h}$$

$$+\frac{1}{n+1}(2\Pi^{0}_{jh}+\Pi_{jh})\delta^{i}_{k}+\frac{1}{n+1}\delta^{i}_{j}(\Pi_{kh}-\Pi_{hk})$$

ガ射影的ナ，即チ(2.2)デ不変ナテンソルデアルコトヲ見出シマス。從ッテ $\Omega^{i}_{\cdot jki}=0$ モ射影的ナ條件デスカラ，コレニ依ッテ Π^{0}_{jk} ヲ求メマスト

$$(2.9)\quad \Pi^{0}_{jk}=-\frac{1}{2(n-1)}(\Pi_{jk}+\Pi_{kj})$$

ヲ得マス。コレヲ(2.3)ニ代入スレバ

$$(2.10)\quad \{t,s\}=\frac{2}{n-1}\Pi_{jk}\frac{dx^{j}}{ds}\frac{dx^{k}}{ds}$$

(2.8)ニ代入スレバ

$$(2.11)\quad \Omega^{i}_{\cdot jkh}=\Pi^{i}_{\cdot jkh}-\frac{1}{n^{2}-1}(n\Pi_{jk}+\Pi_{kj})\delta^{i}_{h}$$

$$+\frac{1}{n^{2}-1}(n\Pi_{jh}+\Pi_{hj})\delta^{i}_{k}+\frac{1}{n+1}\delta^{i}_{j}(\Pi_{kh}-\Pi_{hk})$$

ヲ得マス。(2.10)ハ(1.18)ト同ジ形デアリマスガ，(1.18)ニ於ケル Π_{jk} ハ對称，(2.10)ニ於ケル Π_{jk} ハ一般ニ對稱デナイコトハ注意ヲ要シマス。モットモ(2.10)ニ於テモ t ノ定義ニハ Π_{jk} ノ對稱部分シカ影響シナイワケデハアリマスガ。

(2.11)ハ Weyl ノ射影曲率テンソルヲ與ヘテヰルノデアリマスガ，コレハ(1.17)ヲ(1.13)ニ代入シテ得ラレル

(2.12) $$\Omega^{i}_{\cdot jkh}=\Pi^{i}_{\cdot jkh}-\frac{1}{n-1}\Pi_{jk}\delta^{i}_{h}+\frac{1}{n-1}\Pi_{jh}\delta^{i}_{k}$$

トハ一致イタシマセン。シカシ Π_{jk} ガモシ對稱デアルトスレバ，(2.11)ハ(2.12)ト一致シマス。

從ッテ Veblen ノ射影幾何學ハ Π_{jk} ガ對稱トイフコトヲ極度ニ利用シテヰルコトガ判リマス。例ヘバ射影變換

$$\bar{\Pi}^{i}_{jk}=\Pi^{i}_{jk}-\varphi_{j}\delta^{i}_{k}-\varphi_{k}\delta^{i}_{j}$$

ニ於テ φ_j ヲ勾配ベクトルニ限ルノモ，實ハ Π_{jk} ノ對稱性ヲ保ツ爲メデス。

Π_{jk} ガ對稱デアレバ，有名ナ恒等式

$$\Pi^{i}_{\cdot jkh}+\Pi^{i}_{\cdot khj}+\Pi^{i}_{\cdot hjk}=0$$

カラ判リマスヤウニ $\Pi^{i}_{\cdot ikh}=0$，從ッテ

$$\frac{\partial\Pi^{i}_{ik}}{\partial x^{h}}-\frac{\partial\Pi^{i}_{ih}}{\partial x^{k}}=0$$

從ッテ

$$(2.13)\quad \Pi^{i}_{ik} = \frac{\partial \Pi}{\partial x^{k}}$$

ナル如キΠガ存在シマス。同様ニ$\overline{\Pi}_{jk}$モ對稱デアルトシマスト

$$(2.14)\quad \overline{\Pi}^{i}_{ik} = \frac{\partial \overline{\Pi}}{\partial x^{k}}$$

ナル如キ$\overline{\Pi}$ガ存在シマス。從ッテ

$$\overline{\Pi}^{i}_{jk} = \Pi^{i}_{jk} - \varphi_j \delta^{i}_{k} - \varphi_k \delta^{i}_{j}$$

ニ於テ$i=j$トオイテ縮約ヲ行ヘバ

$$\frac{\partial \overline{\Pi}}{\partial x^{k}} = \frac{\partial \Pi}{\partial x^{k}} - (n+1)\varphi_k$$

從ッテφ_kハ勾配ベクトルデナケレバナラズ，コレヲ

$$\varphi_k = \frac{\partial \varphi}{\partial x^{k}}$$

トオキマスト

$$\overline{\Pi} = \Pi - (n+1)\varphi + const.$$

ヲ得マス。カクVeblenノ理論ニ於テ，$\Pi_{jk} = \Pi_{kj}$ナル條件ヲ更ニ洛歸サセ，例ヘバ上ノΠノ如キガ本質的ナ割合ヲ演ズルカ，深イ研究ガ望マレル次第デアリマス。

§3. 以上Veblen及ビBerwaldノ理論ハ非常ニ巧妙デハアリマスガ、又技巧的デアルトモ言ヘマス。ソコデコ

レラノ理論ガ，Cartan ノ射影接続空間ノ見地カラ見直シバ，カナリ自然ニ導キ出スコトガ出来ルトイフコトヲ注意シヨウトイフノガ，筆者ノ（Les espaces à connexion projective et la géométrie projective des paths, Thèse, Paris, 1938）積リデアリマシタ。

即チ Cartan ノ射影接続ヲ，所謂準自然標構ヲ用ヒテ

$$(3.1)\quad dA_0 = dx^0 A_0 + dx^i A_i ,$$
$$dA_j = \omega^0_{jk} dx^k A_0 + \omega^i_{jk} dx^k A_i$$

デ表ハシ

$$(3.2)\quad dx^0 = p_i dx^i ,\ \omega^0_{jk} = \Pi^0_{jk} ,$$
$$\omega^i_{jk} - \delta^i_j p_k = \Pi^i_{jk}$$

トオイテ捩率ガナイトイフ條件ヲ加ヘマスト

$$(3.3)\quad \Pi^i_{jk} = \Pi^i_{kj}$$

ガ得ラレマス。捩率ガナイトイフ條件カラ $\Pi^0_{jk} = \Pi^0_{kj}$ ノ出ナイコトハ注意ヲ要シマス。

次ニ無限遠平面ノ変換ニ相當スル

$$(3.4)\quad \bar{A}_0 = A_0 ,\quad \bar{A}_i = A_i - \varphi_i A_0$$

ヲ施シテ，コレニ対スル p_i, Π^0_{jk}, Π^i_{jk} ノ変換式ヲ求メマスト

$$(3.5)\quad \bar{p}_i = p_i - \varphi_i ,$$

$$(3.6)\quad \bar{\Pi}^0_{jk} = \Pi^0_{jk} - \frac{\partial \varphi_j}{\partial x^k} + \varphi_i \Pi^i_{jk} - \varphi_j \varphi_k$$

$$(3.7)\quad \bar{\Pi}^{i}_{jk}=\Pi^{i}_{jk}-\varphi_j\delta^{i}_{k}-\varphi_k\delta^{i}_{j}$$

ガ得ラレマス。コヽニ φ_j ハ任意ノ共変ベクトルデアリマシテ，§1 及ビ §2 ニ於テノベタ Π^{0}_{jk} 及ビ Π^{i}_{jk} ノ変換ヲ何レモ特別ナ場合トシテ含ンデ居リマス。更ニコレラノ変換ハ無限遠平面ノ変換トイフ明瞭ナ意味ヲモチ得ルヤウニナッタワケデアリマス。

更ニ Cartan ノ方法ニ従ッテ曲率テンソルヲ求メマスト

$$(3.8)\quad \Omega^{i}_{\cdot jkh}=\Pi^{i}_{\cdot jkh}+\Pi^{0}_{jk}\delta^{i}_{h}-\Pi^{0}_{jh}\delta^{i}_{k}$$
$$-\delta^{i}_{j}\left(\Pi^{0}_{kh}-\Pi^{0}_{hk}\right)$$

トナリマスガ，コノテンソルガ射影的ナテンソルデアル，即チ無限遠平面ノ変換 (3.4) ニ對シテ不変デアルトイフコトハ，一見明ナノデアリマス。何故ナラ，コレハ Cartan ノ曲率テンソルノ作リ方カラモ當然ナコトデハアリマスガ，(3.7) ナル変換ニ対シテ $\Pi^{\cdot i}_{\cdot jkh}$ ハ (2.6) ナル変換ヲ受ケマス。然ルニ (3.8) ニ於ケル Π^{0}_{jk} ハ (3.6) ナル変換ヲ受ケルノデス。従ッテ (3.8) ニ於テ φ_{jk} ナル量ハ何レモ消シ合ッテシマッテ，(3.8) ハ相変ラズ不変ナノデアリマス。前ト全様ニ $\Omega^{\cdot i}_{\cdot jki}=0$ ナル射影的ナ條件ヲオイテ Π^{0}_{jk} ヲ決定シヨウトシマスト

$$0=\Pi_{jk}+n\,\Pi^{0}_{jk}-\Pi^{0}_{kj}$$

トナリマスノデ, $\Pi^{0}_{jk}+\Pi^{0}_{kj}$ ノトキハ一寸面倒デス。シカシ上式ハ幸 Π^{0}_{jk} デトクコトガ出来テ

$$(3.9)\quad \Pi^{0}_{jk}=-\frac{1}{n^2-1}(n\,\Pi_{jk}+\Pi_{kj})$$

ガ得ラレマス。コレヲ(3.8)ニ代入スレバ $Weyl$ ノ射影曲率テンソルノ得ラレルコトハ前ト同様デアリマス。

サテ道ハ, ソノ展開ガ直線ニナルヤウナ曲線デアルト定義シマスト, ,ノ微分方程式ハ

$$(3.10)\quad d^2A_0=\alpha\, dA_0+\beta A_0$$

ナル形デアルコトハ明デアリマス。從ッテ適當ナ因數 ρ ト適當ナ媒介変數 t ヲトッテ, (3.10) ハ

$$(3.11)\quad \frac{d^2\rho A_0}{dt^2}=0$$

ト書キ直セル筈デアリマス。コヽニ現ハレル媒介変數 t ハ, 實ハ計算ヲ行フ前ニ既ニ射影的ナ媒介変數デアルコトハ明ナノデアリマス。何故ナラ (3.11) ヲ滿足スル曲線ヲ一点Pデ展開シマスト

$$\rho A_0=(\rho A_0)_P+t\cdot\left(\frac{d\rho A_0}{dt}\right)_P$$

ナル形ヲトル筈デスカラ, t ハコノ直線上ノ四点ノ非調和比ヲ與ヘルモノデアリマス。從ッテ明ニ射影的ナ媒介変數デアルカラデアリマス。シカシコレヲ計算ニ依ッテ確カメルコトモ出来マス。(3.11) ヲ (3.1) ヲ用ヒテ計算シマスト

$$(3.12)\quad \rho\frac{d^2x^0}{dt^2}+2\frac{d\rho}{dt}\frac{dx^0}{dt}+\frac{d^2\rho}{dt^2}+\rho\left(\frac{dx^0}{dt}\right)^2 +\rho\Pi^0_{jk}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt}=0$$

$$(3.13)\quad \rho\frac{d^2x^i}{dt^2}+\rho\Pi^i_{jk}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt}+2\rho\frac{dx^0}{dt}\frac{dx^i}{dt} +2\frac{d\rho}{dt}\frac{dx^i}{dt}=0$$

ナル二式ヲ得マス。コレデ(3:13)ノ形ヲ整ヘルタメニ

$$(3.14)\quad 2\frac{dx^0}{dt}+\frac{2}{\rho}\frac{d\rho}{dt}=\frac{\dfrac{d^2t}{ds^2}}{\left(\dfrac{dt}{ds}\right)^2}$$

トオキマスト，(3.12)ハ

$$(3.15)\quad \{t,s\}=-2\Pi^0_{jk}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds}$$

(3.13)ハ

$$(3.16)\quad \frac{d^2x^i}{ds^2}+\Pi^i_{jk}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds}=0$$

トナッテ，tハ射影的ナ媒介変数デアルコトガ判リマス。特ニ(3.9)ヲ(3.15)ニ代入シマスト，Π^0_{jk}ノ對稱部分ダケガ問題トナルノデスカラ

$$(3.17)\quad \{t,s\}=\frac{2}{n-1}\Pi_{jk}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds}$$

ヲ得マス. 高野君ノ言ハレルヤウニ

$$\Pi^{0}_{jk} = -\frac{1}{n-1}\Pi_{jk}$$

ヲ (3.15) ニ入レルノデハナク, (3.9) ヲ (3.15) ニ入レテ (3.17) ヲ得ラレルノデアルコトハ注意ヲ要シマス.

§4. 一方 J. Haantjes ハ (On the projective geometry of paths, Proc. Edinburgh Math. Soc. vol. 5, 1937, 103–115), D. van Dantzig ノ射影空間ニ於テ道ノ幾何學ヲ研究シテ居リマス。即 $\Pi^{\lambda}_{\mu\nu}$ ヲ

$$(4.1) \quad (a)\ \Pi^{\lambda}_{\mu\nu} x^{\nu} = \delta^{\lambda}_{\mu} \qquad (b)\ \frac{\partial \Pi^{\lambda}_{\mu\nu}}{\partial x^{\omega}} x^{\omega} = -\Pi^{\lambda}_{\mu\nu}$$

ヲ滿足スル對稱射影接續ノ係數トスレバ, D. van Dantzig ノ意味ノ拡張サレタ射影幾何學ハ

$$(4.2) \quad \bar{x}^{\lambda} = \bar{x}^{\lambda}(x) \qquad \left(\text{但シ} \frac{\partial \bar{x}^{\lambda}}{\partial x^{\nu}} x^{\nu} = \bar{x}^{\lambda}\right)$$

ナル形ノ変換下ノ $\Pi^{\lambda}_{\mu\nu}$ ノ不変式論デアリマス。カヽル空間デ道, 即自平行曲線ハ, 微分方程式

$$(4.3) \quad \frac{d^2 x^{\lambda}}{d\tau^2} + \Pi^{\lambda}_{\mu\nu}\frac{dx^{\mu}}{d\tau}\frac{dx^{\nu}}{d\tau} = \alpha\frac{dx^{\lambda}}{d\tau} + \beta x^{\lambda}$$

デ定義サレマス。J. Haantjes ハ, 道 $x^{\lambda}(\tau)$ ノ上ヘアル特別ナ斉次媒介変数 u^0, u^1 ヲ導入シテ道ヲ $x^{\lambda}(u^0, u^1)$ デ表ハシ, ソノ比 u^0/u^1 ガ, 接續ガ標準接續ノ場合ニハ前

述ノ射影媒介変数ト一致スルコトヲ示シテヰルノデアリマス。

コゝデハコレト全然異ル方法デ道 $x^\lambda(r)$ 上ニ一ツノ射影的ナ媒介変数ノ導入ノ可能ナコトヲ示シ，コレガ標準接続デナイ場合ニモ前述ノ射影媒介変数 t ト一致スルコトヲ示シテミマセウ。

適當ナ因数 ρ ト適當ナ媒介変数 t トヲ選ンデ，(4.3) ヲ

$$(4.4) \qquad \frac{d^2 \rho x^\lambda}{dt^2} + \Pi^\lambda_{\mu\nu}(\rho x) \frac{d\rho x^\mu}{dt} \frac{d\rho x^\nu}{dt} = 0$$

即チ

$$(4.5) \qquad \frac{d^2 x^\lambda}{dt^2} + \Pi^\lambda_{\mu\nu}(x) \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{d^2 \rho}{dt^2} x^\lambda + \frac{2}{\rho} \frac{d\rho}{dt} \frac{dx^\lambda}{dt} = 0$$

ナル形ニ書キ得ルコトハ明デアリマス。

サテコレヲ今迄吾々ガ考ヘテ来タ道ト比較スルタメニ

$$(4.6) \qquad \xi^i = \xi^i(x^0, x^1, \cdots\cdots, x^n) \qquad \left(\frac{\partial \xi^i}{\partial x^\lambda} x^\lambda = 0 \right)$$

ニ依ッテ非斉次座標 ξ^i ヲ導入シ

$$(4.7) \qquad E^i_{\cdot\lambda} = \frac{\partial \xi^i}{\partial x^\lambda}$$

トオケバ

$$(4.8) \qquad E^i_{\cdot\lambda} x^\lambda = 0$$

デアリマス。コヽデ更ニx^λノ-1次ノ斉次函数デ

$$(4.9)\quad p_\lambda x^\lambda = 1$$

ヲ満足スルp_λヲ導入スレバ（コレハ無限遠超曲面ノ導入デス）

$$(4.10)\quad E_j^{\cdot\lambda} E^{i}_{\cdot\lambda} = \delta^i_j,\quad E_i^{\cdot\lambda} p_\lambda = 0$$

ヲ満足スル$E_i^{\cdot\lambda}$ヲ求メルコトガ出来マス。コヽニ$\begin{pmatrix} E_i^{\cdot\lambda} \\ x^\lambda \end{pmatrix}$ト$\begin{pmatrix} E^i_{\cdot\lambda} \\ p_\lambda \end{pmatrix}$ハ互ニ逆ノ行列デスカラ

$$(4.11)\quad E^\lambda_\mu = E_i^{\cdot\lambda} E^i_{\cdot\mu} - x^\lambda p_\mu$$

ヲ得マス。更ニ

$$(4.12)\quad \Gamma^0_{jk} = -E_j^{\cdot\mu} E_k^{\cdot\nu}\left(\frac{\partial p_\mu}{\partial x^\nu} - p_\lambda \Pi^\lambda_{\mu\nu}\right)$$

$$(4.13)\quad \Gamma^i_{jk} = E^i_{\cdot\lambda} E_j^{\cdot\mu} E_k^{\cdot\nu} \Pi^\lambda_{\mu\nu} - E_j^{\cdot\mu} E_k^{\cdot\nu} \frac{\partial^2 \xi^i}{\partial x^\mu \partial x^\nu}$$

トオケバ，Γ^0_{jk}ハ二次ノテンソル，Γ^i_{jk}ハ一ツノ対稱擬似接續ノ係数デアルコトガ判リマス。コヽニp_λノ代リニ

$$(4.14)\quad \bar{p}_\lambda = p_\lambda + \varphi_\lambda$$

ヲ採用スレバ

$$(4.14)\quad \bar{E}^i_{\cdot\lambda} = E^i_{\cdot\lambda},\quad \bar{x}^\lambda = x^\lambda,\quad \bar{E}_j^{\cdot\mu} = E_j^{\cdot\mu} - x^\mu \varphi_j,$$
$$\bar{p}_\lambda = p_\lambda + \varphi_\lambda$$

但シ

$$(4.15)\quad \varphi_\lambda x^\lambda = 0,\quad \varphi_j = E_j^{\cdot\mu}\varphi_\mu \quad (\varphi_\lambda = E^i_{\cdot\lambda}\varphi_i)$$

デスカラ，Γ^0_{jk}及ビΓ^i_{jk}ハ

$$(4.16)\qquad \bar{\Gamma}^{0}_{jk} = \Gamma^{0}_{jk} - \frac{\partial \varphi_j}{\partial x^k} + \varphi_i \Gamma^{i}_{jk} - \varphi_j \varphi_k$$

$$(4.17)\qquad \bar{\Gamma}^{i}_{jk} = \Gamma^{i}_{jk} - \varphi_j \delta^{i}_{k} - \varphi_k \delta^{i}_{j}$$

ナル変換ヲ受ケルコトハ注意ヲ要シマス。コレハ前述ノ理論ト D. van Dantzig, J. Haantjes ノ理論トノ密接ナ関係ヲ示スモノダカラデス。

サテ直接ノ計算ニ依ッテ

$$(4.18)\qquad \frac{d^2\xi^i}{dt^2} + \Gamma^{i}_{jk}\frac{d\xi^j}{dt}\frac{d\xi^k}{dt} = E^{i}_{\cdot\lambda}\left(\frac{d^2x^\lambda}{dt^2} + \Pi^{\lambda}_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx^\nu}{dt}\right)$$

$$+\left(\frac{\partial^2\xi^i}{\partial x^\mu \partial x^\nu} - E^{\beta}_{\mu}E^{\gamma}_{\nu}\frac{\partial^2\xi^i}{\partial x^\beta \partial x^\gamma}\right)\frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx^\nu}{dt}$$

ヲ示スコトガ出来マス。コゝヘ(4.5)カラ得ラレル

$$(4.19)\qquad \frac{d^2x^\lambda}{dt^2} + \Pi^{\lambda}_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx^\nu}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{d^2\rho}{dt^2}x^\lambda - \frac{2}{\rho}\frac{d\rho}{dt}\frac{dx^\lambda}{dt}$$

及ビ(4.11)カラ得ラレル。

$$(4.20)\qquad \frac{\partial^2\xi^i}{\partial x^\mu \partial x^\nu} - E^{\beta}_{\mu}E^{\gamma}_{\nu}\frac{\partial^2\xi^i}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} = -p_\mu E^{i}_{\cdot\nu} - p_\nu E^{i}_{\cdot\mu}$$

ヲ代入スレバ

$$(4.21)\qquad \frac{d^2\xi^i}{dt^2} + \Gamma^{i}_{jk}\frac{d\xi^j}{dt}\frac{d\xi^k}{dt}$$

$$= -\frac{d\xi^i}{dt}\left(\frac{2}{\rho}\frac{d\rho}{dt} + p_\lambda\frac{dx^\lambda}{dt}\right)$$

ガ得ラレマス。コゝデコノ式ノ形ヲ整ヘルタメニ

$$(4.22)\quad \frac{2}{\rho}\frac{d\rho}{dt} + 2p_\mu \frac{dx^\mu}{dt} = \frac{\dfrac{d^2t}{ds^2}}{\left(\dfrac{dt}{ds}\right)^2}$$

トオケバ，(4.21) ハ

$$(4.23)\quad \frac{d^2\xi^i}{ds^2} + \Gamma^i_{jk}\frac{d\xi^j}{ds}\frac{d\xi^k}{ds} = 0$$

トナリマス。サテ (4.22) ヲ更ニ微分スレバ

$$\frac{2}{\rho}\frac{d^2\rho}{dt^2} - \frac{2}{\rho^2}\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial p_\mu}{\partial x^\nu} - p_\lambda \Pi\right)\frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx^\nu}{dt}$$

$$+ 2p_\lambda\left(\frac{d^2x^\lambda}{dt^2} + \Pi^\lambda_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx^\nu}{dt}\right)$$

$$= \frac{\dfrac{d^3t}{ds^3}}{\left(\dfrac{dt}{ds}\right)^3} - 2\frac{\left(\dfrac{d^2t}{ds^2}\right)^2}{\left(\dfrac{dt}{ds}\right)^4}$$

ガ得ラレマスガ，コレニ (4.19) 及ビ (4.12) カラ得ラレル

$$(4.24)\quad -E^j_{\cdot\mu}E^k_{\cdot\nu}\Gamma^0_{jk} = \frac{\partial p_\mu}{\partial x^\nu} - p_\lambda \Pi^\lambda_{\mu\nu} + p_\mu p_\nu$$

ヲ代入スレバ

$$(4.25)\quad \frac{\dfrac{d^3t}{ds^3}}{\left(\dfrac{dt}{ds}\right)^3} - 2\frac{\left(\dfrac{d^2t}{ds^2}\right)^2}{\left(\dfrac{dt}{ds}\right)^4}$$

$$= -2\Gamma^0_{jk}\frac{d\xi^j}{dt}\frac{d\xi^k}{dt} - \frac{2}{\rho^2}\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 - \frac{4}{\rho}\frac{d\rho}{dt}p_\nu\frac{dx^\nu}{dt} - 2p_\mu p_\nu\frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx^\nu}{dt}$$

ヲ得マス。今(4.25)ニ(4.22)ノ自乗ノ半分ヲ加ヘレバ

$$(4.26)\quad \{t,s\} = -2\Gamma^{0}_{jk}\frac{d\xi^{j}}{ds}\frac{d\xi^{k}}{ds}$$

トナッテ，吾々ノ導入シタtハ射影媒介変数デアルコトガ判リマス。

接續ガ標準トイフ條件ヲ加ヘタイトキハ，計算デ証明サレル。

$$(4.27)\quad R^{i}_{\cdot jkh} + \Gamma^{0}_{jk}\delta^{i}_{h} - \Gamma^{0}_{jh}\delta^{i}_{k} - \delta^{i}_{j}\left(\Gamma^{0}_{kh} - \Gamma^{0}_{hk}\right)$$
$$= E^{i}_{\cdot\lambda}E^{j}_{\cdot\mu}E^{k}_{\cdot\nu}E^{h}_{\cdot\omega}\Pi^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}$$

ヲ利用シマス。但シコヽニ

$$(4.28)\quad R^{i}_{\cdot jkh} = \frac{\partial\Gamma^{i}_{jk}}{\partial x^{h}} - \frac{\partial\Gamma^{i}_{jh}}{\partial x^{k}} + \Gamma^{a}_{jk}\Gamma^{i}_{ah} - \Gamma^{a}_{jh}\Gamma^{i}_{ak}$$

及ビ

$$29)\quad \Pi^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega} = \frac{\partial\Pi^{\lambda}_{\mu\nu}}{\partial x^{\omega}} - \frac{\partial\Pi^{\lambda}_{\mu\omega}}{\partial x^{\nu}} + \Pi^{\alpha}_{\mu\nu}\Pi^{\lambda}_{\alpha\omega} - \Pi^{\alpha}_{\mu\omega}\Pi^{\lambda}_{\alpha\nu}$$

デアリマス。コヽデ

$$(4.30)\quad \Pi^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\lambda} = 0$$

ナル條件ヲオイテ

$$\Pi^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}x^{\mu} = \Pi^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}x^{\nu} = \Pi^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}x^{\omega} = 0$$

ニ注意スレバ，前ト同様ニシテ

$$\Gamma^{0}_{jk} = -\frac{1}{n^{2}-1}\left(nR_{jk} + R_{kj}\right) \qquad \left(R_{jk} = R^{i}_{\cdot jki}\right)$$

ガ得ラレ，コレヲ(4.26)ニ代入シテ

$$(4.31)\quad \{t, s\} = \frac{2}{n-1} R_{jk} \frac{d\xi^j}{ds} \frac{d\xi^k}{ds}$$

ガ得ラレマス。