

1174. 群ノ左右類ノ代表ニツイテ

岩村 聯, 中山 正(名大)

集合ノ有限分割ニ於ル代表元ノ定理カラ、或ル群 G ノ指数有限ナル部分群 H ニツイテノ類分解ニ於テ左右ニ共通ノ代表元ノ系が選ベル事ハヨク知ラレテキル (Zassenhaus, 9頁)。然シ指数が無限ノ場合ニツイテドコニモ何も言イテナイ様ニ思フノデ考ヘテ見マシタ處、コノ場合ニハ一般ニハ定理ハ成立タナイ事が分リマシタノデ極ク簡單ナ事作ラ御報告シマス。反例：

二元 a, b デ生成サレタ自由群 G ヲ考ヘル。ココニトカラ出發シテ、

- 1) 積ヲツクル事
- 2) 逆ヲトル事、
- 3) 左カラ a^{-1} , 右カラ b ヲ掛ケル事、

ヲ繰返シテ得ラレル元全体ヨリナル部分群ヲ H トスル。サテ左側ノ類 $H a, H b$ ノ任意ノ元 $a_1 = h a, b_1 = h b$ ヲ考ヘルト $a_1^{-1} b_1 = a^{-1} (h^{-1} h) b$ デアルカラ H ノ3)ノ性質カラ $\in H$ デアリ従ツテ a_1, b_1 ハ H ノ同一ノ右類ニ屬スル。ヨツテ若シ G, H ニツキ定理(左右共通代表系ノ選出)ガ成立ツトスレバ左類 $H a, H b$ モ同一即チ $a b^{-1} \in H$ デナケレバナラス。然シ以下ノ如ク $a b^{-1} \notin H$ ガ云ヘテ従ツテ定理ガ成立タナイ事が知ラレル。ソノ証明デアルガ、 H ノ各元ハ a, b ノ語トシテ表ハサレルガ、例ノ自明的変形ニヨリ標準形ニナホス：

$$x_1^{\epsilon_1} x_2^{\epsilon_2} \cdots x_n^{\epsilon_n} \quad (x_i = a \text{ 又ハ } b; \epsilon_i = \pm 1)$$

ユノ場合指数ノ和 $\sum \epsilon_i = 0$ ナル事ハ H ノ形成 1) 2), 3)ト (自明的変形)トカラ明カデアアルガ、更ニ

(*) ドコデ截ツテモ前半ニ於ル指数ノ和ハ ≤ 0 ナル性質ガアル。コレハ $\sum \epsilon_i = 0$ カラ

(**) 後半ニ於ケル指数ノ和ハ ≥ 0 ト云フニ等シイ。而シテコノ(*)モ H ノ形成カラ見易イ。何者、1)ノ積ニツイテ兩標準形ヲナラベテ書イテツナギ目ノ $x x^{-1}, x^{-1} x$ 等ヲ消シテ行ケバ積ノ標準形ニナルガ、ユノ $x x^{-1}$ 等ヲ消ス前ニツキ(*)ノ性質ノナル事ヲ云ヘバ勿論後ニツイテモ成立ツ。然ルニナラベテ書イタモノデハ(*)ハ明カデアアル。即チ截リ口ガ前因子ニアレバ前因子ノ(*), 後因子ニアレバソノ(**)ヲ考ヘレバヨク、ツナギ目ナラ自明、マタ(**)トノ同一カラ 2)ノ逆ニツイテモ保タレル。3)ニツイテモ自明、カクテ(*)ハ H ノ元ニ一般ニ成立ツ。然ルニ $a b^{-1}$ デハ(*)ハ成立タナイカラ $\notin H$ 。コレデ反例ガ出来タ。

(注意) 實ハ (角谷氏ガソウデアラウト云ハレタ様ニ) H ハ $\sum \epsilon_i = 0$ デアリ且ツ(*)ノ成立ツ元ノ全体カラ成ル。何者、ソノ全体ヲ \bar{H} トスレバ明カニ $H \subseteq \bar{H}$ デアルガ、逆ヲ証明スルタメ \bar{H} ノ元ノ長さニツイテノ歸納法ヲ行フ。 \bar{H} ノ任意ノ元

$$x_1^{-1} x_2^{\epsilon_2} \cdots x_n^{+1} \quad (\text{標準形})$$


ヲ考ヘルニ若シ $x_2^{\epsilon_2} \cdots x_{n-1}^{\epsilon_{n-1}}$ ガ矢張り \bar{H} ニ属スレバ (尤ヨリ短イ元ニハ主張ガ成立ツトスレバ) $\in H$ トナリ、従ツテモトノ元モ $\in H$ トナル (H ノ2), 3)ヲ参照)、然シ若シ

サウデナイトスレバ $\varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \dots + \varepsilon_m > 0$ ナル $m (< n)$ が
 存在スルワケデ、今 m ヲソノ様ナ最小ノモノトスル。然ラ
 バ $\varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \dots + \varepsilon_m = 1$ デアリ、 m ノ最小性カラ容易
 ニ元

$$x_1^{-1} x_2^{\varepsilon_2} \dots x_m^{\varepsilon_m}$$

ニツキ (*) が成立テ $\in \bar{H}$ 、從ツテ歸納法ノ仮定ニヨリ $\in H$

$$x_{m+1}^{\varepsilon_{m+1}} \dots x_n^{\varepsilon_n} \in \bar{H} \quad \text{從ツテ} \in H, \quad \text{故ニ矢張り我々}$$

ノ元ガ $\in H$ トナル。(ユノ証明ハ a, b ヲ京都ニ於ル東行及
 ビ北上ト思ヘバ考ヘ易イ。 \bar{H} ノ元トハ都心カラ南西京區ノ
 ミヲ通ツテ對角線  ニ終ル途、上ノ証明ニ於ルニソノ場
 合ハ途中對角線ニ立寄ルカ否カノ區別デアアル。)

— 以 上 —