1182　Hilbert 空間ノ angular relation ニ就イテ

岩本 秀 行（東大）

n次元ノ euclidean vector space $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ ノ間ノ角ヲ定義スルコトハ、相當厄介ナ問題ヲ含ンデキテ、$\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ ノ次元ガ一般デ、且之等ガ一般ナ位置ニアル場合ニハ、適当ナ定義ヲ与ヘルコトハ困難デアル。唯 $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ ガ何レモ $n-1$ 次元又ハ一次元ノ場合或ハ何レカ一方ガ一次元ノ場合ニハソノ間ノ角ノ cosine ヲ定義スル事ガ出来テ、シカモ $\cos^2\theta$ ヲ与ヘレバ $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ ノ相対的ナ位置ガ廻転群ヲ除イテ一義的ニ定マル。ソコデ $\mathfrak{M}$ $\mathfrak{N}$ ノ間ノ invariant トシテ、ドノ様ナモノヲ与ヘレバ 二ツノ subspace ノ相対的位置ヲ、廻轉群ヲ除イテ一意ニ定メルコトガ出来ルカト云フ問題ガ起ル。（コノ様ナ invariant ノ中カラ、實際角計量ノ擴張ニ相当スルモノガ得ラレルノデアル）コヽデハ一般ニ Hilbert 空間 $\mathfrak{H}$ ノ中ノ二ツノ closed linear manifold $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ ノ間ノ Unitari nvariant ガ或ル Hermit 演算子Hヲ用ヒテ得ラレルコトヲ證明シ、有元次元ノ空間ヘノ幾ツカノ應用ヲノベル。

1. $\mathfrak{H}$ ヲ Hilbert 空間トシ，$\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$ ヲ $\mathfrak{H}$ ノ中ノ二ツノ任意ノ closed linear manifold トスル。$\mathfrak{M}_1$ ノ任意の vector φ ヲ $\mathfrak{M}_2$ ヘ正射影シテ出来ル vector

ヲ更ニ$\mathfrak{M}_1$ ヲ正射影シテ出来ル vector ヲ y トスル。
φ ヲ y ニ対應サセル変換 $\varphi \to y = H_1\varphi$ ヲ $\mathfrak{M}_1$ ノ中デ考ヘレバ，ノハ *hermitisch* デ、且 $0 \leqq |||H_1||| \leqq 1$ デアル。即チ H ガ *hermitisch* タトイフコトハ、$\mathfrak{M}_1$ ノ中デハ H_1 ハ $P_{\mathfrak{M}_1} P_{\mathfrak{M}_2} P_{\mathfrak{M}_1}$ ト一致スルコトカラ分リ、又 $0 \leqq |||H||| \leqq 1$ ナルコトガ容易ニ分リマス。

$\mathfrak{M}_1$ ノ vector デ、$\mathfrak{M}_2$ ノスベテノ vector ニ垂直ナモノ全体ヲ $\mathfrak{M}_1'$，$\mathfrak{M}_2$ ノ vector デ $\mathfrak{M}_1$ ノスベテノ vector ニ垂直ナモノ全体ヲ $\mathfrak{M}_2'$ トスル。

$$\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}_1' \oplus \mathfrak{M}_1^\circ, \qquad \mathfrak{M}_2 = \mathfrak{M}_2' \oplus \mathfrak{M}_2^\circ$$

デ $\mathfrak{M}_1^\circ$，$\mathfrak{M}_2^\circ$ ヲ定義スル。

補題1　$\mathfrak{M}_1$ ノ $\mathfrak{M}_2$ ノ上ヘノ *projection* ハ $\mathfrak{M}_2^\circ$ ニ，$\mathfrak{M}_2$ ノ $\mathfrak{M}_1$ ノ上ヘノ *projection* ハ $\mathfrak{M}_1^\circ$ ニ一致スル。
$\mathfrak{M}_1^\circ \ni \varphi \to P_{\mathfrak{M}_2^\circ}\varphi$，デ $\mathfrak{M}_1^\circ$ ノ vector ト $\mathfrak{M}_2^\circ$ ノ vector トガ一対一ニ対應スル、$\mathfrak{M}_2^\circ \ni \varphi \to P_{\mathfrak{M}_1^\circ}\varphi$ モ同様デアル。
$P_{\mathfrak{M}_1} P_{\mathfrak{M}_2} P_{\mathfrak{M}_1}$ ヲ $\mathfrak{M}_2$ ノ中ノ *hermitisch* ナ *operator* ト考ヘテ之ヲ H_2 トスル。H_1, H_2 ノ *spectrarisation* ヲ夫々

$$H_1 = \int_0^1 \lambda\, d E_1(\lambda), \qquad H_2 = \int_0^1 \lambda\, d E_2(\lambda)$$

トスレバ

$$E_1(0) = \mathfrak{M}_1', \quad E_2(0) = \mathfrak{M}_2'$$ デアル。$E_1(\lambda)$，$E_2(\lambda)$ ノ *range* ヲ夫々 $\mathfrak{M}_{1\lambda}$，$\mathfrak{M}_{2\lambda}$ トスル。

補題2.　$f(x)$ ヲ x ノ任意ノ *polynomial* トスレバ
$P_{\mathfrak{M}_2} f(H_1)\varphi = f(H_2)\, P_{\mathfrak{M}_2}\varphi \quad (\varphi \in \mathfrak{M}_1)$ デアル。

證明　$f(x)=x^n$ ノ場合ヲヤレバヨイ。

$\varphi \in \mathfrak{M}_1$ ナラバ、$P_{\mathfrak{M}_2}(P_{\mathfrak{M}_1}P_{\mathfrak{M}_2})^n\varphi=(P_{\mathfrak{M}_2}P_{\mathfrak{M}_1})^n P_{\mathfrak{M}_2}\varphi$

即チ　$P_{\mathfrak{M}_2}\ f(H_1)\varphi=f(H_2)P_{\mathfrak{M}_2}\varphi$

同様ニ $\psi\in\mathfrak{M}_2$ ナラバ．$P_{\mathfrak{M}_1}f(H_2)\psi=f(H_1)P_{\mathfrak{M}_1}\psi$ トナル。

補題3　$\mathfrak{M}_1(\lambda)-\mathfrak{M}_1(0)$，$\mathfrak{M}_2(\lambda)-\mathfrak{M}_2(0)$ ハ互ニ他ノ射影デアル。

證明　前ノ補題ニヨリ $0\leqq x\leqq 1$ デ連続ナ任意ノ $f(x)$ ニ対シテ　$P_{\mathfrak{M}_2}f(H_1)=f(H_2)P_{\mathfrak{M}_2}$ トナルコト、及ビ $P_\mu(x)=\max(x-\mu,0)$ トオケバ $\mathfrak{M}(\lambda)$ ハ $P_\lambda(H)\cdot\varphi=0$ ナル φ 全体ト一致スルコトカラ分ル。

補題4.　$\lambda_1<\lambda_2\leqq\lambda_3<\lambda_4$ ナラバ $\mathfrak{M}_{1\lambda_2}\ominus\mathfrak{M}_{1\lambda_1}$，$\mathfrak{M}_{2\lambda_4}\ominus\mathfrak{M}_{2\lambda_3}$，$\mathfrak{M}_{1\lambda_2}\ominus\mathfrak{M}_{1\lambda_1}$，$\mathfrak{M}_{2\lambda_2}\ominus\mathfrak{M}_{2\lambda_1}$ ハ互ニ垂直デアル。

證明　$\mathfrak{M}_{1\lambda_2}\ominus\mathfrak{M}_{1\lambda_1}$ ノ任意ノ vector φ，$\mathfrak{M}_{2\lambda_4}\ominus\mathfrak{M}_{2\lambda_3}$ ノ任意ノ vector ψ ヲトル．$P_{\mathfrak{M}_2}\varphi$ ハ $\mathfrak{M}_{2\lambda_2}\ominus\mathfrak{M}_{2\lambda_1}$ ノ vector デアルカラ $\mathfrak{M}_{2\lambda_4}\ominus\mathfrak{M}_{2\lambda_3}$ ノ任意ノ vector ニ垂直，従ツテ φ ハ ψ ニ垂直デアル。

定理1　　H ヲ Hilbert 空間 $\mathfrak{M}$ 全体デ定義サレタ $0\leqq|||H|||\leqq 1$ ナル任意ノ hermitisch ナ operator トスル。然ラバ $\mathfrak{M}$ ヲ含ム適当ナ Hilbert 空間 $\mathfrak{H}$ ノ中ニ closed linear manifold $\mathfrak{N}$ ヲツクリ $P_{\mathfrak{M}}\ P_{\mathfrak{N}}\ P_{\mathfrak{M}}$ ガ $\mathfrak{M}$ ノ中デハ H ト一致スル様ニスル事ガ

出来ル。

證明　Hノ spectralisation ヲ

$$H=\int_0^1 \lambda\, dE(\lambda)$$

トスル。區間$(0,1)$ノ中ニ任意ニ $0=\lambda_0<\lambda_1<\cdots<\lambda_n=1$ ナ $\lambda_0,\cdots,\lambda_n$ ヲトル、之デ$(0,1)$ノ一ツノ partition Π ガ定義サレル。今$\Pi_1, \Pi_2, \cdots$ヲ段々細カクナツテ行ツテ、シカモ $\max(\lambda_{i+1}-\lambda_i)\to 0$ ナル如キ partition ノ列トスル。夫々ノ Π_α ニツイテ

$$H_\alpha=\sum_i \lambda_i'(E(\lambda_i)-E(\lambda_{i-1}))$$

ニヨリ $H_1, H_2, \cdots$ ヲ定義スル。コヽデλ_i' ハ $\lambda_i\geqq\lambda_i'\geqq\lambda_{i-1}$ ナ任意ノ数デ、各々ノ Π_α ニツイテ適当ニ定義サレテヰルモノトスル。

次ニ$H_1, H_2, \cdots$ ニ対應シテ closed linear manifold $\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2, \cdots$ ヲ $\mathfrak{M}$ ヲ含ム適当ナ Hilbert 空間 $\mathfrak{H}$ ノ中ニ次ノ如ク定義スル。

$\mathfrak{M}$ノ完全正規直交系ヲ $\varphi_1, \varphi_2, \cdots$ トスル。新ラシク $\psi_1, \psi_2 \cdots$ ナル element ヲ導入シテスベテノ i, j ニ対シ $(\varphi_i, \psi_j)=0$, $(\psi_i, \psi_j)=\delta_{ij}$ ト定義スレバ $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \psi_1, \psi_2,$ ガ一ツノ Hilbert 空間ヲ張ル。之ヲ $\mathfrak{H}$ トスル、$\mathfrak{H}$ノ中デ $\psi_1, \psi_2, \cdots$ ニヨツテ張ラレル closed linear manifold ヲ $\mathfrak{N}_0$ トスル。又 $\varphi_i\to\psi_i$ $(i=1,2,\cdots)$ ハ $\mathfrak{M}$ ヲ $\mathfrak{N}_0$ ヘ移ス一ツノ Unitary ノ Mapping ヲ定義スル、之ヲ U_0 トスル。今Π_1ヲ

$$\Pi_1 \qquad 0=\lambda_0<\lambda_1<\cdots<\lambda_{n-1}<\lambda_n=1$$

トシ、$\mathfrak{M}_\lambda \ominus \mathfrak{M}_{\lambda_i - 0}$ヲ$\mathfrak{R}_{\lambda_i}$トスル。　$\mathfrak{R}_{\lambda_i}$ノ中ニ正規直交系ヲ作リ之ヲ$\varphi_{i1}, \varphi_{i2},$　トスル。$U\varphi_{ij} = \psi_{ij}^{(0)}$トスル。ニツノvector $\varphi_{ij}, \psi_{ij}^{(0)}$ノキメル直角中ニvector $\psi_{ij}^{(1)}$ヲトリ$\cos(\varphi_{ij}, \psi_{ij}^{(1)}) = \sqrt{\lambda_i}$トナル様ニスル。コノ様ナ$\psi_{ij}^{(1)}$ $(i=1,2,\cdots,n, j=1,2,\cdots)$全体ニヨツテ張ラレルclosed linear manifoldヲ$\mathfrak{N}_1$トスル。$\varphi_{ij} \to \psi_{ij}^{(1)}$ハ$\mathfrak{M}$ヲ$\mathfrak{N}_1$ヘ移スUnitaryナmappingヲ定義スル、之ヲU_1トスル。サテ$\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2, \cdots, \mathfrak{N}_j$及ビ$U_1, U_2 \cdots, U_j$が定義サレタモノトシテ之カラ$\mathfrak{N}_{j+1}$及ビ$U_{j+1}$ヲ定義スル。即チ$\Pi_j$ヲ

$$\Pi_j \qquad 0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_{n-1} < \lambda_n = 1$$

トシ、　Π_{j+1}ニ於テハλ_i, λ_{i+1}ノ間ニ

$$\lambda_i = \mu_i < \mu_{i+1} < \cdots < \mu_{i+k} = \lambda_{i+1}$$

ナルpartitionが入ッタトスル。$\mathfrak{M}_{\mu_{i+j}} \ominus \mathfrak{M}_{\mu_{i+j-1}}$ヲ$\mathfrak{R}_{\mu_{i+j}}$トシ、$\mathfrak{R}_{\mu_{i+j}}$ノ完全正規直交系ヲ$\varphi_{i+j,1}, \cdots,$トスル。$U^\alpha \varphi_{i+j,k} = \psi_{i+j,k}^{(\alpha)}$トシ、$\varphi_{i+j,k}$ト$\psi_{i+j,k}^{(\alpha)}$ノキメル角ノ中ニ$\psi_{i+j,k}^{(\alpha+1)}$ヲ$\cos(\varphi_{i+j,k}, \psi_{i+j,k}^{(\alpha+1)}) = \sqrt{\mu_{i+j}}$ナル如クトル。コノ様ナ$\psi$全体ノ張ルclosea linear manifoldヲ$\mathfrak{N}_{\alpha+1}$ト定義シ、$\varphi_{i+j,k} \to \psi_{i+j,k}^{(\alpha+1)}$デ$U_{\alpha+1}$ヲ定義スル。　今$\varphi$ヲ$\mathfrak{M}$ノ任意ノvectorトシ$U_\alpha \varphi = \psi_\alpha$トスレバ

$$\|\psi_\alpha - \psi_{\alpha+\beta}\| \leqq \varepsilon_\alpha \|\varphi\|, \quad (\varepsilon_\alpha \to 0 \ (\alpha \to \infty))$$

従ツテ$\psi_1, \psi_2, \cdots$ハcauchy sequenceヲ作ルカラ一定ノψニ収斂スル。

$U\varphi=\psi$ トオケバコノ様ナψ全体ハ closed linear manifold ヲツクル。之ヲ$\mathfrak{N}$トスル。Uハ$\mathfrak{M}$ヲ$\mathfrak{N}$ヘ移スUnitaryノmapping ヲ定義スル。又$P_{\mathfrak{M}}\ P_{\mathfrak{N}_\alpha}$ハ$\mathfrak{M}$ノ中デハ$H_\alpha$ニ一致シ、且之ガ$P_{\mathfrak{M}}\ P_{\mathfrak{N}}$ニ収斂シ従ツテ$P_{\mathfrak{M}}\ P_{\mathfrak{N}}$ガ$\mathfrak{M}$ノ中デハ$H$ト一致スルコトモ容易ニ證明サレル。従ツテ之デ定理1ノ證明ハ完全ニスンダ。

定理2. 定理1デ、$\mathfrak{M}$ヲ含ムHilbert空間$\bar{\mathfrak{H}}$ノ中ニ closed linear manifold $\bar{\mathfrak{N}}$ガアツテ、$P_{\mathfrak{M}}\ P_{\bar{\mathfrak{N}}}$ガ$\mathfrak{M}$ノ中デ$H$ト一致スルトスル然ラバ$\mathfrak{M}\smile\mathfrak{N}\rightarrow\mathfrak{M}\smile\bar{\mathfrak{N}}$ナル如キ isometric ナ変換$T$ガアツテ、$T$ニヨリ$\mathfrak{M}$ハ不変、且$\mathfrak{N}$ハ$\bar{\mathfrak{N}}$ニ対應スル。

證明、補題1ニヨリ$\mathfrak{H}$ノ中デ$\mathfrak{M}=\mathfrak{M}'\oplus\mathfrak{M}_0$, $\mathfrak{N}=\mathfrak{N}'\oplus\mathfrak{N}_0$, $\bar{\mathfrak{H}}$ノ中デ$\mathfrak{M}=\mathfrak{M}''\oplus\mathfrak{M}_0'$, $\bar{\mathfrak{N}}=\bar{\mathfrak{N}}'\oplus\bar{\mathfrak{N}}_0$トスル。$\mathfrak{M}'$, $\mathfrak{M}''$ハ$E(0)$ノ rang ダカラ$\mathfrak{M}'=\mathfrak{M}''$, $\mathfrak{M}_0=\mathfrak{M}_0'$デアル。一般性ヲ失フコトナク$\mathfrak{M}'=\mathfrak{N}'=\bar{\mathfrak{N}}'=0$ト假定スルコトガ出来ル。$\varphi$ヲ$\mathfrak{M}$ノ任意ノvectorトスレバ補題1ニヨリ$P_{\mathfrak{M}}\psi=\varphi$ナル$\mathfrak{N}$ノvector ψ, $P_{\mathfrak{M}}\bar{\psi}=\varphi$ナル$\bar{\mathfrak{N}}$ノvector $\bar{\psi}$ガ唯一ツキマル。ソコデ$\varphi\rightarrow\varphi$, $\psi\rightarrow\bar{\psi}$ ナル変換ヲ考ヘレバ之デ$\mathfrak{M}\smile\mathfrak{N}\rightarrow\mathfrak{M}\smile\bar{\mathfrak{N}}$ナル変換ガキマリ$\mathfrak{M}\rightarrow\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}\rightarrow\bar{\mathfrak{N}}$デアル。之ガ isometric ニナルコトヲ證明スル。

φ, φ'ヲ$\mathfrak{M}$ノ任意ノvectorトシ、φ'カラ定マル$\mathfrak{N}$ $\bar{\mathfrak{N}}$ノvectorヲ夫々ψ', $\bar{\psi}'$トスレバ、

$(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}') = (\mathfrak{x}, P_{\mathfrak{M}}\mathfrak{y}') = (\mathfrak{x}, \mathfrak{x}')$　同様ニ　$(\mathfrak{x}, \bar{\mathfrak{y}}') = (\mathfrak{x}, \mathfrak{x}')$

即チ　$(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = (\mathfrak{x}, \bar{\mathfrak{y}})$

又$\mathfrak{x}$カラキマル $\mathfrak{N}, \bar{\mathfrak{N}}$ ノ vector ヲ夫々 $\mathfrak{y}, \bar{\mathfrak{y}}$ トスル。$\mathfrak{y}', \bar{\mathfrak{y}}'$ カラキマル、$\mathfrak{M}$ ノ vector ヲ夫々 $\mathfrak{x}'', \bar{\mathfrak{x}}''$ トスレバ　$\mathfrak{x}'' = \bar{\mathfrak{x}}'' = H^{-1}\mathfrak{x}'$.

依ッテ

$$(\mathfrak{y}, \mathfrak{y}') = (\mathfrak{y}, H^{-1}\mathfrak{x}') = (P_{\mathfrak{M}}\mathfrak{y}, H^{-1}\mathfrak{x}') = (\mathfrak{x}, H^{-1}\mathfrak{x}')$$

同様ニ $(\bar{\mathfrak{y}}, \bar{\mathfrak{y}}') = (\mathfrak{x}, H^{-1}\mathfrak{x}')$

即チコノ対應ハ isometric デアル。

我々ハ更ニ円周上ノ点ニ関シ普通ノ順序ノ公理が成立ツトシ之ヲⅦトシマス、然ラバ$\mathfrak{L}_w$ハ順序ヅケラレタ可換体kニ於ケル擬似幾何學トナリ$\mathfrak{L}$ノ元ハ$\mathfrak{L}_w$ノ二次曲線トナリマス。以下更ニ定理9が成立ツコトヲノベマス。

定理9　kハ reel pythagoreisch デ$\mathfrak{L}_w$ハkノ上ノn次元 euclid 空間トナリ、$\mathfrak{L}$ノ元ハ$\mathfrak{L}_w$ニ於ケル点、二点ノ対, 円, 球, ・・・ ノ全体トナル。

$\mathfrak{L}$ノ元Hデ $H \leqq A \leqq I$ ナラバ $A = H$ 或ハ $A = I$ トナルモノヲ超球トイフコトニシマス。或ル超球Hがアルトキ、Hノ$\mathfrak{L}_w$ノ無究遠ノ超平面ニ関スル pole ヲHノ中心ト呼ビマス。

或ル超球Hノ中心がSナルトキ、Sヲ含ムn次元、$n-1$次元, ・・・ ノ平面ノ列 A: $\mathfrak{L}_w = \alpha_n > \alpha_{n-1} > \alpha_{n-2} > \cdots > \alpha_1 > \alpha_0 = S$ ヲトリマス。

α_i ハ α_{i-1} ニヨリ二ツノ部分 α_i', α_i'' ニ分ケラレマス。ソコデαカラ次ノ半空間ノ列

$$A': \quad \alpha > \alpha'_{n-1} > \alpha'_{n-2} > \cdots > \alpha'_1 > \alpha_0 = S$$

ガ作ラレマス。

Sヲ起点トスル半直線ℓト超平面πトガ、Hニ関シテ共軛ノトキ、ℓハπニ垂直デアルト云ヒ、Sヲ起点トスルπノ上ノ直線ハℓニ垂直ダト云ヒマス。Sヲ過ギル一ツダケ次元ノ異ナル半面 α_i', α_{i-1}' ガアルトキ α_i' ニ属シテヰテ α_{i-1}' ニ垂直ナ半直線ヲ唯一本引クコトが出来マス。勿論半直線ℓガ α_{i-1}' ニ垂直ダトイフノハ、ℓガ α_{i-1}' ノ上ノSヲ起点トスルスベテノ半直線ニ垂直ダト云フ意味デアリマス。之カラ或ル半空間ニ属スル直交系ヲ定義スルコトガ出来マス。即チSヲ起点トスル互ニ垂直ナ n コノ半直線 ℓ_1, ℓ_2, ℓ_n デ、$\ell_n < \alpha$, $\ell_i < \alpha_i$, $\ell_1 = \alpha_1'$ 且 ℓ_i, ℓ_j ガ互ニ垂直トナル如キモノガ唯一ツ存在シマス。

$$A': \quad \alpha > \alpha'_{n-1} > \cdots > \alpha'_0 = S$$

$$B': \quad \alpha > \beta'_{n-1} > \cdots > \beta'_0 = S$$

ヲ任意ノ二ツノ半空間ノ kette トシ、ソレニ属スル直交系ヲ $\{\ell_1, \cdots, \ell_n\}, \{m_1, \cdots, m_n\}$, ℓ_i トHトノ交点ヲ S_i, m_i トHトノ交点ヲ T_i トスルトキ $S_i \to T_i$, $S \to S$ ハ一ツノ Affinität デアリマス。

コノ様ナ Affinität 全体ヲ$\mathfrak{g}$トスレバ、$\mathfrak{g}$ ハ $\mathfrak{L}w$ ニ於テ Sヲ不変ニスル様ナ Affin 変換全体ノツクル群

$\mathfrak{a}$ ノ部分群トナリ、$\mathfrak{g}$ ニツイテハ Freiebeweglichkeits Postulat 等ノ條件ガ満足サレマス。從ツテ $\mathfrak{g}$ ハ或ル正値二次形式ヲ不変ニシ、$\mathfrak{L}_w$ ハ euclid 空間トナリマス。而シテコノ場合 $\mathfrak{L}$ ノ元ガ $\mathfrak{L}_w$ ノ意味ニ於ケル円、球……ノ全体トナルコトガ III 等ヲ用ヒテ證明サレマス。

§3. $\mathfrak{L}_w$ ハ euclid 空間ダカラ、ソノ中ノ二ツノ超球 K_1, K_2 ガ直交スルトイフコトガ定義サレマス。シカモ之ハ点 W ノ位置ニ関セズ、K_1, K_2 ノミデ確定シタ意味ヲモツテヰマス。之ハ $\mathfrak{L}_w$ ノ中ノ任意ノ点 W' ヲ中心トスル球ニ関シ $\mathfrak{L}_w$ ヲ反轉シテ出来ル幾何ガ $\mathfrak{L}_{w'}$ ト本質的ニ同ジモノデアルノヲ分リマス。今 k ノ擴大体デソノ正ノ元ガスベテ平方根ヲモツ様ナ体ノ中デ最小ノモノヲ $\bar{k}$ トシ、$k^{\dagger}=(\bar{k},\sqrt{-1})$ トシマス。$\mathfrak{L}_w$ ノ座標ノ体ヲ $k^{\dagger}$ ニ擴大スレバ、スベテノ球ガ 0 デナイ meet ヲモツ空間ガ作ラレマス。之ヲ $\mathfrak{L}^{\dagger}$ トスレバ、コノ擴大ニハ W ニ無関係ナ意味ヲ与ヘルコトガ出来マス。$\mathfrak{L}^{\dagger}$ ニ普通ノ Darboux ノ座標ガ導入サレマス。γ ヲ $\mathfrak{L}^{\dagger}$ ニ於ケル超球及ビ点ノ或ル集合トスルトキ $[\gamma]$ ヲ以テ γ ノスベテノ元ニ直交スル様ナ球或ハ点全体ヲ表ハスコトニスレバ、$[\gamma]\geq\gamma$, $[[\gamma]]=[\gamma]$ デアリマス。$k+1$ コノ超球或ハ点 $K_1,\cdots,K_{n+1}$ ガアルトキドノ i ニ対シテモ $K_i\neq[K_1,\cdots,K_{i-1},K_{i+1},\cdots,K_{k+1}]$ ノトキ $K_1,\cdots,K_{k+1}$ ハ獨立デアルトイヒ、コノ様ハ $K_1,\cdots\cdots,K_{k+1}$ カラキマス。
$[K_1,\cdots,K_{k+1}]$ ヲ $\mathfrak{L}^{\dagger}$ ノ k-element トイフコトニスレ

バ、之デ$\mathcal{L}'$ガ Veblen-Young ノ射影幾何ニナリマス。Kガ超球或ハ点ナルトキ K＝直交スル球或ハ点全体ハコノ意味デ超平面トナリ、之ヲ$\widetilde{K}$トスレバ$K\to\widetilde{K}$ナル対應ハ一ツノ射影的ナ、involutorial ナ対應ニナリ且ツ之ハ一ツノ二次曲面ニ関スル pole ト polar ノ対應トナリ、コノ二次曲面ハ$K<\widetilde{K}$ナルK即チ$\mathcal{L}^\dagger$ノ点全体トナリマス。即チコノ射影幾何ヲ$PL(n+1,k)$トカキ、齊次座標ヲ$(x_1,\cdots,x_{n+2})$トスレバ、$\mathcal{L}^\dagger$ノ点ハ二次曲面

$$\sum_{\lambda,\mu} g_{\lambda\mu}\, x^\lambda x^\mu = 0$$

ヲ形成シマス。

$\mathcal{L}^\dagger$ヲ$\mathcal{L}^\dagger$ニ移ス一対一ノ対應デ任意ノ二元ノ間ノ meet ト join ノ関係ヲカヘナイモノ、全体ヲ Möbius 変換トイフコトニシマス。$k^\dagger$ノ Automorphismengruppe ヲ$\mathcal{G}$トスレバ，Möbius 変換ハ

$$(A,S):\qquad \sum_{\lambda,\mu} g_{\lambda\mu}\, a^\lambda_\alpha a^\mu_\beta = g^S_{\alpha\beta},\qquad S\in\mathcal{G}$$

ナル semi-linear transformation 全体カラナリマス。二ツノ球x,yノ内積　$(x,y)=\sum g_{\lambda\mu} x^\lambda y^\mu$ハ gauge 一変換ト$k^\dagger$ノ自己同型ヲ除イテキマリマス。

$$(\overline{x,y}) = \lambda(A,S)\,(x,y)^S$$

特ニ(A,e)ナル形ノ Möbius 変換全体ハ$\mathcal{L}^\dagger_w$ノ反轉ノミヨリ erzeugen サレル群ニ一致スルコトガ分リマス。二ツノ円ノナス角$(x,y)=(x,y)^2/(x,x)(y,y)$ハ Möbius 変換デ$(\overline{x,y})=(x,y)^S$ノ如ク変ジマス。

(1994.6.20)